also das Problem, die Anzahl $\#\{D_1, \ldots, D_i \geq j\}$ ($i = 1, \ldots, 7$ und $j = 7, \ldots, 40$) zu berechnen. Wir bemühen dazu das Kugelmodell.

Für $i = 1$, also $\#\{D_1 \geq j\}$, geben wir $j-1$ Kugeln ins erste Fach, die Verteilung der restlichen $n = 46 - (j-1) = 47 - j$ Kugeln in $k = 7$ Fächer erfolgt gemäß dem Kugelmodell (also in jedes Fach mindestens eine Kugel). Dafür gibt es $\binom{(47-j)-1}{7-1} = \binom{46-j}{6}$ ($j = 7, \ldots, 40$) Möglichkeiten.

Im Falle $i = 2$, also $\#\{D_1, D_2 \geq j\}$, kommen $j-1$ Kugeln ins erste und $j-1$ Kugeln ins zweite Fach, der Rest wird wie eben verteilt. Also $n = 46 - 2(j-1) = 48 - 2j$ Kugeln auf $k = 7$ Fächer, das ergibt $\binom{(48-2j)-1}{7-1} = \binom{47-2j}{6}$ ($j = 7, \ldots, 20$) Möglichkeiten.

Allgemein ist $\#\{D_1, \ldots, D_i \geq j\} = \binom{[46-i(j-1)]-1}{7-1} = \binom{45-i(j-1)}{6}$, denn $j-1$ Kugeln kommen ins erste, ins zweite, ..., und ins i-te Fach, der Rest wird wie gehabt aufgeteilt. Dabei muss $46 - i(j-1) \geq 7 \iff 39 \geq i(j-1)$ gelten. Damit ist alles klar: Mit $\#\{M = j\} = \#\{M \geq j\} - \#\{M \geq j+1\}$ ist $\mathrm{P}(M = j) = \frac{\#\{M=j\}}{\binom{45}{6}}$ ($j = 7, \ldots, 40$) und $\mathrm{E}(M) = \sum_{j=7}^{40} j \cdot \mathrm{P}(M = j) \approx 16,21$ mittels CAS berechenbar.

Literatur

DIFF Das Aufgabenfeld Lotto. Mathematik: Aufgabenstellen im Stochastikunterricht. Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen, Tübingen 1987.

S. Götz Zur Verteilung der minimalen Differenzen bei Lottoziehungen; eingereicht bei: MNU, 8 pp.

H. Humenberger Additive Zahlzerlegungen und Lotto; eingereicht bei: MNU, 9 pp.

WN Wissenschaftliche Nachrichten Nr. 116 (Juli / August 2001). Herausgegeben vom österreichischen Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur.

Stefan GÖTZ, Wien und Hans HUMENBERGER, Dortmund

Zur Verteilung der minimalen und maximalen Differenzen der Gewinnzahlen bei Lottoziehungen

In diesem Beitrag soll an einem Beispiel die für die Mathematik typische Arbeitsweise des Ausgehens von Bekanntem und dessen (schrittweise) Verallgemeinerung demonstriert werden. Es handelt sich gleichsam um eine Miniatur fachmathematischen Arbeitens. Neben der wichtigen Aufgabe des Mathematikunterrichts, Beiträge zur Allgemeinbildung durch das Fach selbst zu liefern, ist auch die vereinfachende, aber nicht verfälschende Darstellung des Faches an sich ein wesentliches Element des Mathematikunterrichts.

In [WN] wird auf Seite 38 in der „Aufgabenecke" folgende Aufgabe Nr. 80 (von WALTHER JANOUS) gestellt: „(1) Wir betrachten ‚unser' Lotto ‚6 aus 45'. Für eine Ziehung sei m die kleinstmögliche Differenz der aufgetretenen Zahlen. (Zum Beispiel ist für die Ziehung 2, 5, 19, 22, 33, 45: $m = 3$.) Man bestimme den (genauen) *Erwartungswert von* m.
(2)* [‚Open-end-Teil'] Man studiere auch zu (1) analoge Fragestellungen."

Dazu ist erstens zu bemerken, dass in Österreich beim Zahlenlotto sechs Gewinnzahlen aus den Zahlen von eins bis *45 ohne* Zurücklegen gezogen werden. Die ebenfalls bei jeder Ziehung ermittelte *Zusatzzahl* wird hier *nicht* berücksichtigt.

