Berührende Kugeln – ein Aufgabenfeld für selbstständiges Problemlösen durch Schüler

HANS HUMENBERGER

1 Problemlösen und (Elementar-)Geometrie

In den letzten Jahren ist ein deutlicher Bedeutungsverlust der Geometrie im Schulunterricht festzustellen, was Inhalten wie Stochastik, Analysis, Anwendungsbezügen im Allgemeinen usw. sicher genützt hat. Nach den Erfahrungen des Verfassers ist es aber gerade die Geometrie, die bei vielen Schülern eine gewisse Faszination auszulösen imstande ist, insbesondere im Bereich des Problemlösens.

Im Schuljahr 1997/98 hatten wir einen Vorbereitungskurs auf die Mathematik-Olympiade zu halten. Von den Schülern hörten wir im Verlauf des Kurses öfters Sätze folgender Art: „Machen wir doch wieder Geometrie, da kann man so schön Skizzen machen, Vermutungen aufstellen, sich konkret was vorstellen; sie ist irgendwie lebendiger als das Lösen von Gleichungen oder Ungleichungen." Nach einer langen geometrischen Einführungsphase hatten wir nämlich die Geometrie verlassen und einige Zeit den Themen *Gleichungen, Ungleichungen, zahlentheoretische Überlegungen, vollständige Induktion* gewidmet.

Für ein effizientes und sinnvolles *Problemlösen* sollten mindestens zwei Voraussetzungen erfüllt sein:

(1) Die Schüler müssen dabei *selbst* aktiv sein! Es nützt wenig, wenn der Lehrer – in vielleicht sogar guter Absicht – den Schülern die Tätigkeit des Problemlösens nur vormacht und die Schüler nicht selbstständig Vermutungen aufstellen, Ideen einbringen, Irrwege beschreiten, argumentieren, probieren, diskutieren etc.

(2) Die Schüler müssen dementsprechend Interesse, Engagement und Wissensdurst mitbringen, um eventuelle „Durststrecken" durchzustehen, um hartnäckig zu bleiben in ihren Lösungsversuchen, nicht aufzugeben, sich nicht entmutigen zu lassen. Das „Selbst-es-wirklich-Wollen" spielt eine große Rolle für die (zumindest größtenteils) selbstständige Lösung.

Durch Zwang lassen sich diese Voraussetzungen allerdings nur in seltenen Fällen schaffen. Weil aber ein gewisser Zwang doch integrativer Bestandteil des normalen Mathematikunterrichts – zumindest in Österreich und wir glauben auch in Deutschland – ist, so bleibt ausgedehnteres Problemlösen wohl meist Kursen mit Freiwilligen (wie eben z. B. den erwähnten Vorbereitungskursen zur Mathematik-Olympiade) vorbehalten.

Das den folgenden Betrachtungen zugrunde liegende Problem haben wir Schülern eines 11. Jahrgangs gestellt – und zwar in einer „Supplierstunde" (Freistunde). Für die Schüler geschah dies völlig unvorbereitet (sie machten mit ihrer Klassenlehrerin in Mathematik gerade etwas ganz anderes), aber der Großteil der Klasse war von dieser Aufgabe fasziniert und hat – völlig freiwillig, es war ja keine normale Unterrichtsstunde – die ganze Zeit an diesem Problem mit unterschiedlichem Erfolg gearbeitet.

Ein Vorteil des betrachteten Themenkreises ist, dass die Probleme keine isolierten Einzelaufgaben darstellen. Oft wird beim Problemlösen ja moniert, dass nach der Lösung die Sache erledigt sei, aber gerade nicht ganz so gute Schüler ein Üben an verwandten (nicht gleichen!) Problemen nötig hätten.

2 Das Problem und zwei mögliche Einstiegsaufgaben

Ausgangspunkt ist folgendes elementargeometrisches Problem, auf das der Autor von Herrn Dr. Richard MISCHAK aufmerksam gemacht wurde:

> Auf einer ebenen Tischplatte liegen vier Kugeln, die alle einander berühren (gemeint ist: paarweise Berührung). Drei davon haben den Radius R. Welchen Radius hat die vierte Kugel?

Es ist dies eine sehr schöne und interessante Aufgabe[1], die in einem Olympiade-Kurs oder einfach mit Interessierten und Freiwilligen – sicher auch ohne vorherige anderweitige Überlegungen – gestellt werden kann. Interessierte Leser mögen hier die Lektüre unterbrechen und das Problem bearbeiten (*Lösung:* $\frac{R}{3}$).

