

# Der Satz von Thales als Spezialisierungshilfe bei einem elementargeometrischen Problem

von Hans Humenberger

## Einleitende Bemerkung

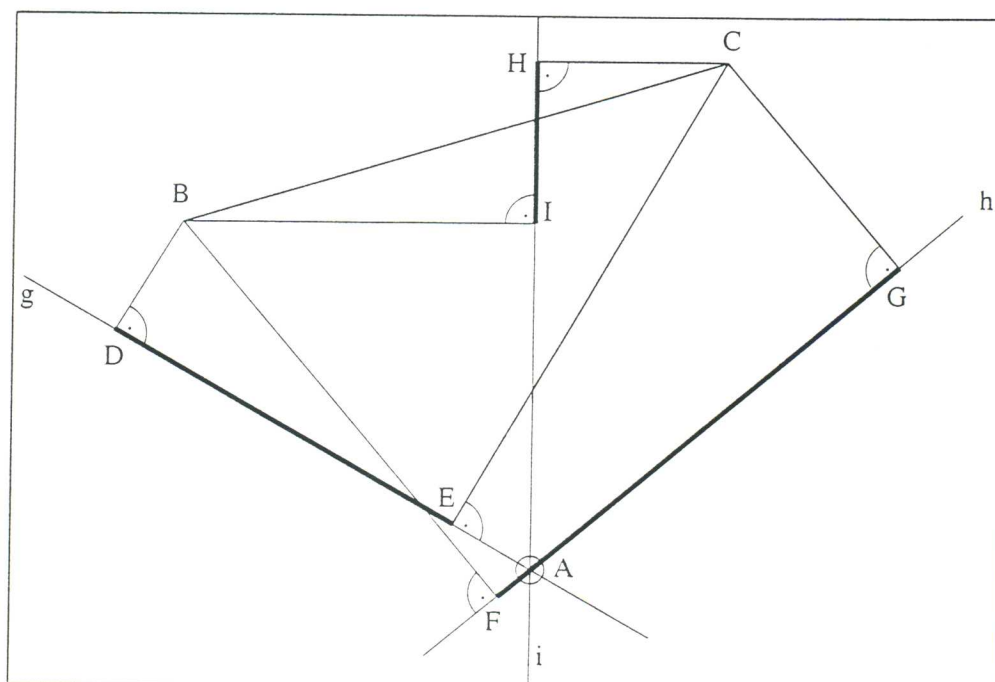
Es gibt viele Aufgaben in der Mathematik, die von Lehrern (und auch Schülern<sup>1</sup>) oft als besonders „schön“ empfunden werden, weil deren Lösung eine besonders elegante bzw. trickreiche ist (auch wir geben uns dieser Faszination oft hin). Für den schulischen Alltag sind u. E. jedoch Aufgaben wert- und reizvoller, deren Lösung einem zwar nicht sofort ins Auge springt, bei denen aber auch für zumindest durchschnittlich begabte Schüler, die i. a. keine zündenden und neuen Lösungsstrategien entwerfen können, eine Lösungschance besteht: durch Probieren, Vermuten, Ausdauer, Nachdenken, Betrachten von Spezialfällen usw. Die involvierte Mathematik darf dabei nicht zu komplex sein, die ganze Problemsituation muss überschaubar sein und darf nicht nur durch einen eleganten Trick gemeistert werden können. Diese relativ hohen Ansprüche an *Problemstellungen* sind noch dazu subjektiv und führen dazu, dass solche Beispiele für die Lehrer nicht im Überfluss zu finden sind. Wir meinen, dass das folgende jedoch so eines ist und hoffen, dass auch einige Leser diese Meinung mit uns teilen.

## Aufgabenstellung

*Gegeben seien ein beliebiger Punkt A und eine beliebige Strecke BC in der Ebene. Wir interessieren uns für alle möglichen Lagen des Scheitels eines rechten Winkels mit folgender Eigenschaft: Der eine Schenkel geht durch den gegebenen Punkt A, und der andere Schenkel hat mindestens einen Punkt mit der gegebenen Strecke BC gemeinsam.*

Die meisten werden – vor dieses Problem gestellt – zunächst eine Skizze der Art von Abbildung 1 machen.

