Hans Humenberger, Wien

Optimieren im Mathematikunterricht
Beispiele aus der elementaren Spieltheorie

Spieltheorie – ein neues Element im Unterricht? Ein neues Thema im ohnehin überfüllten Mathematik-Curriculum? Neuer Ballast für den Unterricht? Nein, dieser Aufsatz versteht sich nicht als Plädoyer für die Aufnahme spieltheoretischer Aspekte in den *Pflicht*unterricht für alle Lernenden bzw. für die explizite Aufnahme in gewisse *Lehrpläne*. Es sollen lediglich einige (ausgewählte) *elementare* Aspekte herausgestrichen und so aufbereitet werden, daß eine Umsetzung im Unterricht für interessierte Lehrer (insbesondere in Leistungskursen, freiwilligen Kursen oder „Wahlpflichtgegenständen" [1]) etc. möglich erscheint (ohne nötige Vorkenntnisse des Lehrers in der Spieltheorie).

Optimieren in allen seinen Erscheinungsformen ist ein besonders wichtiges Element der Mathematik, insbesondere der Angewandten Mathematik. Die Idee des Optimierens verdient u.E. zurecht die Bezeichnung *Fundamentale Idee der Angewandten Mathematik* (vgl. [4]), sie wird im Unterricht jedoch oft ziemlich reduziert; bisweilen sogar bis auf eine einzige Methode – das „Nullsetzen der ersten Ableitung". Wir meinen, daß gerade im *Optimieren* eine große mathematische Vielfalt liegen soll, daß Schüler verschiedenste Arten, an ein Optimierungsproblem heranzugehen, kennenlernen sollten – nicht nur der Anwendungsorientierung wegen, auch das Motivationspotential von Optimierungsaufgaben scheint uns im Vergleich zu anderen Themen oft etwas höher zu liegen. Doch nun zurück zur Spieltheorie, anhand derer wir einen möglichen Weg darstellen wollen, die Idee des Optimierens auf eine einfache Art zu realisieren.

Beispiel 1 *Die Spieler A und B haben je eine Münze in der Hand; sie werfen die Münze nicht, sondern sie wählen bei ihrer eigenen Münze Kopf oder Zahl, und zwar ohne daß ein Spieler die Wahl des jeweils anderen kennt (geheime Wahl). Nun präsentieren sie einander ihr Ergebnis und die Gewinnverteilung sei dieselbe wie oben (bei gleichen Münzenseiten gewinnt A, bei ungleichen B).*

Die Spielergebnisse können in diesem Fall leicht und übersichtlich in einer Art Matrix [2] bzw. Tabelle zusammengefaßt werden, wobei wir vereinbaren wollen, solche Tabellen jeweils vom Spieler A aus zu betrachten (d.h. positive Zahlen bedeuten Gewinne für A und negative Zahlen bedeuten Verluste für A). In Tabelle 1 ist die Auszahlungsmatrix für unser Spiel angegeben. Wir wollen uns hier auf die einfachste Art solcher Spiele beschränken; wir werden (im wesentlichen) nur solche betrachten, bei denen

1. nur zwei Spieler (A und B) gegeneinander spielen („Zweipersonenspiele"),
2. einer der beiden Spieler nur zwei Wahlmöglichkeiten („Strategien") besitzt,

[1] Wie es sie z.B. in österreichischen Gymnasien seit einigen Jahren gibt.
[2] Solche Spiele werden daher oft auch als *Matrixspiele* bezeichnet.

	B wählt K	B wählt Z
A wählt K	1	−1
A wählt Z	−1	1

Tabelle 1: Auszahlungsmatrix für Spieler A bei Beispiel 1

3. der Gewinn des einen gleichzeitig den Verlust des anderen darstellt. In Summe fließt also kein Kapital aus diesem Zwei-Spieler-System heraus (z.B. an eine Spiel-Bank o.ä.); solche Spiele heißen demnach auch „Nullsummenspiele". Daher genügt es, zur *vollständigen* Beschreibung des Spiels nur *eine* Tabelle (z.B. aus der Sicht des Spielers A) anzulegen.