Da dieses Problem von vielen Schülern wahrscheinlich nicht spontan gelöst werden kann, sollten vorher zu obigem ähnliche – etwas einfachere, aber den Kern der Sache schon enthaltende – Probleme besprochen werden. Besonders für den normalen Klassenunterricht scheint uns eine etwas leichtere Einstiegsaufgabe angebracht zu sein, da dort im Durchschnitt die Raumvorstellung oder (bzw. und) die Problemlösefähigkeiten vielleicht nicht hinreichend ausgeprägt sind und durch Überforderung beim selbstständigen Problemlösen oftmals auch Frustrationen entstehen können. „Lieber elementarer, dafür wirklich selbstständig!“ – so könnte u. E. das Motto für das Problemlösen im Klassenverband (insbesondere in den Anfangsphasen) lauten. Als eine mögliche Form der Vorbereitung könnten wir uns die im Folgenden angeführten Aufgaben vorstellen.

Erste Voraufgabe (Einstiegsproblem 1)

Eine Kugel mit Radius R liege am waagerechten Boden eines Zimmers „bei“ einer Wand (sie berühre diese senkrechte Wand). Wie groß kann der Radius r einer (kleineren) Kugel maximal sein, so dass diese gerade noch zwischen Wand, Boden und gegebener Kugel durchgeschoben werden kann?

Das an sich räumliche (Kugel-)Problem ist mittels eines geeigneten Schnittbildes in ein ebenes Kreisproblem zu übertragen (Fig. 1). Bei dieser Voraufgabe muss das räumliche Vorstellungsvermögen noch nicht allzusehr ausgeprägt sein, so dass hier wohl den meisten Schülern klar ist, welchen Schnitt man zu betrachten hat. Eben deswegen (und wegen der einfachen und vielfältigen anschließenden Lösungsmöglichkeiten) erscheint sie uns als Einstieg besonders geeignet.

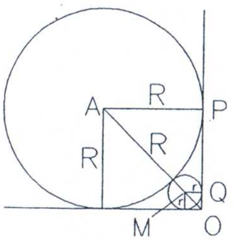

Fig. 1: Kugeln berühren einander sowie Boden und Wand

Lösungen

Es gibt mehrere Möglichkeiten der Lösung, wobei deren *selbstständige* Entdeckung durch die Schüler im Vordergrund stehen sollte. Zwei mögliche Lösungswege seien hier herausgegriffen:

- Aus dem Quadrat mit der Diagonale $\overline{OA}$ in Fig. 1 ergibt sich direkt
$$r\sqrt{2} + r + R = R \cdot \sqrt{2}$$
und daraus sofort
$$r = R \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = R\,(3 - 2\sqrt{2}) \approx R \cdot 0{,}17\,.$$
- Mit Hilfe der ähnlichen Dreiecke OPA und OQM erhält man
$$R : r = (r\sqrt{2} + r + R) : r\sqrt{2}$$
und daraus unmittelbar eine Darstellung für r.

Zweite Voraufgabe (Einstiegsproblem 2)

Zwei gleich große Kugeln mit Radius R liegen auf einer Tischplatte und berühren einander. Wie groß kann der Radius r einer (kleineren) Kugel maximal sein, so dass diese gerade noch zwischen Tischplatte und den beiden gegebenen einander berührenden Kugeln durchgeschoben werden kann?

Lösung

Auch zur Lösung dieser Aufgabe muss zunächst eine geeignete Schnittebene gefunden werden (räumliches Vorstellungsvermögen). Das ist ebenfalls noch relativ leicht (s. Fig. 2), führt aber schon zum Ausgangsproblem.

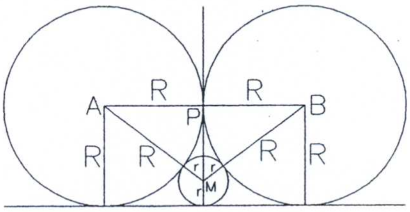

Fig. 2: Zwei einander berührende Kugeln (Radius R) auf einer Tischplatte

Nun sollte das rechtwinklige Dreieck AMP ins Auge springen. Alle Seitenlängen dieses Dreiecks lassen sich sehr leicht ausdrücken:

- $|\overline{AM}| = R + r$
  (Die Kugeln bzw. Kreise berühren einander.)
- $|\overline{PM}| = R - r$
  (P liegt genau über M und auf derselben Höhe wie A bzw. B.)

Mit $|\overline{AP}| = R$ und Anwenden des pythagoreischen Lehrsatzes im rechtwinkligen Dreieck AMP ergibt sich
$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + R^2\,.$$
Hieraus erhalten wir als Lösung des Problems:
$$r = \frac{R}{4}$$
Dies ist ein numerisch wesentlich schöneres (einfacheres) Resultat als das der ersten Voraufgabe. (Dass der gesuchte kleine Kugelradius hier genau ein Viertel des gegebenen Kugelradius beträgt, mag ein zusätzlicher Ansporn sein zu untersuchen, wie die Verhältnisse beim ursprünglichen Problem liegen.)

