

– nie negative – Erzeugungsdichte zuschreiben kann. Anders gesagt, man kann sich die Entropie in dieser Theorie als ein räumlich verteiltes, fließfähiges, erzeugbares, aber unzerstörbares Etwas denken. Auch auf diesen weiter gefassten Begriff der Entropie ist die Deutung als Menge an atomarer Unordnung übertragbar [1].

Die lokale Größe Temperatur T beschreibt einen anderen Aspekt der Unordnung, die lokale Stärke der Unruhe oder Gestörtheit einer atomaren Ordnung. Am auffälligsten äußert sich eine Zunahme der Temperatur in einem Zuwachs der Teilchengeschwindigkeiten, wenngleich das auch nicht immer zutrifft (etwa bei reinen Spinsystemen nicht). Wie Unordnungsgröße S , Unordnungsstärke T und Energie E zusammenhängen und zusammenwirken ist ein interessantes Thema, das einer ausgiebigeren Behand-

lung wert ist, nicht nur einer beiläufigen Erwähnung in einem Schlusssatz.

Literatur

- [1] G. JOB: Entropie aus molekularkinetischer Sicht. – MNU 37 (1984) 459–467.

Dr. GEORG JOB geb. 1936, Universität Hamburg, Institut für Physikalische Chemie, Bundesstr. 45, 20146 Hamburg, georg.job@gmx.de, www.job-stiftung.de, lehrte im Fachbereich Chemie an der Universität Hamburg (1970–2001), war Gastdozent an der Universität Karlsruhe (1979–1980) und an der Tongji-Universität (1983) Shanghai. Arbeitsgebiete: allgemeine, chemische, irreversible und statistische Thermodynamik. Er ist Autor der Bücher »Neudarstellung der Wärmelehre« (1972) und »Altlasten der Physik« (2002) (zusammen mit F. HERRMANN).

HANS HUMENBERGER – BERTHOLD SCHUPPAR

Die Mündchen des Hippokrates – nicht nur in rechtwinkligen Dreiecken

In den meisten Lehrgängen zur Elementargeometrie werden im Kapitel »Lehrsatz des Pythagoras« die Mündchen des Hippokrates erwähnt. Der folgende Aufsatz untersucht Verallgemeinerungen der Mündchen-Figuren auf spitzwinklige Dreiecke sowie Sehnenvierecke und leistet damit auch einen Beitrag zum Thema Variationen und Verallgemeinerungen im Mathematikunterricht.

1 Die Mündchen des Hippokrates in Dreiecken

Durch die Halbkreise über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks entstehen zwei mondsichelförmige Flächen mit der Eigenschaft:

Das rechtwinklige Dreieck ist genauso groß (Flächeninhalt!) wie die beiden Mündchen über den Katheten zusammen. Dies ist mittels des Satzes von Pythagoras leicht einzusehen:

$$F(\text{beide Mündchen}) = F(\Delta) + \frac{a^2 \pi}{8} + \frac{b^2 \pi}{8} - \frac{c^2 \pi}{8} = F(\Delta).$$

Dadurch inspiriert, könnte man nun zunächst die Frage stellen, ob es auch spitzwinklige Dreiecke gibt, deren Flächeninhalt genau der Flächeninhaltssumme ihrer jeweiligen drei Mündchen (zwischen den Seiten-

Halbkreisen nach außen und dem Umkreis) entspricht (Abbildung 2).

Dass dies eine Erweiterung der Hippokrates-Figur darstellt, sieht man sofort, wenn man sich zu dem rechtwinkligen Dreieck aus Abbildung 1 den vollen Umkreis ergänzt denkt: Der Umkreismittelpunkt liegt dann auf der Hypotenuse, sodass das dritte Mündchen zu einer flächeninhaltslosen Halbkreislinie entartet, und es gilt: Der Flächeninhalt des Dreiecks ist genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der drei Mündchen, die durch die Halbkreise nach außen und den Umkreis des Dreiecks entstehen.