Im obigen Spiel ist offenbar keine Wahl eines Spielers in irgendeinem Sinn „besser" als eine andere, da sich jeder Spieler bei jeder seiner Entscheidungen den gleichen Möglichkeiten gegenüber sieht (1 gewinnen oder 1 verlieren).

Beispiel 2 *Der Spieler A habe die Möglichkeit, eine der beiden römischen Zahlen I oder II zu wählen, während Spieler B die Möglichkeit haben soll, zwischen den drei Zahlen I, II oder III zu wählen. Wählen z.B. beide die Zahl I, so gewinnt A den Betrag 2; die anderen Auszahlungswerte aller möglichen Spielausgänge sind wieder in einer Tabelle zusammengefaßt (siehe Tabelle 2).*

		B wählt		
		I	II	III
A wählt	I	2	−1	−2
	II	1	0	1

Tabelle 2: Auszahlungsmatrix für Spieler A bei Beispiel 2

Da es sich bei den Eintragungen in der Auszahlungsmatrix um Gewinne für A handelt, ist es klar, daß A die höchstmöglichen Eintragungen erzielen will, während B naturgemäß die niedrigsten anstrebt. Wir nennen deshalb A meist den *Maximumspieler* und B den *Minimumspieler*.

Überlegen wir nun zunächst gemeinsam mit Spieler A, welche Wahl für ihn die beste ist. Er wird sich folgendes denken: Wenn ich I wähle, so könnte es sein, daß B sich für III entscheidet, was für mich einen Verlust von 2 bedeutete (in der Tabelle −2). Wähle ich hingegen II, so ist das Schlechteste, was passieren kann, daß sich B für II entscheidet, und ich weder etwas gewinne noch etwas verliere. Bei der Wahl von II habe ich also eine höhere Sicherheit in dem Sinne, daß ich bei I mehr verlieren könnte. Spieler A wird sich daher für II entscheiden, weil dann *der größte denkbare Verlust am kleinsten* ist. Der größte denkbare Verlust ist für A jeweils das *Minimum* einer Zeile. Er wird also jene Zeile wählen, bei der dieses Minimum am größten ist. Wir könnten auch statt *größter denkbarer Verlust* den äquivalenten Ausdruck *kleinster denkbarer Gewinn* verwenden (negativer Gewinn bedeutet ja Verlust). Dann entspricht dem Zeilen*minimum* wirklich ein Gewinn*minimum* und nicht ein Verlust*maximum*, was rein von den verwendeten Begriffen her kein „Umdenken" notwendig macht.

Nun versetzen wir uns in die Lage von B und überlegen abermals gemeinsam mit ihm in einer völlig analogen Weise, nämlich danach trachtend den größtmöglichen Verlust zu minimieren, also die höchste Sicherheit zu haben: Der *größtmögliche* Verlust bedeutet diesmal (aus der Sicht von B) das *Maximum* einer Spalte. B wird also jene Wahl treffen (Spalte wählen), bei der das Spalten*maximum* am *kleinsten* ist. Die Spaltenmaxima von I, II bzw. III sind 2, 0 bzw. 1, d.h. der Spieler B wird ebenfalls II wählen; diese Wahl garantiert ihm analog eine höhere Sicherheit in dem Sinn, daß jede andere Wahl einen größeren Verlust mit sich bringen könnte.

Bemerkung: Die Überlegungen, die hier zu einem optimalen Ergebnis führen, heißen in naheliegender Weise **Mini-Max-Strategien.**

Wir können hier also leicht zu *optimalen* Verhaltensweisen der einzelnen Spieler gelangen; keiner von ihnen hätte ja Grund seine Entscheidung für II zu bereuen: Selbst wenn sie nämlich die Entscheidung des Gegners vor ihrer eigenen Entscheidung gewußt hätten, so hätte sich jeder von ihnen trotzdem für II entschieden. Es ist nicht schwer zu durchschauen, warum die Überlegungen hier so leicht zu einem optimalen Ergebnis geführt haben: Dies liegt an der Konstellation der Auszahlungstabelle, nämlich an der Tatsache, daß hier eine Zahl existiert, welche die kleinste ihrer Zeile und gleichzeitig die größte ihrer Spalte ist (die Eintragung 0 in der zweiten Zeile und zweiten Spalte). In einem Matrixschema ist es allgemein leicht zu überprüfen, ob eine solche Eintragung existiert – und zwar nicht nur bei einer $2 \times m$-Matrix, sondern allgemein bei einer $n \times m$-Matrix: Wir markieren einfach alle *Zeilenminima* und alle *Spaltenmaxima* (indem wir sie z.B. neben die jeweiligen Zeilen bzw. unter die jeweiligen Spalten schreiben) und überprüfen, ob das *größte Zeilenminimum* gleich dem *kleinsten Spaltenmaximum* ist. Ist dies der Fall, so haben wir damit gleichzeitig die optimalen Wahlen („Strategien") für beide Spieler gefunden.