Lösung des ursprünglichen Problems

Zur Erinnerung sei die Problemstellung noch einmal notiert:

Auf einer ebenen Tischplatte liegen vier Kugeln, die einander paarweise berühren. Drei davon haben den Radius R. Welchen Radius hat die vierte Kugel?

Aus dieser Situationsbeschreibung muss man zunächst erkennen, wie die Kugeln überhaupt liegen können bzw. müssen (der Anspruch an das räumliche Vorstellungsvermögen wird also schon etwas höher).

Nach kurzer Überlegung findet man heraus, dass die drei gleich großen Kugeln (bzw. deren Mittelpunkte) ein gleichseitiges Dreieck bilden müssen und die vierte Kugel in dem von diesen eingeschlossenen Hohlraum liegen und daher kleiner sein muss – darin besteht schon eine wesentliche Erkenntnis! Drei Billardkugeln (oder andere Kugeln) können gute Dienste bei der selbstständigen Entwicklung und Begründung dieser Erkenntnis leisten. Ein Grundrissbild der entsprechenden Situation ist in Fig. 3a dargestellt.

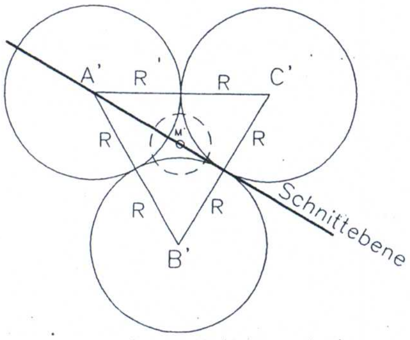

Fig. 3a: Drei einander berührende Kugeln (Radius R) „im gleichseitigen Dreieck", darunter liegende kleinere Berührkugel (Grundriss)

Eine weitere wichtige Erkenntnis ist die folgende: Aus Symmetriegründen muss der Grundriss M' (des Mittelpunktes M der gesuchten kleinen Kugel) im Symmetriezentrum des gleichseitigen Dreiecks $A'B'C'$ mit Seitenlänge $2R$ liegen.

Ein Grundriss ist jedoch ungeeignet, die Berührung der kleinen Kugel mit den drei größeren darzustellen, so dass man gezwungen ist, andere Darstellungen heranzuziehen. Am besten ist natürlich ein Schnittbild, in dem die Kugelberührung als Kreisberührung erscheint. Aufgrund der Symmetrie genügt es, stellvertretend eine der drei großen Kugeln zu betrachten und ihre Berührung mit der kleineren darzustellen, z. B. durch jene Schnittebene normal zur Tischplatte, die durch die beiden Kugelmittelpunkte A und M geht (Fig. 3b). Im Grundriss erscheint diese Ebene als Gerade durch A' und M' (in Fig. 3a nachträglich eingezeichnet).

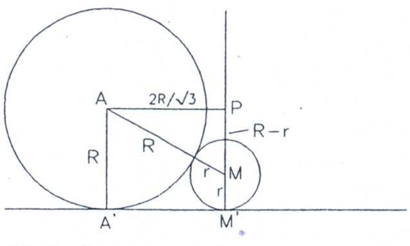

Fig. 3b: Schnittebene durch die beiden Kugelmittelpunkte, in der die Kugelberührung einer Kreisberührung entspricht

Analog zum vorigen Problem sollte nun in Fig. 3b wieder das rechtwinklige Dreieck AMP betrachtet werden. Zwei Seitenlängen dieses Dreiecks erhalten wir wie folgt:

- $|\overline{AM}| = R + r$
  (Die Kugeln bzw. Kreise berühren einander.)
- $|\overline{PM}| = R - r$
  (P liegt genau über M und auf derselben Höhe wie A.)

Jetzt fehlt nur noch ein Ausdruck für die dritte Seitenlänge $|\overline{AP}|$. Diese ist sicher genauso groß wie $|\overline{A'M'}|$, und die wiederum ist aus der Grundrissdarstellung (Fig. 3a) zu erhalten. Da die Streckenlänge $|\overline{A'M'}|$ zwei Drittel der Höhe ausmacht (Umkreisradius des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $2R$), erhalten wir:

$$|\overline{AP}| = |\overline{A'M'}| = \frac{2}{3} \cdot \frac{2R}{2}\sqrt{3} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Der Übergang zu einer geeigneten Schnittdarstellung und das Verwenden (Bedenken) der Tatsache $|\overline{A'M'}| = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ ist wahrscheinlich der schwierigere Teil der Lösung. Die erneute Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes dürfte dann kaum noch Schwierigkeiten bereiten. Gemäß Fig. 3b erhält man:

$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2$$

Als Lösung ergibt sich hieraus:

$$r = \frac{R}{3}$$

Wir sehen, dass sich wiederum ein einfacher numerischer Zusammenhang zwischen R und r ergeben hat, wobei von vornherein klar war, dass der Wert von r in dieser Aufgabe größer als in obiger Voraufgabe sein muss $\left(\frac{R}{3} > \frac{R}{4}\right)$.