**Abb. 1:**  
Erste Skizze der Problemsituation



Das heißt, man wird eine beliebige Strecke BC zeichnen und einen Punkt A. Weiter wird man nun vielleicht eine beliebige Gerade g (oder h bzw. i) durch A zeichnen und die bei den jeweiligen Richtungen möglichen Lagen eines Scheitels mit den geforderten Eigenschaften ausfindig machen: Wir fällen das Lot von B und C auf die Gerade g (h bzw. i) und erhalten zwei Punkte D und E (F und G bzw. H und I). Die Strecke DE (FG bzw. HI – einschließlich der jeweiligen Randpunkte) ist nun der geometrische Ort der möglichen Scheitellagen, wenn die Richtung eines Schenkels durch g (h bzw. i) vorgegeben ist. Aber wo ist der geometrische Ort *aller* möglichen Scheitellagen?

Sehr gute Schüler werden vielleicht auch ohne Betrachtung von Spezialfällen weiterkommen und die richtige Lösung finden (indem sie z. B. die Verbindungen AB und AC einzeichnen und den Zusammenhang mit den darüber zu errichtenden Thaleskreisen selbstständig erkennen). Aber können dies auch durchschnittlich begabte Schüler? Ein guter Hinweis, der noch nicht allzuviel verrät, wäre hier u. E.: „Probiere es mit ganz speziellen Lagen von A, B und C zueinander!“. So auf eine weiterführende Schiene gebracht, haben auch durchschnittliche Schüler wieder eine Chance, der Lösung zumindest näher zu kommen (Sehen des Zusammenhanges mit Thaleskreisen), auch wenn sich für sie in ihren bisherigen Skizzen und Versuchen kein erfolgversprechender Weg abgezeichnet hat.

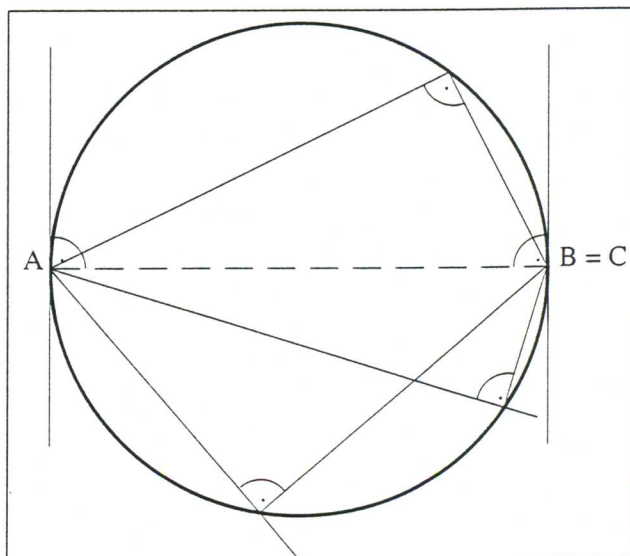
### Erster Fall

Die speziellste Lage, die es in diesem Zusammenhang gibt, ist jene, bei der A, B und C in einem Punkt zusammenfallen. Es bedarf wohl keiner weiteren Erläuterungen und keiner Skizze, dass dann der mögliche Bereich für mögliche Scheitellagen auf den gegebenen Punkt  $A = B = C$  zusammenschrumpft (alle einander in  $A = B = C$  rechtwinklig schneidenden Geradenpaare bilden mögliche Schenkel).

### Zweiter Fall

Die nächst einfache bzw. -spezielle Situation ist jene, bei der zwar nicht alle drei Punkte zusammenfallen, sondern nur zwei. Betrachten wir zuerst jenen Fall, bei dem die Strecke BC weiterhin zu einem Punkt  $B = C$  entartet bleibt, aber  $A \neq B = C$  gilt. Zu jeder beliebig vorgegebenen Geraden durch A gibt es dann genau eine Gerade, die senkrecht auf der vorgegebenen steht und durch  $B = C$  geht. Für jede vorgegebene Richtung erhalten wir somit genau einen Punkt als „Lösung“ (Scheitel des rechten Winkels).

