Hans HUMENBERGER, Universität Wien

Sprachliche Aspekte als Ausgangspunkt für Anwendungsorientierung bzw. Verständnisstiftung im Mathematikunterricht

Die Sprache ist naturgemäß mit jedem Unterricht aufs Engste verbunden[1]! *Verständnis* und *Anwendung* stehen auch in sehr engem Zusammenhang und bedingen einander sogar in einer gewissen Weise. ZAIS/GRUND (1991, S.5) schreiben z.B.: „Die Mathematik besser zu verstehen heißt, sie besser anzuwenden. Die Mathematik besser anzuwenden heißt, sie besser zu verstehen." Die Wechselbeziehungen zwischen Mathematikunterricht und Sprache können sicher nach verschiedenen Gesichtspunkten eingeteilt werden. Eine Möglichkeit, der wir nun folgen werden, ist die nach

1. **Mathematik ALS Sprache** , bzw.
2. **Mathematik UND („verbale") Sprache** .

1 Mathematik ALS Sprache

Bei vielen Aufgaben bzw. Problemen kann die Mathematik bekanntlich einen wesentlichen Beitrag zu deren Lösung leisten! Zumeist sind jedoch die in Umgangssprache formulierten Probleme nicht von vornherein einer mathematischen Bearbeitung zugänglich. M.a.W. das gestellte Problem muß zuerst ins *Mathematische* „übersetzt" werden! So gesehen gleicht die Mathematik wirklich einer Sprache, *in die* und aus der Übersetzungen nicht nur möglich sondern auch nötig sind (vgl. auch REICHEL 1991)! Insbesondere beim sogenannten „Modellbilden" kommt der Aspekt von „Mathematik *als* Sprache" durch vielfältige Übersetzungen in beide Richtungen (Mathematik ↔ Umgangssprache) sehr zum Tragen! Aber auch bei vielen (nicht bei allen) sogenannten „Textaufgaben", die bisweilen (u.E. zu Unrecht) *kategorisch* als nur „eingekleidete Aufgaben" abgelehnt werden, können sinnvolle Übersetzungen, Anwendungsorientierung und eben Aspekte von „Mathematik als Sprache" geschult und geübt werden. Doch, wie immer man zum Problemkreis „Modellbildungsprozesse – Textaufgaben – eingekleidete Aufgaben" stehen mag, die Mathematik präsentiert sich dabei jedenfalls als *Sprache*, deren *Vokabeln* z.B. Formeln, Variable, Gleichungen aller Art etc. sind und deren *Grammatik* sich z.B. in algebraischen Umformungsregeln und vielen wichtigen „Sätzen" bzw. „Axiomen" ausdrückt! Eine Sprache, in der sich viele Probleme *besser* (präziser, kürzer, deutlicher, oft verständlicher) formulieren bzw. mitteilen lassen (Übersetzung), besser bearbeiten und lösen lassen. Oft ist die Bearbeitung bzw. Lösung nicht nur besser, sondern überhaupt erst möglich durch eine entsprechende Übersetzung in Mathematik.

Nun stellvertretend ein ganz einfaches Beispiel, bei dem die „Sprache der Mathematik" bzw. „Mathematik als Sprache" deutliche Vorteile mit sich bringt: Was steckt z.B. in der Formel

[1] Der *Kommunikationsaspekt* von „Sprache im Mathematikunterricht" ist *nicht* Thema dieser Arbeit!

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \ ?$$

Mit Worten könnte man diesen Sachverhalt ungefähr so ausdrücken:

> „Wenn jemand einen beliebigen Betrag auf ein Sparbuch mit beliebigem Zinsfuß legt, und diesen ohne weitere Einzahlungen beliebig viele Jahre liegen läßt, dann hat er nach diesem Zeitraum einen natürlich höheren Betrag zur Verfügung, der sich dadurch berechnen läßt, daß der Zinsfuß durch 100 dividiert, dann 1 addiert, dieses Ergebnis mit n potenziert und schließlich dieses Ergebnis mit dem ursprünglichen Betrag multipliziert wird."

Hier wird aufs Elementarste deutlich, wie die Sprache der Mathematik (Variable) dazu verwendet werden kann, Problemstellungen allgemein zu beschreiben, nämlich auf eine sehr prägnante, exakte und ökonomische Weise. Vergleicht man die beiden Darstellungen, die „verbale" und die „mathematische", so wird man zugeben müssen, daß die mathematische die übersichtlichere ist und daß sie sich daher für die Formulierung und vor allem für die Bearbeitung solcher Probleme in einem gewissen Sinn einfach „besser" eignet.