3 Nahe liegende Verallgemeinerungen des Problems

In Sachen *Kugeln mit Radius R auf einer Tischplatte und „darunter liegende Kugel" mit Radius r* haben wir in den beiden Fällen

- zwei einander berührende Kugeln mit Radius R;
- drei Kugeln mit Radius R in einem regelmäßigen (gleichseitigen) Dreieck einander (paarweise) berührend angeordnet

mit $r = \frac{R}{4}$ bzw. $r = \frac{R}{3}$ jeweils numerisch einfache Resultate gefunden, was a priori nicht unbedingt zu erwarten war.

Nun liegt es natürlich nahe, sich noch für weitere Lagen (Anordnungen von mehr als drei Kugeln) zu interessieren.

Vier Kugeln – Quadrat

Vier Kugeln mit Radius R liegen in einem regelmäßigen Viereck (Quadrat) einander (nicht mehr paarweise) berührend angeordnet[2] auf einer Tischplatte. Wie groß ist der Radius r jener Kugel, die ebenfalls auf der Tischplatte liegt und die vier gegebenen Kugeln berührt?

Bei der Lösung dieses Problems gehen wir völlig analog zum oben betrachteten Fall mit drei Kugeln vor und erstellen zunächst eine Grundrissskizze (Fig. 4a).

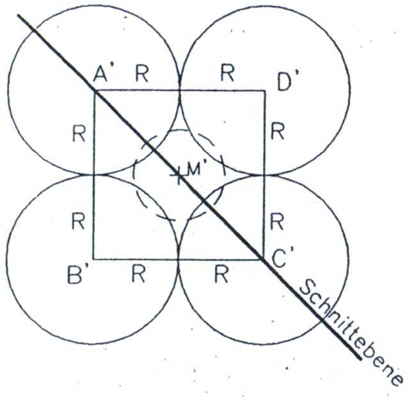

Fig. 4a: Vier einander berührende Kugeln (Radius R) „im Quadrat", darunter liegende kleinere Berührkugel (Grundriss)

Wiederum muss M', der Grundriss des Mittelpunktes M der fraglichen Kugel, aus Symmetriegründen im Mittelpunkt des Quadrates $A'B'C'D'$ liegen. Daraus ergibt sich für $|\overline{A'M'}|$ als Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge R unmittelbar

$$|\overline{A'M'}| = R \cdot \sqrt{2},$$

wobei wir diese Beziehung in Fig. 4b verwenden.

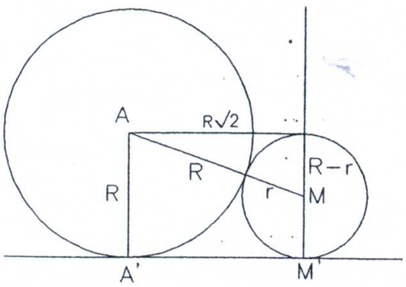

Fig. 4b: Schnittebene durch die Kugelmittelpunkte A und M (Kugelberührung → Kreisberührung)

Nach dem pythagoreischen Lehrsatz erhalten wir

$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + (R \cdot \sqrt{2})^2$$

mit dem (numerisch abermals sehr einfachen) Resultat

$$r = \frac{R}{2}.$$

Fünf oder sechs Kugeln – regelmäßiges Fünfeck bzw. Sechseck

Fünf (sechs) Kugeln mit Radius R liegen in einem regelmäßigen Fünfeck (Sechseck) einander berührend angeordnet auf einer Tischplatte. Wie groß ist der Radius r jener Kugel, die auch auf der Tischplatte liegt und die fünf (sechs) gegebenen Kugeln berührt?

Wir betrachten zunächst das regelmäßige **Fünfeck** und setzen die Formel für den Umkreisradius u_5 voraus.[3] Bei bekannter Seitenlänge s_5 gilt:

$$u_5 = \frac{s_5}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$$

Hieraus erhält man eine Darstellung für die Streckenlänge $|\overline{A'M'}|$ (diese entspricht ja dem Umkreisradius u_5 bei Seitenlänge $s_5 = 2R$; s. Fig. 5a).