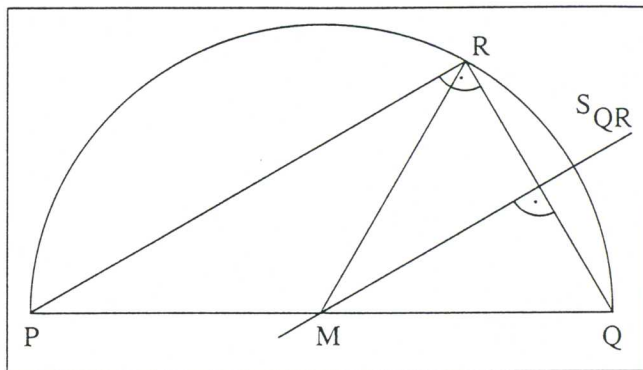
Alle diese möglichen Scheitelpunkte bilden mit A und  $B = C$  ein rechtwinkliges Dreieck, weshalb sie auf dem Thales-Kreis über  $AB = AC$  liegen müssen<sup>2</sup> (vgl. Abbildung 2). In diesem Fall ist also der geometrische Ort aller möglichen Scheitellagen der Thales-Kreis (die Kreislinie, nicht die Kreisfläche) über  $AB = AC$ .



**Abb. 2: Spezialfall  $B = C$  (D die Strecke ist zu einem Punkt entartet.)**

*Bemerkung:*

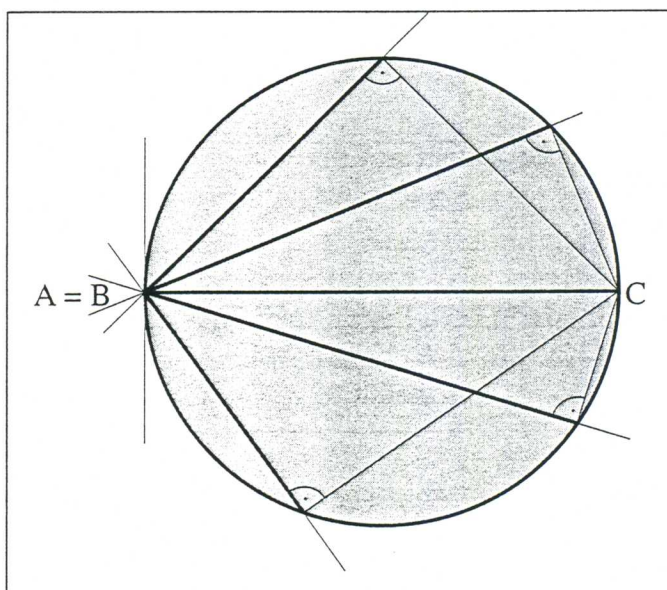
Hier geht genau genommen die Umkehrung des Satzes von Thales ein, nämlich dass – salopp formuliert – *jeder rechte Winkel am Halbkreis liegt*. Meist wird in der Schule nur die andere Richtung bewiesen (*jeder Winkel am Halbkreis ist ein rechter* – wohl weil diese vermeintlich leichter zu beweisen oder wichtiger sei), *verwendet* wird jedoch bei geometrischen Beweisen und Konstruktionen zumindest ebensohäufig um nichts nachsteht (analog zum allgemeinen Peripheriewinkelsatz<sup>3</sup>). Der Beweis der Umkehrung ist aber sicher auch nicht anspruchsvoller: Zeichnet man in einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck PQR (rechter Winkel bei R – vgl. hierzu Abbildung 3) die Streckensymmetrale einer Kathete (beispielsweise jene von QR, also  $s_{QR}$ ) und schneidet diese mit der Hypotenuse PQ (Schnittpunkt M), so ist M aufgrund des Strahlensatzes der Mittelpunkt der Hypotenuse, und außerdem gilt  $MQ = MR$ , womit gezeigt ist, dass R auf dem Halbkreis über PQ liegen muss!