2 Mathematik UND Sprache

Wir werden hier insbesondere auf die Auswirkungen von *sprachlichen Aktivitäten* auf die *Mathematik* bzw. auf ein hoffentlich *besseres Verständnis* eingehen! Das betonte Üben rein sprachlicher Komponenten eines mathematischen Themas kann dessen Verständnis und daher dessen Handhabung bzw. Anwendbarkeit sehr wohl fördern, wenn dabei nicht Abneigung oder Blockierung durch eine übertriebene, unpassende bzw. pedantische sprachliche Exaktheit oder durch allzu umfangreiche Sprachübungen erzeugt wird. Eines muß jedoch gleich vorweggenommen werden: Wenn im *Unterricht* gesteigerter Wert auf sprachliche Aktivitäten gelegt wird, dann dürfen auch die *Prüfungen* (mündliche und schriftliche) nicht an dieser Tatsache vorbeigehen und bei den gewohnten, üblichen (zwar leichter zu korrigierenden) Aufgaben bleiben! Selbstverständlich müssen sich die Schwerpunkte des Unterrichts in den Prüfungsaufgaben widerspiegeln, d.h. es müsen dann auch bei Prüfungen aller Art sprachliche Aktivitäten (Begründungen, Beschreibungen etc. – Beispiele siehe unten) mehr Gewicht bekommen. Ein Unterrichtsprinzip bleibt nämlich solange (annähernd) wirkungslos, als es nicht gelingt, es in die Beurteilung miteinzubeziehen – dies zeigt einfach die Unterrichtserfahrung!

Im folgenden möchten wir nun einige ausgewählte Anregungen geben bzw. Beispiele anführen, *welche* sprachlichen Aktivitäten wir uns zur Steigerung des Verständnisses vorstellen könnten.

2.1 Erläutern und Beschreiben von Lösungswegen

Schüler sollen dabei ihre „Ansätze" erläutern, sie sollen den Lösungsweg beschreiben, skizzieren und darstellen, und sie sollen begründen können, warum sie gerade diesen

Weg einschlagen bzw. eingeschlagen haben (bei Aufgaben mit mehreren Lösungsmöglichkeiten). Dabei braucht die Rechnung explizit gar nicht immer durchgeführt zu werden; es genügt oft wirklich, wenn Schüler ihre Lösungsstrategie richtig darlegen und so schon bei eher einfachen Aufgaben die systematische Aufbereitung von Lösungswegen üben können, was ihnen später bei eher komplexeren und schwierigeren Aufgaben (auch beim evtl. selbständigen Erstellen von kleinen Computerprogrammen) sicher zu Gute kommen dürfte.

2.2 Erläutern von Begriffen, Definitionen und Sätzen

2.3 Interpretieren von bzw. Ablesen aus graphischen Darstellungen

Man könnte die graphischen Darstellungen selbst als eine „Art Sprache" bezeichnen, weil mit ihnen ja Sachverhalte ausgedrückt werden. *Ablesen* aus graphischen Darstellungen würde in dieser Sichtweise einem *Übersetzen* von der Sprache der Darstellungen in verbale Sprache gleichkommen. Als Übungsfeld eignen sich hier z.B. **Funktionsgraphen** (Zeit-Weg-Diagramme, Temperatur- oder Preisverläufe, Einkommens- oder Umsatzentwicklungen etc.), einfache **Netzpläne** oder **statistische Darstellungen** etc. Dabei könnte z.B. auch auf solche Darstellungen Gewicht gelegt werden, die sehr manipulativ sind, die falsche Eindrücke beim Betrachter entstehen lassen, versteckte aber suggestive Fehlinformationen enthalten. Das Aufdecken von diesen üblichen Praktiken würde u.E. eine ganz besondere Anwendungsorientierung bedeuten, da fast jeder nahezu täglich mit solchen statistischen Darstellungen konfrontiert ist, sei es auch nur in den Zeitungen!

2.4 Sprachliches Variieren von Aufgaben und Ergebnissen

Hier meinen wir das Umformulieren einer gegebenen **Aufgabenstellung**, z.B. kann die Aufgabe „Berechne den relativen Anteil von ... !" umformuliert werden zu „Drücke ... in % von ... aus!".

Auch bei **Ergebnissen** kann dieses Variieren der Formulierungen geübt werden. Das „Ergebnis" eines Beispieles $x = 0,75 \cdot a$ läßt sich z.B. als „x ist das 0,75-fache von a", „x beträgt drei Viertel von a", „x macht 75% von a aus", „x verhält sich zu a wie drei zu vier" etc. ausdrücken, wobei hier u.E. auch umständliche, aber dafür eigenständige Ausdrucksweisen sehr zu begrüßen wären.