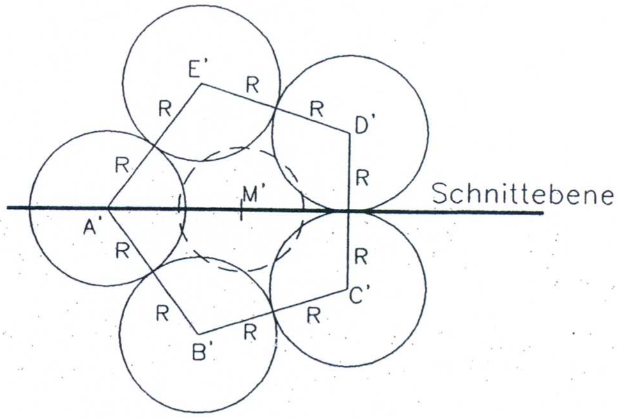

Fig. 5a: Fünf einander berührende Kugeln (Radius R) „im regelmäßigen Fünfeck" angeordnet, darunter liegende kleinere Berührkugel (Grundriss)

Nach kurzer Vereinfachung ergibt sich:

$$u_5 = |\overline{A'M'}| = R \cdot \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

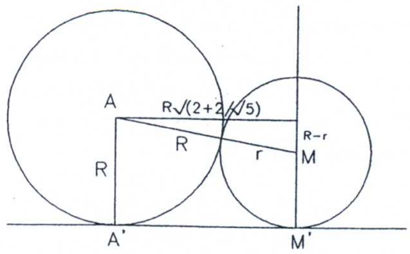

Fig. 5b: Schnittebene durch die Kugelmittelpunkte A und M (Kugelberührung → Kreisberührung)

Unter Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes in Fig. 5b kommen wir damit zu

$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + \left(R \cdot \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}\right)^2$$

Anordnung berührt jede Kugel ihre jeweiligen zwei Nachbarkugeln). Wie groß ist der Radius r der zu diesem Gebilde gehörigen Umkugel?

Lösung: $r = R(1+\sqrt{2})$

Bemerkung: Eine mögliche Grundrissskizze entspräche der Fig. 7 (s. unten) ohne die fünf kleinen Kreise.

• Vier gleich große Kugeln mit Radius R liegen auf einer Tischplatte, so dass ihre Mittelpunkte ein Quadrat mit Seitenlänge $2R$ bilden. Um diese vier Kugeln denken wir uns ihre zugehörige Umkugel (für deren Radius siehe vorige Aufgabe). Berechne den Radius r jener Kugel, die die vier ursprünglichen Kugeln von außen und deren Umkugel von innen berührt (also der Kugel, die gerade noch in die Umkugel zusätzlich hineingepackt werden kann).

Lösung: $r = R$

Bemerkung: Da innerhalb der Umkugel auf „der anderen Seite" der vier ursprünglichen Kugeln noch einmal eine Kugel von Radius R „Platz hat", kommt man zu dem bekannten Resultat der sechs oktaederförmig angeordneten Kugeln mit Radius R innerhalb einer Kugel mit Radius $R(1+\sqrt{2})$.

• *Aufgabe Januar 2000* von Dr. MISCHAK (in *http://www.zahlenjagd.at*):
Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C und den Seitenlängen a, b, c (auf einer „Tischplatte"). Drei Kugeln mit den Radien R_A, R_B, R_C liegen auf dem Tisch, so dass sie einander paarweise und die Tischplatte jeweils in den Punkten A, B, C berühren. Man bestimme R_A, R_B, R_C in Abhängigkeit von a, b, c.

Lösung: $R_A = \dfrac{bc}{2a}$, $R_B = \dfrac{ac}{2b}$, $R_C = \dfrac{ab}{2c}$

• Der kreisförmige Querschnitt eines Kabels ist idealisiert in Fig. 7 wiedergegeben. In diesem Kabel laufen vier Hauptdrähte mit Querschnittradius R, wobei diese quadratisch-berührend im Kabel angeordnet sind. Berechne den Querschnittradius R_k des ganzen Kabels.

Lösung: $R_k = R(1+\sqrt{2})$

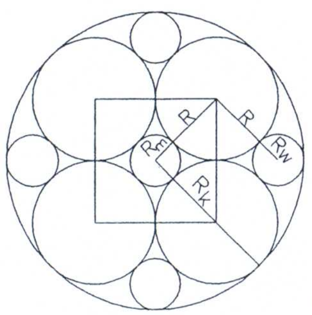

Fig. 7: Querschnitt eines Kabels

In diesem Kabel könnte man noch fünf weitere kleinere Drähte unterbringen: einen in der Mitte (Querschnittradius R_m) und vier symmetrisch am Rand zwischen den Hauptdrähten und der Kabelinnenwand (Querschnittradius R_w). Berechne die Querschnittradien R_m und R_w.[5)]

Lösung: $R_m = R_w = R(\sqrt{2}-1)$

• Vier gleich große Kugeln mit Radius R berühren einander paarweise (wie müssen diese Kugeln dann liegen?). Wie groß ist der Radius r_u der zu diesem Gebilde gehörigen Umkugel?