Bemerkung: Diese beiden optimalen Strategien zusammen bilden die **Lösung des Spiels**. Der Ort einer solchen speziellen Eintragung heißt **Sattelpunkt** und die Zahl selbst an dieser Stelle heißt **Wert des Spiels**.

Wir können also in diesem Fall auch Spiele untersuchen, bei denen jeder Spieler mehr als zwei Wahlmöglichkeiten zur Verfügung hat, wie etwa bei einem Spiel mit der Auszahlungsmatrix von Tabelle 3. Es ist hier leicht zu erkennen, daß sich in der ersten Zeile und vierten Spalte ein *Sattelpunkt* mit dem Wert 0 befindet. Wählt Spieler A die Strategie I, so wird ihm garantiert, daß er mindestens 0 gewinnt (also sicher nichts verliert); wählt Spieler B Strategie IV, so wird ihm garantiert, daß er höchstens 0 verliert. Jede andere Wahl eines beteiligten Spielers könnte für diesen einen höheren möglichen Verlust bedeuten, weshalb jedem zu raten wäre, sich der jeweils optimalen Strategie zu bedienen (I für A bzw. IV für B).

		B					Zeilen-minimum
		I	II	III	IV	V	
A	I	0	1	1	0	0	0
	II	−2	2	4	−1	−5	−5
	III	2	−3	2	−2	2	−3
Spalten-maximum		2	2	4	0	2	

Tabelle 3: Auszahlungsmatrix eines Spiels mit „Sattelpunkt"

In anderen Fällen eines Matrixspieles (ohne Sattelpunkt) kann ebenfalls eine *optimale* Lösung gefunden werden, und zwar auch nach einem **Minimax-Prinzip** – dies besagt ein Hauptsatz der Spieltheorie (für einen elementaren Beweis siehe [6, S.221]. Wenn dabei ein Spieler nur zwei Wahlmöglichkeiten hat, so ist das Finden dieser optimalen Lösung besonders einfach – und zwar auf graphische Weise. Wir verweisen dafür auf eine ausführlichere Darstellung des Vortragsmanuskriptes in der Zeitschrift PRAXIS DER MATHEMATIK 1995 oder 1996.

Literatur

[1] COLLATZ, L. u. W. WETTERLING (1966): Optimierungsaufgaben. Springer, Berlin-Heidelberg-NewYork.

[2] FALKE, C. (1979): Mathematisierung am Beispiel der Spieltheorie. In: DdM **7**, 3, S.224–238.

[3] HERRMANN, E. (1964): Spieltheorie und lineares Programmieren. Aulis, Köln.

[4] HUMENBERGER, H. u. H.-C. REICHEL (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI-Verlag, Mannheim-Wien-Zürich.

[5] LAUGWITZ, D. (1972): Anwendbare Mathematik heute. Aus: MESCHKOWSKI, H. (Hrsg., 1972): Grundlagen der modernen Mathematik. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt. S.224–252.

[6] LÖFFEL, H. (1979): Elementare Beweise für den Hauptsatz der Spieltheorie. In: DdM **7**, 3, S.215–223.

[7] MANTEUFFEL, K. u. D. STUMPE (1979): Spieltheorie. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte, Band 21/1. BG-Teubner, Leipzig.

[8] SADOWSKI, W. (1963): Theorie und Methoden der Optimierungsrechnung in der Wirtschaft. Die Wirtschaft, Berlin.

[9] VAJDA, S. (1961): Einführung in die Linearplanung und die Theorie der Spiele. Oldenbourg, München-Wien.