2.5 Selbständiges Erfinden von Aufgaben zu einem vorgegebenen mathematischen Thema

2.6 Begründen und Argumentieren

In das Feld von (vorwiegend sprachlichen) Begründungen bzw. Veranschaulichungen gehören auch jene von elementaren Rechengesetzen - z.B. $a - (b + c) = a - b - c$ oder

$a(b+c) = ab + ac$ – bis hin zu solchen von (Test-)Entscheidungen in der Stochastik. Die Begründungen müssen nicht rein sprachlich in dem Sinn sein, daß keine anderen Hilfsmittel (Skizzen, Veranschaulichungen, Symbole etc.) verwendet werden dürfen, aber jedenfalls wird (soll) Sprache einen Hauptteil der Begründung ausmachen. Einige einfache Beispiele für *Begründungsaufgaben* wären „Warum ist $a : \frac{1}{b}$ bzw. $a : \frac{c}{b}$ dasselbe wie $a \cdot b$ bzw. $a \cdot \frac{b}{c}$?", „Warum gilt bei der Prozentrechnung $p = \frac{A \cdot 100}{G}$? (Eventuelle Anleitung: $p = A : \frac{G}{100}$)", oder „Warum sagt ein „Mittelwert" allein über die Grundgesamtheit nur sehr wenig aus?".

Widerlegen – Fehlersuchen: Mit *Begründen* kann auch gemeint sein: „Begründen, warum etwas *nicht* stimmt." Dies ist sicher auch eine Tätigkeit, die leider nur allzu selten Eingang in den Unterrichtsalltag findet. Dabei böten sich alleine durch viele Schüleräußerungen ausreichend viele Gelegenheiten, nach Begründungen zu suchen, warum diese oder jene Lösung oder Aussage, dieser oder jener Gedankengang nicht stimmen *kann*.

Überschlagsrechnungen: Hier meinen wir z.B. Aussagen wie „$3,67 \cdot 9,7$ ist ungefähr 36, weil 9,7 ungefähr 10 ist, und die Multiplikation mit 10 das Komma um eine Stelle nach rechts verschiebt.", „$8 \cdot 19$ muß weniger als 160 sein, weil $8 \cdot 20 = 160$, und $8 \cdot 19$ kleiner als $8 \cdot 20$ ist.", „Von 17^h35 bis um 12^h17 am nächsten Tag können nicht 29h 52min (Addition!) vergangen sein, weil die Tageszeit 12^h17 ja früher ist als 17^h35 und es bis 17^h35 am nächsten Tag nur 24 Stunden wären."

2.7 Exaktifizierungen von Begriffen aus der Umgangssprache

Für viele Begriffe aus der Umgangssprache gibt es in der Mathematik eine Reihe verschiedener Präzisierungen. Auch wenn es nur eine gibt oder nur eine thematisiert wird, so ist dadurch eine Verbindung von Mathematik und Sprache hergestellt! Hierzu nur einige Schlagwörter als Beispiele:

„Fehler", „Genauer", „Besser", „Flächeninhalt", „Funktion", „Unabhängigkeit von Ereignissen", „Durchschnittlich", „Im Mittel"

Schüler sind bei den letzten Begriffen („Durchschnittlich" bzw. „Im Mittel") i.a. sehr in Versuchung, ohne weitere Überlegungen – also quasi automatisch – an das *arithmetische Mittel* zu denken. Es gibt jedoch viele auch für Schüler unmittelbar einsichtige Beispiele, bei denen dieses falsch oder zumindest problematisch wäre (Noten, Geschwindigkeiten, Wachstumsraten u.v.a.m. – vgl. z.B. WINTER 1985).

Literatur

1. REICHEL, H.-C. (1991): Sprachschulung und Spracheinsatz im Mathematikunterricht. Aus: POSTEL, H., A. KIRSCH u. W. BLUM (Hrsg., 1991): Mathematik Lehren und Lernen. Schrödel, Hannover, S.156–170.

2. WINTER, H. (1985., Hrsg.): Mittelwerte – eine grundlegende mathematische Idee. Themenheft: mathematiklehren (8).

3. ZAIS, T. u. K.H. GRUND (1991): Grundpositionen zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht bei besonderer Berücksichtigung des Modellierungsprozesses. In: Der Mathematikunterricht (37), 5, S.4–17.