**Abb. 3: Umkehrung des Thales-Satzes**

### Dritter Fall

Wie sieht nun die Lage aus, wenn eine nichtentartete Strecke vorliegt (also  $B \neq C$ ) und A mit einem der Streckenendpunkte zusammenfällt (z. B.  $A = B$ )? Hier erhalten wir zum ersten Mal einen „flächigen“ Bereich mit Dimension 2 als den geometrischen Ort der gesuchten Scheitellagen – in den ersten beiden Fällen war ja die Dimension des „Lösungsbereiches“ nur 0 (Punkt) bzw. 1 (Kreislinie). Legen wir eine Gerade mit beliebiger Richtung durch A, so können wir feststellen, dass wir jeweils eine ganze Strecke als mögliche Scheitelpunkte erhalten (vgl. Abbildung 4).



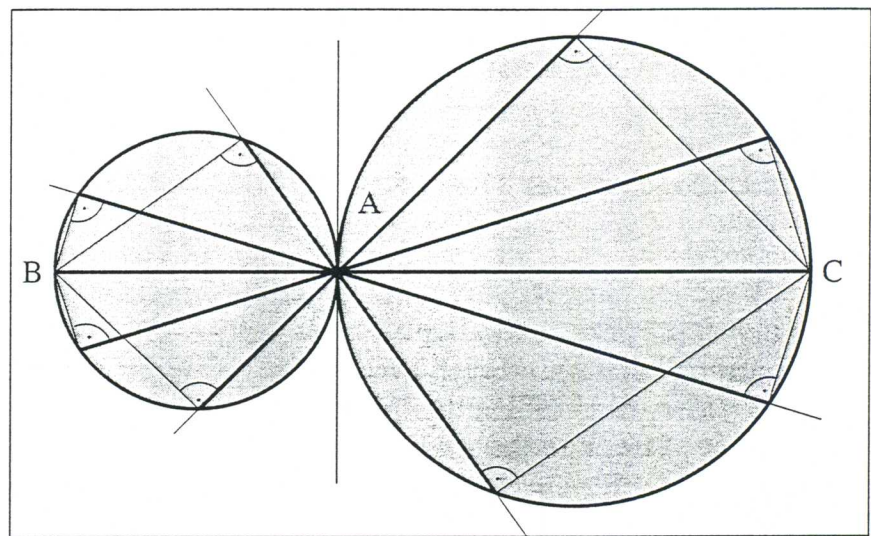
**Abb. 4: Kreisfläche noch als Lösung**

Die Strecke ist jeweils durch  $A = B$  und durch den anderen Schnittpunkt der Geraden mit vorgegebener Richtung mit dem Thales-Kreis über  $AC = BC$  begrenzt. In einem einzigen Fall entartet die „Lösungsstrecke“ zu einem Punkt, nämlich dann, wenn die vorgegebene Gerade durch A senkrecht auf  $AC = BC$  ist ( $\rightarrow$  Tangente des Thales-Kreises in  $A = B$ ). Daraus ist leicht zu ersehen, dass hier die Lösung die abgeschlossene Fläche des Thales-Kreises über  $AC = BC$  ist! In Abbildung 4 und in den folgenden sind Strecken, die als Lösung in Frage kommen (also *Abschnitte* von Geraden vorgegebener Richtungen im *Lösungsbereich*) und die Ränder der Lösungsbereiche jeweils fett gezeichnet. Der Thales-Kreis war nun schon zweimal ein gutes Mittel zur Beschreibung

der Lösung, in diesem Stadium wird man also nicht mehr so leicht von ihm ablassen, und wir werden sehen, dass in jedem Fall Thales-Kreise bei der Beschreibung des Lösungsbereiches anwendbar sind.