Zweitens interpretieren wir „kleinstmögliche Differenz der aufgetretenen Zahlen" als Realisation der Zufallsvariablen M, welche die *minimale* Differenz unter jenen zwischen je zwei gezogenen Zahlen einer Ziehung beschreibt. Es gibt $\binom{6}{2} = 15$ nicht notwendig verschiedene Differenzen der eben erklärten Art, auf die kleinste (die öfter auftreten kann, im obigen Beispiel zweimal) richtet sich nun unser Augenmerk: Wir bestimmen die Verteilung und den Erwartungswert von M.

Wir interessieren uns zunächst für die Auftrittswahrscheinlichkeit so genannter „Zwillinge", das sind unmittelbar aufeinander folgende natürliche Zahlen, die in einem Ziehungsergebnis (bei „6 aus 45") vorkommen (nach [DIFF], S. 41 ff.):

Ein Ausspielungsergebnis $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ mit $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 \leq 45$ und $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{N}^6$ unterwerfen wir der Transformation $\varphi : \mathbb{N}^6 \to \mathbb{N}^6$ mit $\varphi[(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)] = (x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, x_4 - 3, x_5 - 4, x_6 - 5) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$. Es gilt $1 \leq y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6 \leq 40$, wenn $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ *keine* unmittelbar aufeinander folgenden (natürlichen) Zahlen enthält und vice versa. Die *Bijektivität* der Zuordnung φ ist offensichtlich.

Das Zählen der Ziehungsergebnisse, welche keinen Zwilling enthalten, fällt nun leicht: $\binom{40}{6}$. Damit ist $\mathrm{P}(\text{kein Zwilling}) = \frac{\binom{40}{6}}{\binom{45}{6}}$ und daher $\mathrm{P}(\text{mindestens ein Zwilling}) = 1 - \frac{\binom{40}{6}}{\binom{45}{6}}$.

Die oben definierte Zufallsvariable M hat den Wertebereich $W_M = \{1, 2, \ldots, 8\}$, denn eine minimale Differenz $m \geq 9$ ist wegen (1,10,19, 28,37,46) nicht mehr möglich. Auf der anderen Seite ist mit $\mathrm{P}(M = 1) = \mathrm{P}(\text{mindestens ein Zwilling}) = 1 - \frac{\binom{40}{6}}{\binom{45}{6}}$ ein Anfang gemacht. Für den Fall $M = 2$ brauchen wir die Bewertung des Ereignisses $M > 2$. Wir suchen also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ziehungsergebnis ausschließlich Zahlen enthält, deren Abstand größer als zwei ist. Ein Beispiel dafür ist (1,4,7,10,13,16). Für ein solches (günstiges) Ausspielungsergebnis gilt allgemein $1 \leq x_1 < x_2 - 2 < x_3 - 4 < x_4 - 6 < x_5 - 8 < x_6 - 10 \leq 35$. Wir betrachten nun die Abbildung $\psi : \mathbb{N}^6 \to \mathbb{N}^6$, $\psi[(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)] = (x_1, x_2 - 2, x_3 - 4, x_4 - 6, x_5 - 8, x_6 - 10) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$, wobei wir nur günstige Ziehungsergebnisse als Argumente zulassen. Sie ist wiederum bijektiv. Aus unserem konkreten Beispiel wird $\psi[(1, 4, 7, 10, 13, 16)] = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Daher ist $\mathrm{P}(M > 2) = \frac{\binom{35}{6}}{\binom{45}{6}}$, daraus ergibt sich $\mathrm{P}(M \leq 2) = 1 - \frac{\binom{35}{6}}{\binom{45}{6}}$ und schließlich $\mathrm{P}(M = 2) = \mathrm{P}(M \leq 2) - \mathrm{P}(M = 1) = \frac{\binom{40}{6} - \binom{35}{6}}{\binom{45}{6}}$. Analog finden wir $\mathrm{P}(M = 3) = \frac{\binom{35}{6} - \binom{30}{6}}{\binom{45}{6}}$, $\mathrm{P}(M = 4) = \frac{\binom{30}{6} - \binom{25}{6}}{\binom{45}{6}}$, $\mathrm{P}(M = 5) = \frac{\binom{25}{6} - \binom{20}{6}}{\binom{45}{6}}$, $\mathrm{P}(M = 6) = \frac{\binom{20}{6} - \binom{15}{6}}{\binom{45}{6}}$ und $\mathrm{P}(M = 7) = \frac{\binom{15}{6} - \binom{10}{6}}{\binom{45}{6}}$. Schließlich ist $\mathrm{P}(M = 8) = 1 - \mathrm{P}(M = 1) - \mathrm{P}(M = 2) - \cdots - \mathrm{P}(M = 7) = \frac{\binom{10}{6}}{\binom{45}{6}}$.