Zur zuletzt genannten Aufgabe sei stichwortartig ein Lösungsweg angegeben. Die Kugeln (genauer deren Mittelpunkte) müssen ein regelmäßiges Tetraeder mit Kantenlänge $2R$ bilden. Denkt man sich drei Kugeln auf einer Platte liegend, so liegt die vierte „in der Mitte auf diesen". Eine Grundrissskizze ist in Fig. 8a dargestellt, wobei von oben schon bekannt ist: $|\overline{A'D'}| = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ (dieser Entfernung entspricht $|\overline{AP}|$ in Fig. 8b).

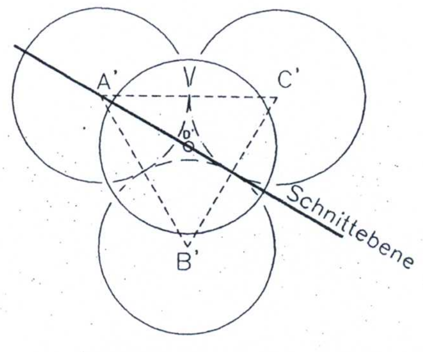

Fig. 8a: Vier paarweise einander berührende Kugeln (Radius R) „im regelmäßigen Tetraeder" angeordnet (Grundriss)

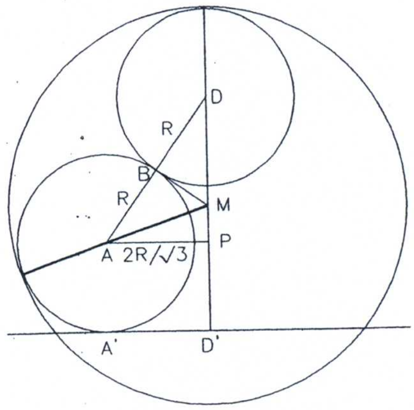

Fig. 8b: Schnittebene durch die Kugelmittelpunkte A und D (Kugelberührung → Kreisberührung)

Wegen $|\overline{AP}| = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ und $|\overline{AD}| = 2R$ erhalten wir im rechtwinkligen Dreieck APD nach Satz des PYTHAGORAS:

$$|\overline{PD}| = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

und damit zur Lösung:

$$r = R \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) \approx R \cdot 0{,}72$$

Beim Fünfeck haben wir also ein weniger einfaches Verhältnis zwischen R und r erhalten.

Sind dagegen sechs Kugeln mit Radius R in einem regelmäßigen **Sechseck** angeordnet, so ergibt sich der denkbar einfachste Zusammenhang zwischen R und dem Radius r der Mittenkugel.

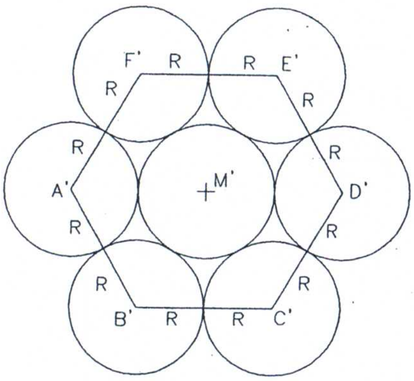

Fig. 6: Sechs einander berührende Kugeln (Radius R) im „regelmäßigen Sechseck" und gleich große Mittenkugel (Grundriss)

Ohne weiteren Kommentar (die Mittenkugel ist genau so groß wie die sechs gegebenen Kugeln) ergibt sich aus Fig. 6 die Beziehung

$$r = R\,.$$

Verallgemeinerung

Bei zwei, drei, vier und sechs Kugeln ist der Radius r der „Mittenkugel" durch die besonders einfachen Terme $\frac{R}{4}, \frac{R}{3}, \frac{R}{2}$ bzw. R gegeben! In allen betrachteten Fällen (auch für $n = 5$) hat letztlich ein und derselbe Ansatz – Anwenden des pythagoreischen Lehrsatzes nach vorheriger Bestimmung des Umkreisradius (Streckenlänge $|\overline{A'M'}|$) eines regelmäßigen n-Ecks mit Seitenlänge $2R$ – zum Ziel geführt.

Kennen wir eine Formel für den Umkreisradius u_n eines regelmäßigen n-Ecks mit Seitenlänge $2R$ in der Form

$$u_n = R \cdot k\,,$$

wobei k eine bekannte Konstante (bestimmter Wurzelausdruck) ist[4], so haben wir in jedem Fall die Beziehung $u_n = |\overline{A'M'}| = R \cdot k$. Damit ergibt sich durch Anwenden des pythagoreischen Lehrsatzes zunächst

$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + (R \cdot k)^2$$

und daraus schließlich

$$r = R \cdot \frac{k^2}{4}$$

als Formel für den Radius der Mittenkugel, die die Tischplatte und die einander berührend in einem regelmäßigen n-Eck angeordneten Kugeln (Radius R) berührt. In den oben betrachteten Fällen $n = 2, 3, 4, 5, 6$ lauteten die entsprechenden k-Werte: $1, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$ und 2.