### Vierter Fall

Nun betrachten wir den Fall, dass keine zwei Punkte zusammenfallen. Wir brauchen uns jedoch noch nicht mit dem ganz allgemeinen Fall zu beschäftigen (wer will, soll dies natürlich tun), sondern wir nehmen zunächst an, dass A auf der durch BC gehenden Geraden liege, und zwar – speziell – zwischen B und C, also auf der Strecke BC. Mit dem schon erworbenen Wissen sollten die Schüler auch diesen Fall selbstständig lösen können. Analog zum Fall 3 gibt es auch hier zu jeder Geraden vorgegebener Richtung durch A eine Strecke, auf der die Scheitelpunkte liegen (vgl. Abbildung 5). Die Endpunkte dieser Strecken werden diesmal jedoch von zwei verschiedenen Thales-Kreisen bestimmt, jenem über AB und jenem über AC. Bei genau einer Geraden durch A (normal zu BC) entartet die Lösungstrecke wieder zu einem Punkt (A): Ein Schenkel ist dann BC und der andere normal dazu durch A ( $\rightarrow$  Tangente an beide Thales-Kreise im Punkt A).

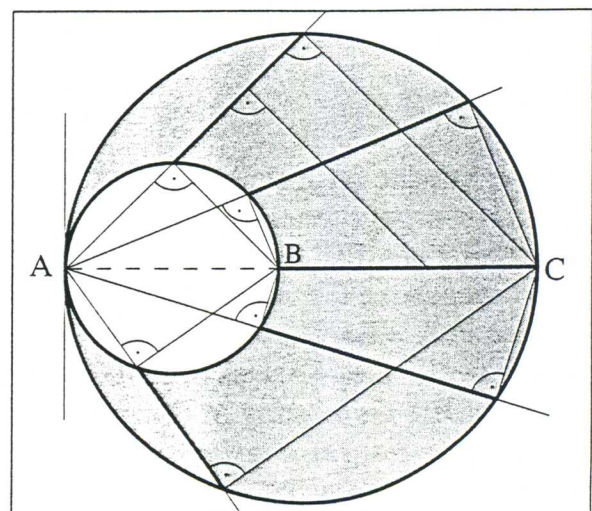


**Abb. 5: A liegt auf der Strecke BC**

Wir können also formulieren, dass hier die „Lösungsfläche“ (geometrischer Ort der möglichen Scheitellagen) aus zwei einander in A (von außen) berührenden, abgeschlossenen Kreisflächen besteht!

### Fünfter Fall

Nun soll A zwar auf der Geraden durch BC liegen, aber außerhalb der Strecke BC. Wiederum völlig analog zu Fall 4 gibt es auch hier zu jeder Geraden vorgegebener Richtung durch A eine Strecke, auf der die Scheitelpunkte liegen (vgl. Abbildung 6). Die Endpunkte dieser Strecken werden offenbar von den beiden Thales-Kreisen über AB und AC bestimmt, die einander diesmal von innen berühren. Bei genau einer Geraden durch A (normal zu BC) entartet die Lösungstrecke wieder zu einem Punkt (A).

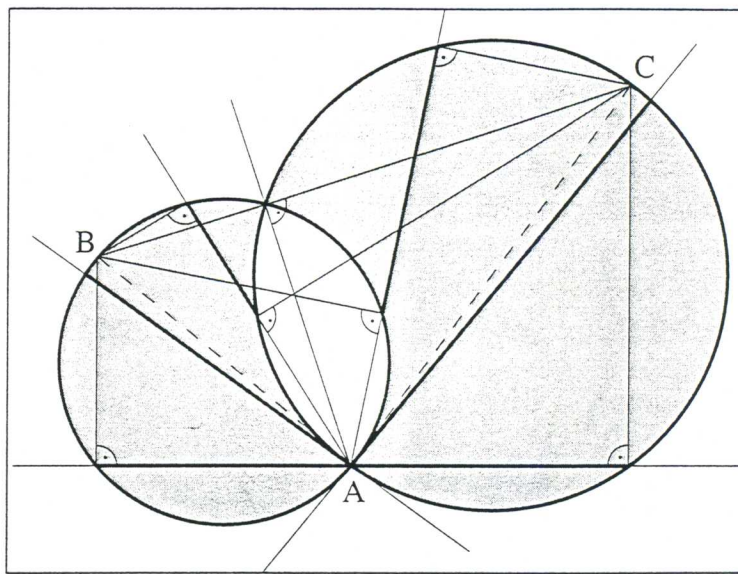


**Abb. 6: A liegt außerhalb der Strecke BC, aber auf der Geraden durch BC**

Als Lösungsbereich erhalten wir erneut eine Fläche, die durch die beiden Thales-Kreise über AB und AC bestimmt ist. Es ist die Vereinigung der abgeschlossenen Fläche, die sich aus der Differenz der beiden Kreisflächen ergibt, und der beiden Ränder (Kreislinien), die mit zur Lösungsmenge gehören..