Bemerkung: Wir beschränken uns deshalb auf spitzwinklige Dreiecke, damit die »inneren« Mündchenbegrenzungen durchgehend durch den Umkreis und nicht teilweise durch einen Seiten-Halbkreis gegeben

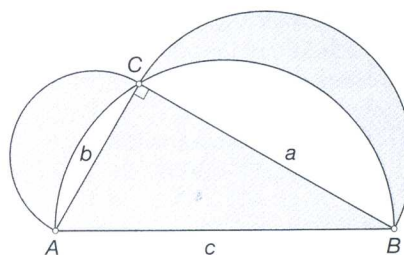


Abb. 1. Die Mündchen des Hippokrates

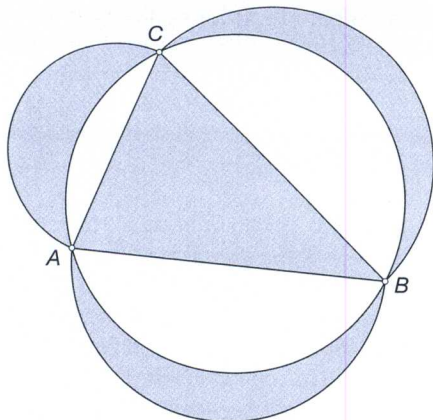


Abb. 2. Mändchen und spitzwinklige Dreiecke

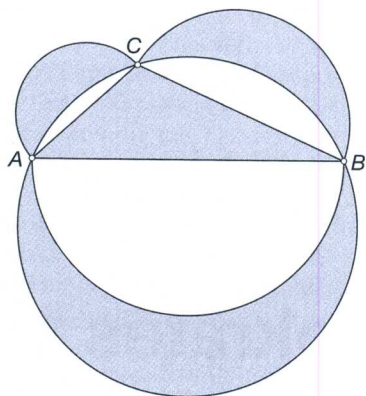


Abb. 3. Zur Beschränkung auf spitzwinklige Dreiecke

sind. Bei stumpfwinkligen Dreiecken ginge gerade diese Eigenschaft verloren und es entstünde eine wenig ansprechende Figur wie in Abbildung 3 (die innere weiße Fläche ist nicht mehr kreisförmig). Um solche Fälle wollen wir uns hier nicht kümmern.

Bei einem spitzwinkligen Dreieck gilt für die Summe der drei Mändchenflächeninhalte:

(M_i bezeichne das Mändchen i , D den Durchmesser des Umkreises)

$$F(M_1 + M_2 + M_3) = F(\Delta) + \frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8} + \frac{c^2\pi}{8} - \frac{D^2\pi}{4},$$

so dass $F(M_1 + M_2 + M_3) = F(\Delta)$

genau bei $\frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8} + \frac{c^2\pi}{8} = \frac{D^2\pi}{4}$

bzw. $a^2 + b^2 + c^2 = 2D^2$

gilt. Diese notwendige und hinreichende Bedingung könnte man auch Mändchenbedingung für Dreiecke nennen. (Bei rechtwinkligen Dreiecken mit Hypotenuse c ist diese Bedingung wegen $a^2 + b^2 = c^2 = D^2$ erfüllt.) Gibt es spitzwinklige Dreiecke mit dieser Eigenschaft? Wenn ja, welche? Wenn nein, warum nicht?

Es ist nicht schwierig, sich davon zu überzeugen, dass es (außer rechtwinkligen) keine Dreiecke mit $a^2 + b^2 + c^2 = 2D^2$ geben kann:

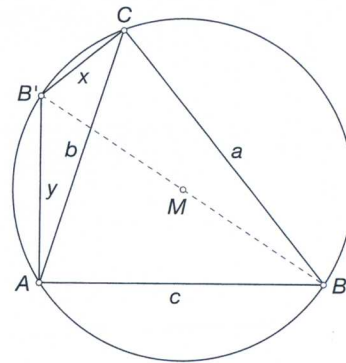


Abb. 4. Zum Beweis

Zum Beweis nehmen wir an, dass weder a noch c Durchmesser des Umkreises sind, und zeigen, dass dann b notwendig Durchmesser sein, das Dreieck also rechtwinklig sein muss!

