Hans HUMENBERGER, Dortmund

Wölbung einer Brücke — verschiedene Modelle

Problem: *(„Wölbung einer Brücke")*
Eine 2 km lange waagrechte Brücke (aus z. B. Stahl oder Stahlbeton) sei an den beiden Enden unbeweglich „festgemacht" (siehe Abb. 1). Bei einem Temperaturzuwachs von etwas mehr als 40° [1] *dehnt sich jeder Meter um ca. 0,5 mm (die ganze Brücke also um ca. 1 m), und die Brücke wird dadurch nach „oben gekrümmt". Um wieviel wird dabei der höchste Punkt D gehoben werden* [2]*?*

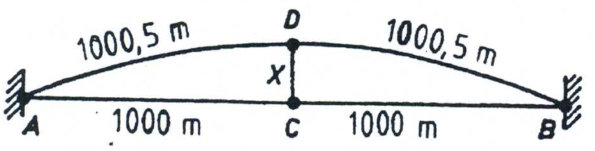

Abb. 1: Wölbung der Brücke

Erste Schätzungen liegen hier i. a. weit entfernt, meistens werden Werte um 1 dm oder höchstens 1 m genannt. Hier versagt die Intuition schlichtweg in den meisten Fällen.
Es soll hier und in der Schule nicht darum gehen, die beschriebene Situation durch Differentialgleichungen zu erfassen und diese zu lösen, sondern primär „nur" um:

- Selbständiges Finden von Modellen (Biegekurven)! Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei aus ihrem Repertoire von Kurven bzw. Funktionen schöpfen; selbständiges Aufstellen (Verwerten) von Gleichungen (Bedingungen).
- Mittels CAS einen Überblick gewinnen über die Größenordnung der Hebedistanz in den einzelnen Modellen (wie groß sind die numerischen Unterschiede?).

[1] Genauer: 41° – 42°, z. B. bei Winter → Sommer leicht möglich!
[2] Es gibt in Wirklichkeit natürlich keine 2 km lange waagrechte Brücke in einem Stück – dies ist rein produktionstechnisch unmöglich; in diesem Sinn handelt es sich bei dieser Aufgabe nicht um „realitätsnahe Mathematik"! Wohl zeigt sie aber, *wie* Mathematik prinzipiell zur Beschreibung von Situationen bzw. Lösung von konkreten Problemen angewendet werden kann, und *welche katastrophale Folgen* es hätte, die einzelnen Brückenteile zu kilometerlangen Stücken „zusammenzuschweißen", d. h. keine Dehnungsfugen zu lassen.

Modell 1: Strecken

In erster Näherung könnte man die „Bögen“ AD und BD durch gerade Strecken ersetzen. Durch den Lehrsatz des PYTHAGORAS erhält man dabei (in m) $X^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = (\overline{AD} - \overline{AC}) \cdot (\overline{AD} + \overline{AC}) = (1000,5 - 1000) \cdot (1000,5 + 1000) = \frac{1}{2} \cdot 2000,5 = 1000,25$ und daraus den (überraschend großen) Näherungswert $X \approx 31,6$ m! Der wirkliche Wert wird etwas kleiner sein (warum? wieviel?).

Modell 2: Kreis

In zweiter Näherung könnte nun der Bogen ADB durch einen Kreisbogen ersetzt, und daraus X berechnet werden (siehe Abb. 2).

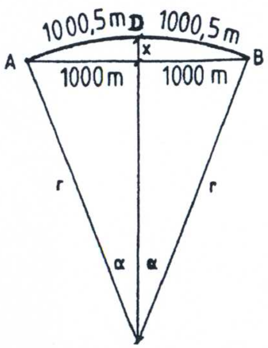

Abb. 2: Kreisbogen

Beim Kreisbogen gilt $X = r - \sqrt{r^2 - 1000^2}$ (siehe Abb. 2); D. h. mit r kennen wir auch die gesuchte Hebedistanz X. Die folgenden zwei Gleichungen sind unmittelbar aus Abb. 2 abzulesen:

(1) $\quad r \cdot \alpha = 1000,5$,

(2) $\quad r \cdot \sin\alpha = 1000$.

Elimination von α führt zu einer Gleichung für r:

$$\boxed{\frac{1000}{r} = \sin\frac{1000,5}{r} \qquad \text{bzw.} \qquad \sin\frac{1000,5}{r} - \frac{1000}{r} = 0} \ .$$

Ein CAS löst diese Gleichung näherungweise auf Knopfdruck (es ist klar, dass r ziemlich groß ist; Suchintervall z. B. $[0, 10^6]$ oder $[0, 10^5]$). Man erhält $\boxed{r \approx 18\,269,7 \text{ m}}$. Daraus ergibt sich schließlich der Wert für die gesuchte Hebedistanz $\boxed{X \approx 27,4 \text{ m}}$.

Die Rechenarbeit erledigt das CAS, die Idee „Kreis“ und das Aufstellen bzw. Verwerten der daraus resultierenden Bedingungen (Gleichungen) sollen weitestgehend selbständige Schülerleistungen sein (analog bei den nächsten Modellen!).

Modell 3: Die Parabel als Biegelinie

Eine nach unten offene, zur y-Achse symmetrische Parabel mit Scheitel $S(0|b)$ hat die Gleichung $y = a\,x^2 + b$ $(a < 0,\ b > 0)$ – siehe Abb. 3. Da die Parabel sehr flach sein muss, ist klarerweise $|a|$ sehr klein.