### Sechster Fall – der allgemeine Fall

Nun liege der Punkt A nicht auf der durch die Strecke BC festgelegten Geraden, also z. B. so wie in unserer ersten Skizze (Abbildung 1). Mit dem Wissen, das wir uns in den einzelnen Spezialfällen erworben haben, liegt nun die Lösung auf der Hand. Wir zeichnen wiederum die Thales-Kreise über den Verbindungsstrecken AB und AC und sehen, dass die Lösungsstrecken zu Geraden vorgegebener Richtung durch A von den Thaleskreisen begrenzt werden (vgl. Abbildung 7). Zu jeder vorgegebenen Richtung durch A existiert eine „Lösungsstrecke“ (mögliche Scheitellagen); bei genau einer dieser Richtungen (normal auf BC) entartet die Lösungsstrecke abermals zu einem Punkt (Höhenfußpunkt von A auf BC bzw. zweiter<sup>4</sup> Schnittpunkt der beiden Thales-Kreise über AB und AC).



**Abb. 7: Der allgemeine Fall:**  
 $B \neq C$  und  $A \notin g(BC)$

Die beiden Thales-Kreise schneiden einander in A und in jenem Punkt der Strecke BC, der durch das Lot von A auf BC bestimmt wird (selbstständige Begründung durch die Schüler). Sollte das Dreieck ABC bei B oder C stumpfwinklig sein, d. h. das Lot (die Höhe) von A auf BC trifft die Gerade g (BC) außerhalb der Strecke BC, dann ändert sich prinzipiell gar nichts, so dass wir hier von der separaten Besprechung dieses Falles absehen wollten; wir veranschaulichen die Situation nur in Abbildung 8.

### Zusammenfassung der Lösungen

Wir überlegen nun, ob es eine gemeinsame Beschreibungsmöglichkeit der Lösungen der besprochenen Fälle gibt. Ausgehend vom allgemeinen Fall können wir feststellen:

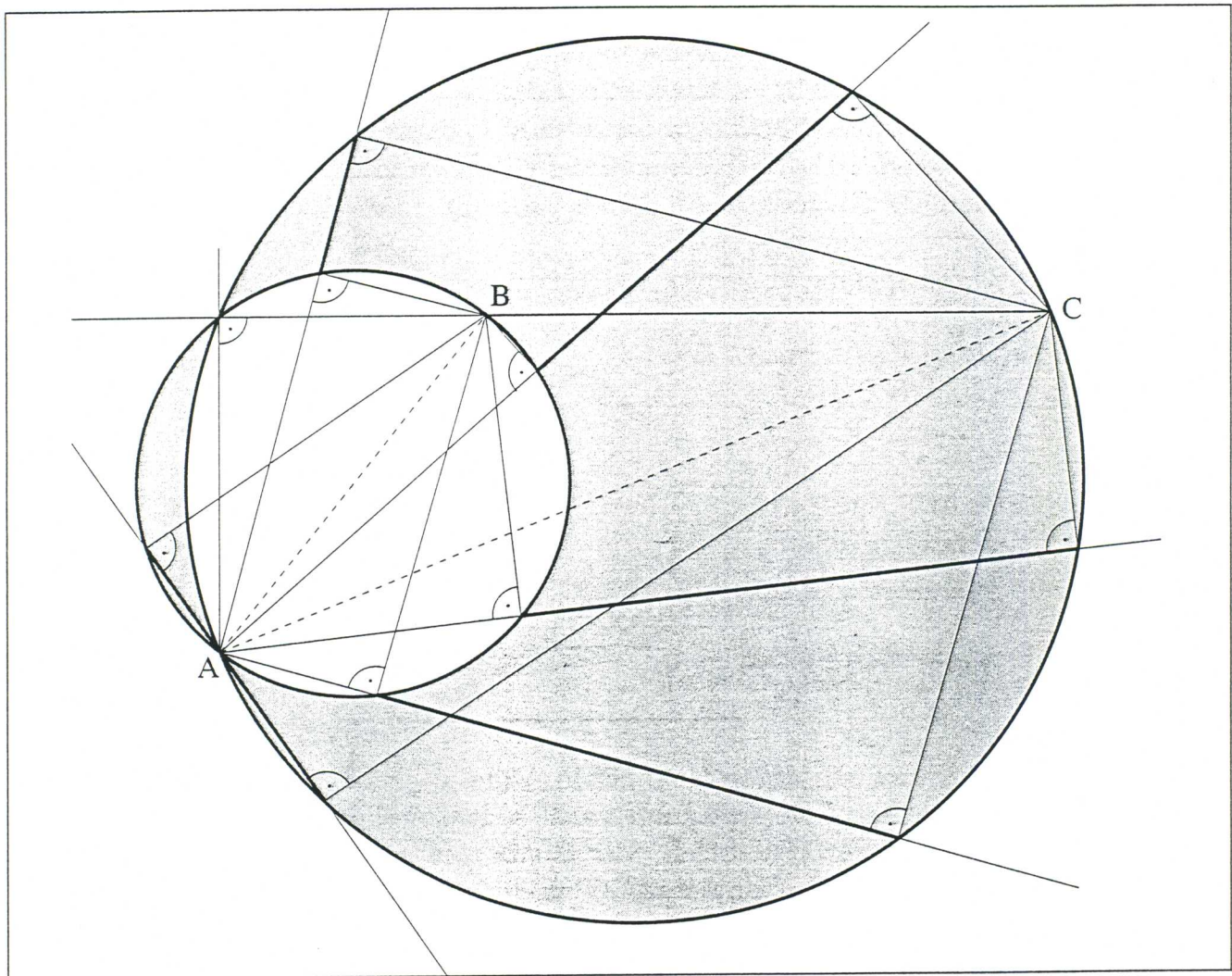
Der geometrische Ort der Scheitel von rechten Winkeln mit der Eigenschaft, dass ein Schenkel durch einen gegebenen Punkt A geht und der andere Schenkel mindestens einen Punkt gemeinsam mit einer gegebenen Strecke BC hat, ist gegeben durch

1. die beiden Kreislinien der Thales-Kreise über AB und AC und
2. all jene Punkte innerhalb dieser Kreise, die zum einen, nicht aber zum jeweils anderen gehören. Die Punkte des *offenen* Durchschnitts der beiden Kreisflächen gehören also nicht zur Lösungsfläche!

Es handelt sich in jedem Fall um eine abgeschlossene Lösungsfläche, die man auch durch

$$(\overline{K_{AB}} \cup \overline{K_{AC}}) \setminus (K_{AB}^{\circ} \cap K_{AC}^{\circ})$$

beschreiben könnte, wobei  $\overline{K_{AB}}$  die abgeschlossene Kreisfläche des Thales-Kreises über AB und  $K_{AB}^{\circ}$  die zugehörige offene Kreisfläche (ohne Rand) bedeuten soll.



**Abb. 8: Der allgemeine Fall:  $B \neq C$ ,  $A \notin g(BC)$ , das Lot von A auf die Gerade  $g(BC)$  liegt außerhalb der Strecke BC**

Man überlegt sich leicht, dass diese Beschreibung auch auf alle anderen besprochenen Spezialfälle passt, womit wir die Lösung des Problems zur Gänze erarbeitet haben.

## Anmerkungen

- 1 Zum Beispiel von Schülern der Mathematik-Olympiade.
- 2 Dies ist sicher auch für „nur durchschnittliche“ Schüler zu entdecken.
- 3 Der vollständige Beweis des Peripheriewinkelsatzes samt seiner Umkehrung ist aufgrund der nötigen Fallunterscheidungen doch ziemlich komplex und wird daher – u. E. zu Recht – oft nur anhand *eines* Falles durchgeführt. Auf Formulierung und Beweis der Umkehrung wird bisweilen jedoch leider gänzlich verzichtet.
- 4 Neben A selbst.