Hans HUMENBERGER, Wien

Ein Paradoxon bei Münzwurfserien und bedingte Erwartungswerte

Wir wollen hier ein Paradoxon näher beleuchten, das sich auf Serien von Münzwürfen wie z.B. $KAKKAKAAAK$...... bezieht (K ... „Kopf", A ... „Adler"). Stellt man nämlich ganz unvoreingenommen z.B. die Frage, welches der Muster $KAKA$ oder $AKAA$ das „wahrscheinlichere" sei, so gelangt man — je nach Sichtweise — zu völlig verschiedenen Ergebnissen. Wir setzen dabei immer voraus, daß es sich beim Werfen der idealen Münze um einen BERNOULLI-Versuch handelt: Unabhängigkeit der Versuchsausgänge, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ergibt sich K oder A.

1. Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit der angegebenen Muster in einer Wurfserie der Länge 4, so erhält man für beide dieselbe Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

2. Fragt man, wie oft man im Durchschnitt („auf lange Sicht" — Erwartungswert) eine Münze werfen muß, um das jeweilige Muster erstmalig zu erhalten, so ergibt sich 20 für $KAKA$ und für $AKAA$ nur 18. In diesem Sinn kann also $AKAA$ als wahrscheinlicher bezeichnet werden, da man im Durchschnitt mit weniger Würfen dieses Muster bekommt.

3. Fragt man hingegen nach der Wahrscheinlichkeit, mit der in einer Münzwurfserie $AKAA$ **vor** $KAKA$ auftritt — gemeint ist hier nicht „unmittelbar davor", sondern **„früher als"**: $AKAA$ erscheint früher als $KAKA$ (als Ergebnis von vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Würfen) —, so erhält man $\frac{5}{14} \approx 0.357$, ein Wert, der deutlich kleiner als 0.5 ist. Es ist also fast doppelt so wahrscheinlich, daß $KAKA$ vor $AKAA$ auftritt (64.3%), wie umgekehrt (35.7%). So gesehen kann $KAKA$ als (deutlich!) wahrscheinlicher angesehen werden.

Im folgenden wollen wir dieses Phänomen in einer einfacheren Version (2- statt 4-gliedrige Muster) auf Schulniveau behandeln, und zwar unter Zuhilfenahme *bedingter Erwartungswerte* (für obige 2. Sichtweise). Für genauere Darstellungen bzgl. *bedingte Erwartungswerte* und *Satz vom totalen Erwartungswert* sei auf KILIAN 1987 oder HUMENBERGER 1998a verwiesen; an dieser Stelle nur Definition und Satz.

Definition: Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ als mögliche Werte und A ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit. Der *bedingte Erwartungswert* bezüglich der Bedingung A wird dann definiert durch

$$\boxed{E(X|A) \overset{\text{def}}{=} \sum_k x_k\, P(X = x_k|A)\,,} \qquad (1)$$

falls die (möglicherweise unendliche) Reihe absolut konvergiert. In der Definition sind also die Wahrscheinlichkeiten (im Vergleich zum gewöhnlichen Erwartungswert) durch bedingte Wahrscheinlichkeiten zu ersetzen. Es gilt in Analogie zum *Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit* auch der

Satz vom totalen Erwartungswert: Ist X eine diskrete Zufallsvariable und A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine *vollständige Zerlegung des Ereignisraumes* Ω, so gilt

$$\boxed{E(X) = \sum_n E(X|A_n)\,P(A_n)\,.}$$

Die Muster „KA" und „KK" in Münzwurfserien — eine Anwendung bedingter Erwartungswerte

1. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit, daß beim *zweimaligen* Münzwurf das Ergebnis KA bzw. KK erscheint, so ergibt sich jeweils $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ — die genannten Muster KA und KK sind unter diesem Aspekt also *gleichwahrscheinlich*.
2. Für KA sind im Durchschnitt 4 Würfe nötig, für KK hingegen durchschnittlich 6 (siehe unten). Unter diesem Aspekt ist also KA doch als wahrscheinlicher zu bezeichnen als KK (im Gegensatz zur Gleichwahrscheinlichkeit unter den anderen beiden Aspekten).
3. Zieht man als Kriterium für den Wahrscheinlichkeitsvergleich heran, ob es wahrscheinlicher ist, daß in einer Wurfserie KA **vor** KK kommt oder umgekehrt, so ergibt sich ebenfalls *Gleichwahrscheinlichkeit*, denn nach dem ersten auftretenden K kommt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder A oder K. Im allgemeinen muß sich bei n-gliedrigen Mustern in dieser Sichtweise jedoch keineswegs $\frac{1}{2}$ ergeben (siehe oben: $KAKA$ - $AKAA$). Schon bei zweigliedrigen Mustern gibt es Gegenbeispiele zur Gleichwahrscheinlichkeit — siehe unten.