Wir wählen B' so am Kreis, dass $|BB'| = D$ ist (Abbildung 4). B' ist z. B. durch eine Punktspiegelung von B an M (Mittelpunkt des Umkreises) zu erhalten.

Für die Sehnen $|CB'|$ und $|AB'|$ erhalten wir dadurch

$$|CB'|^2 = x^2 = D^2 - a^2$$

und $|AB'|^2 = y^2 = D^2 - c^2$ bzw. anders angeschrieben: $a^2 = D^2 - x^2$ und $c^2 = D^2 - y^2$. Setzen wir dies in die Mändchenbedingung ein, so erhalten wir $x^2 + y^2 = b^2$, woraus wir schließen können, dass das Dreieck ACB' rechtwinklig mit Hypotenuse b , und b daher Durchmesser sein muss.

2 Sehenvierecke und Mändchen

Da wir nun bei (nicht stumpfwinkligen) Dreiecken vollständig Bescheid wissen, drängt sich nun die Frage auf, wie nun die Situation bei Vierecken mit Umkreis, also bei Sehenvierecken ist:

Gibt es Sehenvierecke, deren Flächeninhalt genau der Flächeninhaltssumme ihrer jeweiligen vier Mändchen (zwischen den Seiten-Halbkreisen nach außen und dem Umkreis) entspricht (Abbildung 5)?

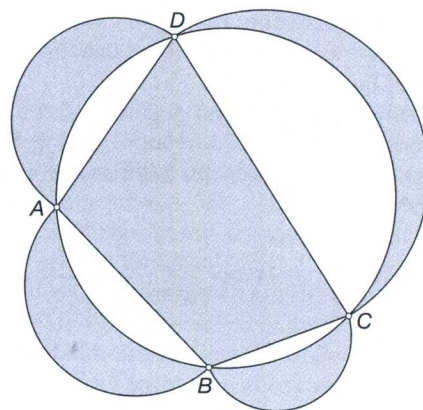


Abb. 5. Sehenvierecke und Mändchen

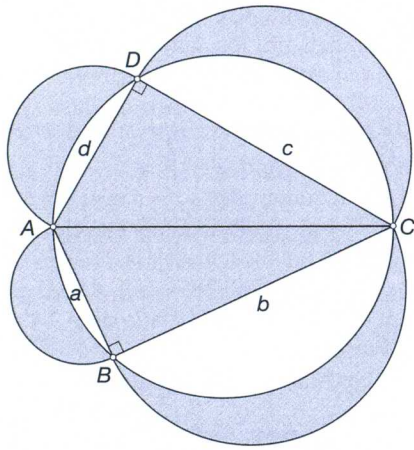


Abb. 6. Sehnenviereck vom Typ 1

Auch hier wollen wir uns auf Fälle beschränken, bei denen der Umkreis die innere Mündchenbegrenzung darstellt, die innere weiße Fläche also kreisförmig ist (d. h. der Umkreismittelpunkt liegt nicht außerhalb des Sehnenvierecks). Solche Sehnenvierecke wollen wir aus nahe liegenden Gründen Mündchenvierecke nennen.

Hier ist eine Antwort auf die obige Frage nach der Existenz solcher Vierecke nicht schwierig: klarerweise gibt es solche, z. B. sicher dann, wenn (mindestens) eine Diagonale Durchmesser ist, sodass eigentlich nur die doppelte Hippokrates-Situation vorliegt (zwei rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamem Umkreis). Solche Sehnenvierecke wollen wir Typ 1 nennen.