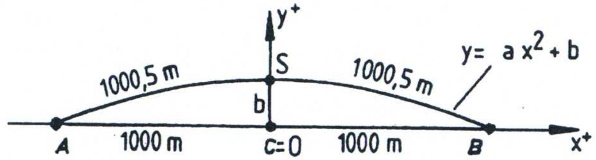

Abb. 3: Eine Parabel als gewölbte Brücke

Unsere Bemühungen müssen nun offenbar darauf hinauslaufen, b zu bestimmen! Zunächst erhalten wir aus der Gleichung $y(-1000) = y(+1000) = 0$ die Beziehung $\boxed{b = -10^6 \cdot a}$. Wenn wir also a gefunden haben, so kennen wir auch b.

Von der Parabel wissen wir jedoch noch etwas: deren Bogenlänge. Da sich die Brücke um 1 m gedehnt hat, muss die gesamte Bogenlänge 2001 m bzw. die halbe 1000,5 m betragen – wie auch schon in den ersten beiden Modellen.

Für die Bogenlänge s einer Kurve $y = y(x)$ zwischen zwei festen Werten x_1 und x_2 gilt bekanntlich $s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$, was in unserem Fall mit $y'(x) = 2\,a\,x$ zu einer Gleichung führt, aus der wir a berechnen wollen: $\boxed{\ell(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{1000} \sqrt{1 + 4\,a^2\,x^2}\, dx = 1000,5}$.

Wenn die Funktion $\ell(a)$ („Bogen*ℓ*änge“) vorher als obiges Integral *definiert* wird, kann mit einem CAS einfach die Gleichung $\ell(a) = 1000,5$ näherungsweise gelöst werden (auch ohne das Integral wirklich zu bestimmen).

Ein etwas ausführlicherer Weg bestünde darin, die Stammfunktion wirklich zu bestimmen (mit CAS), die Grenzen einzusetzen, und erst dann die entsprechende Gleichung mit CAS zu lösen.

In jedem Fall erhält man für a den Näherungswert (Suchintervall z. B. $[-1, 0]$) $\quad a \approx -0,000027392288$. Dies bedeutet für die letztlich gesuchte Hebedistanz $b = -10^6 \cdot a$ einen Wert von ca. $\boxed{b \approx 27,4 \text{ m}}$. Der Unterschied zu Modell 2 (Kreisbogen) beträgt nur ca. 4 mm!

Modell 4: Kosinusfunktion als Biegekurve
Selbständige Schülerleistung: Wie muss die Standard-Kosinus-Funktion manipuliert werden, damit sie folgendes Bild ergibt:

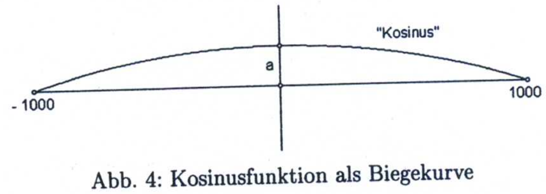

Abb. 4: Kosinusfunktion als Biegekurve

- Amplitude: $1 \;\widehat{=}\; a$, Streckung um den Faktor a
- Frequenz, kleinste positive Nullstelle: $\frac{\pi}{2} \;\widehat{=}\; x = 1000$

Die gesuchte Kosinus-Funktion ist also $y = a\cos\left(\frac{\pi}{2000}x\right)$ und die Hebedistanz ist a. Mit $y' = -\frac{a\pi}{2000}\sin\left(\frac{\pi}{2000}x\right)$ erhalten wir für die nach a zu lösende Gleichung $\int_0^{1000}\sqrt{1+\left(\frac{a\pi}{2000}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2000}x\right)}\,dx = 1000,5$.

Die ungefähre Größenordnung der Hebedistanz ($a \approx 25-30$ m) kennen wir schon, d. h. Suchintervall z. B. $[0, 50]$); man erhält $\boxed{a \approx 28,5 \text{ m}}$ als Hebedistanz, d. h. ungefähr 1,1 m höher als bei Kreis bzw. Parabel als Biegekurve! Man beachte: Die Lösung ist möglich, obwohl die Stammfunktion in diesem Fall gar nicht geschlossen darstellbar ist!

Weitere Modelle
Auf ganz analoge Art und Weise können noch weitere Funktionen als Biegekurve untersucht werden, z. B:

- **Kettenlinie:** $y = C + a\cosh\frac{x+C_1}{a}$, wobei aufgrund der Symmetrie bzgl. der y-Achse $C_1 = 0$ folgt (siehe Abb. 4 – selbes Bild, nur andere Funktionsgleichung, „keine Verschiebung in x-Richtung"). Hier ergibt sich ein besonders einfaches Bogenlängenintegral und die Hebedistanz beträgt hier wieder ca. 27,4 m (zumindest auf cm genau das Ergebnis von Parabel bzw. Kreis als Biegelinie).

- **Waagrechte Endtangenten:** (ohne Ergebnisse)

Parabel 4. Ordnung oder

Kosinusfunktion

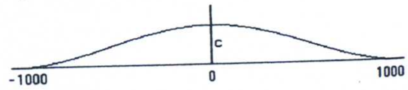

Abb. 5: Waagrechte Endtangenten