Vergleich von zweigliedrigen Mustern in bezug auf die Auftrittswahrscheinlichkeit vor einem anderen

Mögliche zweigliedrige Muster sind: AA, AK, KA, KK. Aus diesen vier Mustern können wir $\binom{4}{2} = 6$ Paarungen von Mustern bilden und jeweils Überlegungen für die Auftrittswahrscheinlichkeit des einen vor dem anderen anstellen.

Aus *Symmetriegründen* erhält man in diesem Sinn zwei gleichwahrscheinliche Paarungen (AA und KK; AK und KA):

$$P(AA \text{ vor } KK) = P(KK \text{ vor } AA) = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(AK \text{ vor } KA) = P(KA \text{ vor } AK) = \frac{1}{2}\,,$$

und zwei weitere gleichwahrscheinliche Paarungen bei jeweils gleichem „Anfang" (AA und AK, KK und KA; nach dem dem erstmaligen Auftreten des jeweils gleichen Anfangs kommt ja mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder A oder K):

$$P(AA \text{ vor } AK) = P(AK \text{ vor } AA) = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(KK \text{ vor } KA) = P(KA \text{ vor } KK) = \frac{1}{2}\,.$$

Bei den noch fehlenden Paarungen mit jeweils gleichem „Schluß" (AA und KA, AK und KK) kommen wir jedoch zu unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten. Betrachten wir z.B. die Wahrscheinlichkeit, daß KK vor AK kommt. Sehr einfach scheint uns z.B. folgende Überlegung (Begründung) dafür zu sein: die ersten beiden Würfe einer Serie können KK, AK, KA, AA sein (jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$). Im ersten Fall (KK) ist klarerweise „KK vor AK" eingetreten. Im zweiten trivialerweise umgekehrt; aber auch nach KA bzw. AA kann niemals „KK vor AK" eintreten, denn sobald nach KA bzw. AA ein K folgt (nach u.U. einigen A's), ist in diesen Fällen „AK vor KK" eingetreten! In drei von vier möglichen Anfangskonstellationen tritt also mit Sicherheit „AK vor KK" ein, in einer „KK vor AK". Analoge Überlegungen können wir auch mit AA und KA anstellen und erhalten insgesamt:

$$P(KK \text{ vor } AK) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(AK \text{ vor } KK) = \frac{3}{4}\,,$$

$$P(AA \text{ vor } KA) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(KA \text{ vor } AA) = \frac{3}{4}\,.$$

So gesehen ist also AK „dreimal so wahrscheinlich" wie KK, und KA ist „dreimal so wahrscheinlich" wie AA.

Erwartungswerte für die Anzahl nötiger Würfe, bis erstmalig ein bestimmtes zweigliedriges Muster auftritt

Wir geben zwei kurze Möglichkeiten an zu begründen, daß der Erwartungswert für die nötige Anzahl von Münzwürfen für KA den Wert 4 und für KK den Wert 6 hat. Diese Erwartungswerte seien im folgenden mit $E(KA)$ bzw. $E(KK)$ bezeichnet. [Aus Symmetriegründen gilt natürlich $E(KA) = E(AK)$ und $E(KK) = E(AA)$.] Wir benötigen für folgende Überlegungen, daß der Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariable mit dem Parameter p den Wert $1/p$ hat — eine besonders einfache Begründung dafür gibt z.B. KILIAN 1987 oder HUMENBERGER 1998a.

1. Das Ereignis „zum ersten Mal KA" tritt genau dann ein, wenn nach dem ersten auftretenden K erstmalig ein A folgt. Ein solches Muster könnte durch folgende Darstellung angedeutet werden: $\ldots K]\ldots KA]$. Vor dem ersten K können noch einige A's auftreten und danach noch einige weitere K's. Jedenfalls bedeutet „warten auf KA" nichts anderes als „warten auf das erste K und dann warten auf das erste A". Da für beide bei jedem Versuch die Auftrittswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ beträgt, ergibt sich für die entsprechenden *Teilwartezeiten* (gemeint ist die Anzahl der nötigen Versuche) jeweils $\frac{1}{p} = 2$. In Summe erhalten wir daher für den Erwartungswert $E(KA) = 2 + 2 = 4$.
2. Nun wollen wir $E(KK) = 6$ zeigen. Sei $E_K \stackrel{\text{def}}{=} E(KK|K)$ der Erwartungswert der nötigen Wurfanzahl für KK unter der Bedingung, daß der erste Wurf K ergab; analog sei $E_A \stackrel{\text{def}}{=} E(KK|A)$ definiert. Dann können wir folgende Beziehungen zwischen den bedingten Erwartungswerten E_K und E_A anschreiben (Erläuterungen unten):

$$E_K = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + E_A \cdot \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad E_A = 1 + \underbrace{E_K \cdot \frac{1}{2} + E_A \cdot \frac{1}{2}}_{E(KK)}\,. \qquad (2)$$