Bevor wir uns der Frage widmen, ob es außer Typ 1 noch andere Mündchenvierecke gibt, erarbeiten wir wieder eine notwendige und hinreichende Bedingung an ein Sehnenviereck, so dass es sich um ein Mündchenviereck handelt (Mündchenbedingung für Sehnenvierecke):

Wie bei den Dreiecken erhalten wir bei einem Mündchenviereck (mit analogen Bezeichnungen):

$$F(M_1 + M_2 + M_3 + M_4) = F(\text{Viereck}) + \frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8} + \frac{c^2\pi}{8} + \frac{d^2\pi}{8} - \frac{D^2\pi}{4},$$

sodass $F(M_1 + M_2 + M_3 + M_4) = F(\text{Viereck})$

$$\text{genau bei } \frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8} + \frac{c^2\pi}{8} + \frac{d^2\pi}{8} = \frac{D^2\pi}{4}$$

$$\text{bzw. } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2D^2$$

gilt. Diese notwendige und hinreichende Bedingung ist Mündchenbedingung für Sehnenvierecke. Bei Typ 1 ist sie wegen $a^2 + b^2 = D^2 = c^2 + d^2$ erfüllt: zwei rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenuse D .

Ausgehend von Typ 1 ($ABCD$) und von der Mündchenbedingung ist auch sofort klar, dass leicht ein weiterer Typ von Sehnenvierecken als Mündchenvierecke erkannt werden kann ($ABC'D$): In einem Mündchenviereck mit \overline{AC} als Durchmesser kann man ja z. B. die

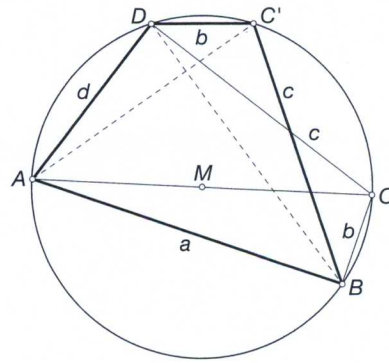


Abb. 7. Sehnenviereck vom Typ 2

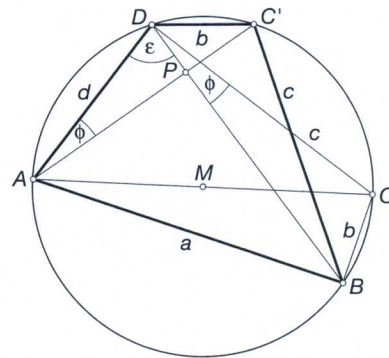


Abb. 8. Zum Beweis der Vermutung

Seiten b und c vertauschen, sodass A, B, D, a, d gleich bleiben und C zu C' wird. Damit ist die Mündchenbedingung zwar weiterhin erfüllt (es wurden ja nicht die Seitenlängen, sondern nur deren Reihenfolge verändert!), aber $\overline{AC'}$ ist kein Durchmesser mehr, sodass dabei sicher nicht Typ 1 vorliegt, sondern Typ 2 (Abbildung 7).

Was zeichnet nun diesen neuen Typ 2 eines Mündchenvierecks aus?

- 1) Durch Vertauschen zweier Seiten (z. B. b und c) werden aus Paaren von »Nachbarseiten« (a und b ; c und d) mit jeweiliger Quadratsumme D^2 zwei Paare von Gegenseiten mit derselben Eigenschaft!
- 2) Wie man schon in den Abbildungen 7 und 8 sieht, scheinen die beiden Diagonalen (gestrichelt) $\overline{AC'}$ und \overline{BD} normal aufeinander zu stehen.

Diese Vermutung lässt sich auch leicht beweisen (für einen ganz anderen Zugang siehe [1]):

Gegeben seien zwei Sehnenvierecke $ABCD$ und $ABC'D$ mit vertauschten Seiten b bzw. c .

Dann gilt: \overline{AC} ist Durchmesser $\Leftrightarrow \overline{AC'} \perp \overline{BD}$.

Beweis: Die beiden Winkel $|\angle(DAC')| = |\angle(BDC)| =: \phi$ sind gleich (Peripheriewinkel über Sehnen mit Länge b); wir definieren weiter: $|\angle(ADB)| =: \epsilon$.