Bemerkung. Für die Fälle $n < 6$ gilt $r < R$, und beim regelmäßigen Sechseck ($n = 6$) ist $r = R$.

Für Fälle $n > 6$ ergäbe sich $r > R$, d. h., die berührende Mittenkugel wäre in diesen Fällen größer als die „n-Eck-Kugeln". So ist für $n = 8$ (acht Kugeln mit Radius R im regelmäßigen Achteck)

$$r = R\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx R \cdot 1{,}71\,,$$

und bei $n = 10$ (zehn Kugeln mit Radius R im regelmäßigen Zehneck) ergibt sich

$$r = R \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx R \cdot 2{,}62\,.$$

4 Einige weitere (verwandte) Probleme

- Zwei gleich große Kugeln (Radius R) berühren einander. Des Weiteren seien diese beiden Kugeln mittels ihrer zugehörigen Umkugel „zusammengepackt". Berechne den Radius r jener Kugel, die die beiden ursprünglichen Kugeln von außen und deren Umkugel von innen berührt (also der Kugel, die gerade noch zusätzlich in die Umkugel hineingepackt werden kann).

Lösung: $r = R \cdot \frac{2}{3}$

- Drei gleich große Kugeln mit Radius R berühren einander paarweise. Wie groß ist der Radius r der zu diesem Gebilde gehörigen Umkugel?

Lösung: $r = R\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

- Drei gleich große Kugeln mit Radius R berühren einander paarweise. Des Weiteren seien diese drei Kugeln mittels ihrer zugehörigen Umkugel „zusammengepackt" (für deren Radius siehe vorige Aufgabe). Berechne den Radius r jener Kugel, die die drei ursprünglichen Kugeln von außen und deren Umkugel von innen berührt (also der Kugel, die gerade noch in die Umkugel zusätzlich hineingepackt werden kann).

Lösung: $r = R\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

- Vier gleich große Kugeln mit Radius R liegen auf einer Tischplatte, so dass ihre Mittelpunkte ein Quadrat mit Seitenlänge $2R$ bilden (in dieser quadratischen

Daraus ergibt sich auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke APD und BMD bzw. AMB:

$$|\overline{AM}| = |\overline{MD}| = R \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Zu dieser Streckenlänge ist noch R zu addieren, so dass wir für den Radius r_u der Umkugel zu folgender Lösung kommen:

$$r_u = R\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

Anmerkungen

1) Eine besonders nette sprachliche Einkleidung der Aufgabe („erzählerische Verpackung" von Dr. O. FRITSCHE) findet sich als *Knobelei des Monats Februar 1999* auf der Internetseite von „Spektrum der Wissenschaft" unter *http://www.spektrum.de/raetsel.html.*

2) Jede Kugel berührt nur mehr noch ihre unmittelbaren Nachbarkugeln.

3) Finden bzw. Begründen dieser Formel – wenn man sie nicht einfach in einer Formelsammlung nachschlägt – wäre ein eigenes Problem.

4) In Formelsammlungen z. B. noch für das 8- bzw. 10-Eck zu finden.

5) R_w ist etwas schwieriger zu berechnen als R_m bzw. R_k.

Carl Friedrich GAUSS: Gehirn der „Rechenmaschine" bis ins Detail untersucht

Göttingen (dpa/fwt) – Fast eineinhalb Jahrhunderte nach seinem Tod haben Wissenschaftler das Gehirn des genialen Astronomen und Mathematikers Carl Friedrich GAUSS (1777 bis 1855) erforscht. Der Sohn eines Tagelöhners gilt als Begründer der modernen Zahlentheorie. Er entwickelte den Heliographen zum Fotografieren der Sonne und den elektromagnetischen Telegrafen. Seine Arbeiten zur Physik und Erdvermessung sind weltberühmt – jedes Kind kennt das Antlitz des Göttinger Gelehrten von den Zehn-Mark-Scheinen.

Die Wissenschaftler untersuchten das Gehirn, das zu den größten Schätzen der Göttinger Universitätssammlung gehört, mit einem Kernspin-Tomographen. Dabei fanden sie heraus, dass GAUSS bis ins hohe Alter geistig hellwach war. Auch interessierte die Experten, ob das ursprünglich 1492 Gramm schwere Hirn anatomische Besonderheiten aufweist, die GAUSS' ungewöhnliche Begabung erklären können – die Forscher wurden allerdings nicht fündig.