Erklärungen:

(1) E_K: Der erste Wurf fällt auf K („1+...“), dann kommt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder wieder ein K („...+1$\cdot\frac{1}{2}$“) oder ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein A, was so viel wie einen „neuen ersten Wurf A“ bedeutet („...+$E_A \cdot \frac{1}{2}$“).

(2) E_A: Der erste Wurf fällt auf A („1 + ...“) und das Spiel kann sozusagen wieder von neuem beginnen: mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ fällt beim 2. Mal entweder ein K („... + $E_K \cdot \frac{1}{2}$“, neuer „Anfangswurf K“) oder wieder ein A („Anfangswurf wieder A“: „... + $E_A \cdot \frac{1}{2}$“).

Aus den Gleichungen (2) erhalten wir sofort $E_A = 7$ und $E_K = 5$ und mit diesen bedingten Erwartungswerten schließlich

$$E(KK) = E_A \cdot \frac{1}{2} + E_K \cdot \frac{1}{2} = 6\,. \tag{3}$$

Die Erwartungswerte der nötigen Würfe für das *bestimmte* „Doppelmuster“ KK bzw. für das *bestimmte* „Abwechslungsmuster“ KA sind also deutlich verschieden. Dadurch könnte man sich zur Vermutung hinreißen lassen, daß auch bei den zugehörigen Erwartungswerten für *ein beliebiges Doppelmuster* (also „KK oder AA“) bzw. für *eine beliebige Abwechslung* (also „AK oder KA“) ein Unterschied bestehe. Es ist jedoch nicht schwierig zu sehen, daß sich hier jeweils 3 ergibt.

- $E(AK, KA) \stackrel{\text{def}}{=} E(AK \text{ oder } KA) = 1 + 2 = 3$: Warten auf eine Abwechslung bedeutet ja nichts anderes, als die Münze einmal zu werfen („1+...“) und dann auf das jeweilige *andere* Ergebnis zu warten („... + 2“ , der Erwartungswert einer geometrischen Verteilung beträgt $1/p = 1/(1/2) = 2$).
- $E(KK, AA) \stackrel{\text{def}}{=} E(KK \text{ oder } AA) = 3$: Hier kann man nun wieder mit bedingten Erwartungswerten kurz und erfolgreich argumentieren. Sei also $E_K \stackrel{\text{def}}{=} E(KK, AA|K)$ der Erwartungswert für ein *beliebiges Doppelmuster* unter der Bedingung, daß beim ersten Wurf K gefallen ist; analog: $E_A \stackrel{\text{def}}{=} E(KK, AA|A)$. Es ist zunächst völlig klar (aus Symmetriegründen), daß $E_K = E_A$ sein muß und wegen $E(KK, AA) = \frac{1}{2} E_K + \frac{1}{2} E_A$ gilt daher $E(KK, AA) = E_K = E_A$. Mit den eben eingeführten Bezeichnungen ergibt sich

$$E_K = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + E_A \cdot \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad E_A = 1 + E_K \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}\,, \tag{4}$$

woraus wir unmittelbar $E_A = E_K = E(KK, AA) = 3$ erhalten.

Literatur

1. HUMENBERGER, H. (1998a): „Bedingte Erwartungswerte“ — ein möglicher Zugang und einige Beispiele. Preprint Universität für Bodenkultur, Wien.
2. HUMENBERGER, H. (1998b): Ein Paradoxon bei Münzwurfserien und bedingte Erwartungswerte. Ausführliche Version dieser Kurzfassung. Preprint Universität für Bodenkultur, Wien.
3. KILIAN, H. (1987): Bedingte Erwartungswerte im Stochastikunterricht. In: *Stochastik in der Schule* 7, 3, 24–45.

Anschrift des Verfassers: Hans HUMENBERGER, Institut für Mathematik, Universität für Bodenkultur, Gregor Mendel-Straße 33, A – 1180 Wien; E-mail: hans@edv1.boku.ac.at