Daher gilt: \overline{AC} ist Durchmesser $\Leftrightarrow D$ liegt auf dem Halbkreis über $\overline{AC} \Leftrightarrow |\angle(ADC)| = \epsilon + \phi = 90^\circ \Leftrightarrow |\angle(APD)| = 180^\circ - (\epsilon + \phi) = 90^\circ \Leftrightarrow \overline{AP} \perp \overline{PD} \Leftrightarrow \overline{AC'} \perp \overline{BD}$.

Wir haben bis jetzt also zwei Typen von Mündchenvierecken (Sehnenvierecke mit der Mündcheneigenschaft) gefunden:

Typ 1: Sehnenviereck, bei dem mindestens eine Diagonale Durchmesser ist; gleichbedeutend: $a^2 + b^2 = D^2 = c^2 + d^2$ oder $a^2 + d^2 = D^2 = b^2 + c^2$. (Quadratsumme von Nachbarseiten = D^2)

Typ 2: Typ 1 mit zwei vertauschten Seiten; gleichbedeutend: $a^2 + c^2 = D^2 = b^2 + d^2$ (Quadratsumme von Gegenseiten = D^2) gleichbedeutend: Sehnenviereck mit aufeinander senkrechten Diagonalen;

Bemerkungen: In beiden in Abbildung 7 und 8 fett eingezeichneten Typ 2-Vierecken sind die Seiten (um die Vertauschung ins Auge springen zu lassen) »der Reihe nach« mit a, c, b, d beschriftet. Bezeichnet man sie wieder – wie gewohnt – »der Reihe nach« mit a, b, c, d , so gilt klarerweise für die jeweilige Summe der Quadrate von Gegenseiten eines Typ 2-Vierecks: $a^2 + c^2 = D^2 = b^2 + d^2$.

Die beiden Typen schließen einander übrigens nicht aus: rechtwinklige Drachen (eine Diagonale ist Durchmesser; oder noch spezieller: Quadrate) sind sowohl vom Typ 1 als auch vom Typ 2.

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob es außer Typ 1 und 2 noch weitere Mönchenvierecke gibt. Auf der Suche nach solchen wird man bald vermuten, dass es keine weiteren mehr gibt, was natürlich nach einer Begründung verlangt.

Wir formulieren und zeigen dazu folgenden Satz:

Sei $ABCD$ ein Mönchenviereck, d. h. ein Sehnenviereck (Umkreismittelpunkt nicht außerhalb) mit der Mönchen-eigenschaft: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2D^2$.

(a, b, c, d sind die Seitenlängen, D ist der Durchmesser des Umkreises). Dann ist $ABCD$ vom Typ 1 oder vom Typ 2.

Beweis: Nach Voraussetzung liegt ein Sehnenviereck vor (Umkreismittelpunkt nicht außerhalb) mit

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2D^2 (*)$$

1. Fall: Wenn \overline{BD} Durchmesser ist, so ist das Viereck vom Typ 1 $a^2 + d^2 = D^2 = b^2 + c^2$.

2. Fall: \overline{BD} ist kein Durchmesser. Dann haben wir mit (*) zu zeigen, dass

- (2a) \overline{AC} Durchmesser ist (Typ 1: $a^2 + b^2 = D^2 = c^2 + d^2$),

oder

- (2b) Typ 2 vorliegt, d. h. $a^2 + c^2 = D^2 = b^2 + d^2$ bzw. anders ausgedrückt: es handelt sich um ein Sehnenviereck, das durch Vertauschen zweier Seiten aus Typ 1 entstanden ist.