GAUSS war am 23. Februar 1855 um 01.02 Uhr in der Göttinger Sternwarte gestorben, die er seit 1807 leitete. Einen Tag später gab sein Sohn Josef die Erlaubnis „zur sorgfältigen Zergliederung des Gehirns und zu einer weiteren Benutzung und Bekanntmachung".

Anders als bei Albert EINSTEIN, dessen Hirnmasse in den USA in 240 kleine Stücke zerteilt worden war, fertigten die Pathologen vom GAUSS-Hirn jedoch nur einen Gipsabdruck an. Seitdem ist das in Formalin eingelegte Präparat im Besitz der Universität. „Das GAUSSsche Gehirn ist nie aufgeschnitten oder anderweitig beschädigt worden, sondern ist bis heute in einwandfreiem Zustand erhalten", sagt Prof. Jens FRAHM, Geschäftsführer der gemeinnützigen *Biomedizinischen NMR Forschungs-GmbH* am Max-Planck-Institut für biophysikalische Chemie.

Dort wurde die Magnetresonanz-Tomographie (MRT) angefertigt, die Lage, Anatomie und Funktionen einzelner Hirnpartien sowie mögliche krankhafte Abweichungen darstellt. „Ein wesentlicher Vorteil ist, dass die Untersuchung zerstörungsfrei ist und Ergebnisse in digitaler Form liefert, die fast unbegrenzt archiviert und kopiert werden können", erklärt FRAHM. Mit dem schonenden MRT-Verfahren sind unter anderem auch die Körperhüllen der ägyptischen Pharaonen oder der im Eis gefundene „Ötzi"-Leichnam untersucht worden.

Von der GAUSSschen Hirnmasse wurden 526 verschiedene dreidimensionale Datensätze erstellt. Diese Aufnahmen belegen, dass er nicht an Altersdebilität litt. „Es lassen sich keine unmittelbaren Anzeichen für degenerative Veränderungen finden, wie sie etwa durch die ALZHEIMERsche Krankheit oder durch Verkalkung der Gefäße hervorgerufen werden", sagt Andreas FREWER vom Institut für Ethik und Geschichte der Medizin. Der Tod des Theoretikers gehe auch nicht auf eine Gehirnblutung oder eine traumatische Schädigung zurück. Auf dem Totenschein war „Brustwassersucht" (Lungenödem) notiert worden. GAUSS hatte zuvor über Kurzatmigkeit und Herzprobleme geklagt. Tatsächlich erlag er wahrscheinlich einem Herzversagen.

Eine anatomische Erklärung für die herausragenden intellektuellen Fähigkeiten des Naturwissenschaftlers liefern die Daten jedoch nicht. „Es kann festgestellt werden, dass das GAUSSsche Hirn nicht die beim EINSTEINschen Hirn gefundene Besonderheit einer fehlenden Gehirnwindung aufweist", sagt Neurologe FREWER. Manche Wissenschaftler hätten diesen Mangel (parietales Operculum) als Indiz für EINSTEINS besondere Intelligenz gedeutet.

Dagegen wendet Prof. Folker HANEFELD von der Neuropädiatrischen Uniklinik in Göttingen ein, dass bei Kindern mit pathologischen Veränderungen in dieser Hirnregion bestimmte Sprachentwicklungsstörungen auftreten. Es spreche vieles dafür, dass die bei EINSTEIN gefundene Abweichung eher mit seiner bekannten frühkindlichen Sprachentwicklungsstörung als mit seiner Genialität als Physiker zu tun habe, meint HANEFELD. Bei der Analyse des GAUSSschen Hirns gibt es nach Ansicht der Experten keine Zweifel – das Genie hatte ein normales, anatomisch gesehen „durchschnittliches" Gehirn.

Der sechsfache Vater galt als Pedant. Frauen verunglimpften ihn als „Uhu von Braunschweig", andere Zeitgenossen schätzten seine Aufrichtigkeit und Bescheidenheit. Viele seiner Entdeckungen hielt das Genie geheim, weil er sie nur vollendet veröffentlichen wollte. Der in Braunschweig geborene und als Einzelkind aufgewachsene GAUSS litt Zeit seines Lebens an Depressionen. Seine außergewöhnliche Begabung bedrückte ihn. NIETZSCHE schrieb von der in der Kindheit „geplatzten Genie-Ader, die den Knaben verseuchte und dem armen Mann so zu schaffen machte". Voller Mitgefühl sprach EINSTEIN von der „nicht abstellbaren Rechenmaschine GAUSS", die erst durch den Tod habe zur Ruhe finden können.

Tim Braune

Quelle: *dpa-Wissenschaftsdienst Nr. 6 vom 07. 02. 2000*