Der gefragte *Erwartungswert* ist also $\mathrm{E}(M) = 1 \cdot \mathrm{P}(M = 1) + 2 \cdot \mathrm{P}(M = 2) + \cdots + 8 \cdot \mathrm{P}(M = 8) = \frac{480715}{271502} \approx 1,77$.

Die *maximale* Differenz eines Ausspielungsergebnisses kann als *Spannweite* interpretiert werden, also als Differenz zwischen größter und kleinster gezogener Zahl. Die zugehörige Zufallsvariable S hat den Wertebereich $W_S = \{5, 6, \ldots, 44\}$. Den Wert s nimmt sie an, wenn das Paar aus kleinster und größter Gewinnzahl eines der $45 - s$ Paare $(1, s+1), (2, s+2), \ldots, (45-s, 45)$ ist. Die restlichen vier Gewinnzahlen müssen dann dazwischen liegen: das ergibt $\binom{s-1}{4}$ Möglichkeiten. Insgesamt zählen wir $(45 - s) \cdot \binom{s-1}{4}$ günstige Fälle, somit ist die Auftrittswahrscheinlichkeit für die Spannweite s eines Ziehungsergebnisses $\mathrm{P}(S = s) = \frac{(45-s) \cdot \binom{s-1}{4}}{\binom{45}{6}}$. Der *Erwartungswert* von S ergibt sich zu $\mathrm{E}(S) = \sum_{s=5}^{44} s \cdot \frac{(45-s) \cdot \binom{s-1}{4}}{\binom{45}{6}} = \frac{230}{7} \approx 32,857$. Dabei haben wir die Identität $\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} = \binom{n+1}{j+1}$ für die konkrete Berechnung (ohne CAS) verwendet.

Eine andere Variante betrachtet die Differenzen $D_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, 7)$ mit $x_0 = 0$ und $x_7 = 46$ in einem Ziehungsergebnis $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 \leq 45$ bzw. $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < 46$. Dabei werden die $D_i - 1$ als Längen der in der Ziehung nicht vorkommenden Zahlen-„Blöcke" interpretiert. Z. B. ist für das Ziehungsergebnis (12,20,21,33,34,41) $D_1 = 12$, $D_2 = 8$, $D_3 = 1$, $D_4 = 12$, $D_5 = 1$, $D_6 = 7$ und $D_7 = 5$. Klarerweise gilt allgemein $\sum_{i=1}^{7} D_i = 46 (= 12 + 8 + 1 + 12 + 1 + 7 + 5)$. Die grundlegende *Idee* ist nun, 46 in sieben (natürliche) Summanden größer gleich eins (unter Beachtung der Reihenfolge) zu zerlegen. Ein *äquivalentes Problem* lautet: $n = 46$ ununterscheidbare Kugeln in $k = 7$ Fächer so aufzuteilen, dass in jedem Fach wenigstens eine Kugel liegt *(Kugelmodell)*. Dafür gibt es $\binom{k+(n-k)-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten *(Kombination mit Wiederholung)*. Für die Zufallsvariable $M = \max D_i$ $(i = 1, \ldots, 7)$ wird nun die Verteilung und der Erwartungswert bestimmt.

Es ist $\Omega_M = \{7, \ldots, 40\}$, weil: ang. $D_i \leq 6$ $\forall i = 1, \ldots, 7$, dann ist $\sum_{i=1}^{7} D_i \leq 7 \cdot 6 = 42 < 46$; ang. $M \geq 41$, dann folgt $\sum_{i=1}^{7} D_i \geq 41 + 1+1+1+1+1+1 = 47 > 46$. Für das Ereignis $\{M \geq j\}$ $(j = 7, \ldots, 40)$ gilt $\{M \geq j\} = \bigcup_{i=1}^{7} \{D_i \geq j\}$, dies ruft die *Ein- und Ausschaltformel* auf den Plan: $\#\{M \geq j\} = \binom{7}{1} \#\{D_1 \geq j\} - \binom{7}{2} \#\{D_1, D_2 \geq j\} + \binom{7}{3} \#\{D_1, D_2, D_3 \geq j\} - \binom{7}{4} \#\{D_1, \ldots, D_4 \geq j\} + \binom{7}{5} \#\{D_1, \ldots, D_5 \geq j\} - \binom{7}{6} \#\{D_1, \ldots, D_6 \geq j\} + \binom{7}{7} \#\{D_1, \ldots, D_7 \geq j\}$. Es stellt sich