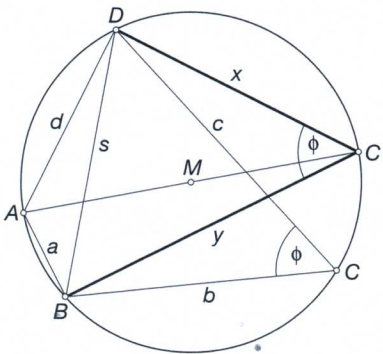


Abb. 9. Zum Beweis des Satzes

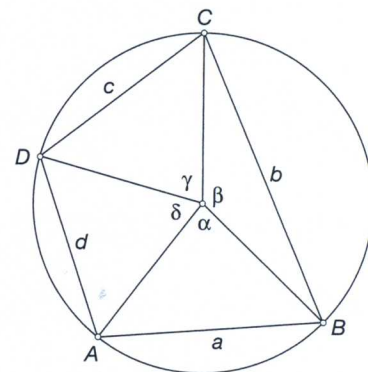


Abb. 10. Alternativer Beweis mittels Trigonometrie

Wir wählen C' so am Kreis, dass $\overline{AC'}$ Durchmesser und $ABC'D$ daher ein Sehnenviereck vom Typ 1 ist; dann wissen wir aufgrund des Peripheriewinkelsatzes und wegen $|BD| =: s \neq$ Durchmesser, dass $|\angle(BCD)| = |\angle(BC'D)| =: \phi \neq 90^\circ$ ist.

Wir setzen $|DC'| =: x$ und $|BC'| =: y$.

Unser Ziel ist zu zeigen, dass $x = c$ und $y = b$ (d. h. Fall 2a mit $C' = C$; Typ 1 mit $|AC|$ als Durchmesser); oder

$x = b$ und $y = c$ ist (d. h. Fall 2b; Typ 2: $ABCD$ geht durch Vertauschen der Seiten b und c aus dem Typ 1-Viereck $ABC'D$ hervor).

Weil $|\overline{AC'}|$ Durchmesser ist, folgt $d^2 = D^2 - x^2$ und $a^2 = D^2 - y^2$.

Setzen wir dies in die Voraussetzung (*) ein, so erhalten wir:

$$b^2 + c^2 = x^2 + y^2 \quad (1)$$

In den Dreiecken BCD und $BC'D$ erhalten wir mit dem Kosinussatz

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \phi = s^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \phi,$$

woraus mit (1) und $\phi \neq 90^\circ$ (d. h. $\cos \phi \neq 0$) folgt:

$$b \cdot c = x \cdot y \quad (2)$$

Aus (1) + 2 · (2) erhalten wir wegen $b, c, x, y > 0$ sofort (1'): $b + c = x + y$, so dass wir das folgende Gleichungssystem zu lösen haben:

$$b + c = x + y \quad (1')$$

$$b \cdot c = x \cdot y \quad (2)$$

Die Umformung $c \cdot (1') - (2)$ ergibt zunächst $c^2 = cx + cy - xy$, woraus man durch Ausklammern $(x - c) \cdot (y - c) = 0$ erhält. Daraus ergibt sich notwendig (mindestens) einer der beiden Fälle (2a) $x = c$ und $y = b$ oder (2b) $y = c$ und $x = b$, womit alles gezeigt ist.

Ein weiterer Beweis ergibt sich durch reine trigonometrische Rechnung, wenn man die Mönchenbedingung entsprechend umformt:

Verbindet man den Umkreismittelpunkt M mit allen vier Ecken, so erhält man vier gleichschenklige Dreiecke; die Winkel bei M seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (α liegt der Seite a gegenüber, usw. vgl. Abbildung 10). Der Kosinussatz in jedem Dreieck liefert

$$a^2 = 2R^2 (1 - \cos \alpha), \quad b^2 = 2R^2 (1 - \cos \beta), \quad \text{usw.}$$

Durch Addition dieser vier Gleichungen wird aus der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2D^2$ die äquivalente Bedingung

$$2R^2(4 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma - \cos \delta) = 2D^2 = 8R^2$$

$$\Leftrightarrow 8R^2 - 2R^2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta) = 8R^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta = 0}$$

Fasst man nun die Kosinuswerte paarweise mit der bekannten Summenformel zusammen, so ergibt sich daraus:

$$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \cos \frac{\gamma + \delta}{2} \cos \frac{\gamma - \delta}{2} = 0$$

Nun ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$, also $\frac{\gamma + \delta}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$ und damit $\cos \frac{\gamma + \delta}{2} = -\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, sodass die obige Gleichung äquivalent ist zu:

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\gamma - \delta}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0 \text{ oder } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \frac{\gamma - \delta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ \text{ oder } \left(\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\gamma - \delta}{2} \text{ oder } \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{\gamma - \delta}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 180^\circ \text{ (Fall 1) oder } \alpha + \delta = \gamma + \beta \text{ (Fall 2a) oder } \alpha + \gamma = \beta + \delta \text{ (Fall 2b)}$$

Somit liegt im Fall 1 ein Mündchenviereck vom Typ 1 vor (mit Durchmesser $|\overline{AC}|$), ebenso im Fall 2, denn die Summe aller vier Winkel beträgt 360° , also ist $\alpha + \delta = 180^\circ$ (Durchmesser $|\overline{BD}|$). Im Fall 2b haben wir ein Viereck vom Typ 2, denn durch »Vertauschen« zweier benachbarter Winkel, z. B. α und β , erhält man wiederum ein Mündchenviereck vom Typ 1.

Es gibt also wirklich nur die beiden genannten Typen von Mündchenvierecken!

Literatur

- [1] W. WINZEN: Vier Mündchen – Wanderungen eines Achsenkreuzes. in: Didaktik der Mathematik 17, 1, 19–26, 1989.

Dr. HANS HUMENBERGER, IEEM, FB Mathematik, Universität Dortmund, D-44221 Dortmund, hans.humenberger@math.uni-dortmund.de und Dr. BERTHOLD SCHUPPAR, IEEM, FB Mathematik, Universität Dortmund, D-44221 Dortmund, berthold.schuppar@math.uni-dortmund.de, sind als Privatdozent bzw. Studienrat im Hochschuldienst in der Lehrerbildung das Fach Mathematik an der Universität Dortmund tätig. ■

WOLFGANG TYSIAK

Lineare Unabhängigkeit als Informationsmaß

Der durchaus nicht einfache Begriff der linearen Abhängigkeit bzw. linearen Unabhängigkeit wird meist über die Darstellung eines Vektors als Pfeilklassse eingeführt. Hier soll der Begriff nun als Maß für den Informationsgehalt von Daten eingeführt werden. Die Loslösung vom Verständnis eines Vektors als Pfeilklassse in der Ebene oder im Raum soll dabei ganz bewusst vollzogen werden. Bei der weiter fortschreitenden DV-Durchdringung der täglichen Umwelt sollten Matrizen eher als Dateien und Vektoren eher als Datensätze oder als Felder einer Datei verstanden werden.

1 Ein erstes Beispiel: Altersstruktur in Haushalten

Nehmen wir einmal an, eine Kommune möchte die Altersstruktur der Haushalte eines Gebietes in Erfahrung bringen, um in der zukünftigen Planung die Angebote

für spezielle Altersgruppen besser berücksichtigen zu können (z. B. Kinderspielplätze, Kindergärten, Schulen, Jugendheime). Daher werden ausgewählte Haushalte hinsichtlich der Altersstruktur der angehörenden Personen befragt. Es ergibt sich beispielsweise die in Tabelle 1 dargestellte Datei.

Ein Blick auf die Tabelle 1 lässt erkennen, dass man einen guten Eindruck über die Altersstruktur der Haushalte erhält. Auf der anderen Seite stellt man aber auch fest, dass gar nicht alle Spalten der Datei benötigt werden. Sicherlich macht es in der Praxis durchaus Sinn, alle Spalten zu erheben, da man dann auch Konsistenzprüfungen zur Validierung der Daten vornehmen kann, aber letztendlich hat man zuviel gefragt. Welche Felder der Datei werden aber denn nun benötigt? Der sicherlich einfachste Ansatz ist sicherlich, die Spalten (2), (4), (5) und (6) zu wählen. Dann ergeben sich die weiteren Spalten mittels

$$(1) = (2) + (4) + (5) + (6) \text{ und } (3) = (4) + (5) + (6).$$