Approximation

als Beispiel einer Fundamentalen Idee eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts

Anwendungsorientierung im Unterricht ist ein Thema der gegenwärtigen didaktischen Diskussion, dem viele Beiträge gewidmet sind – sowohl in theoretischer als auch in (unterrichts-) praktischer Hinsicht. Diese Arbeit soll einen unterrichtspraktischen Beitrag darstellen und will vor allem konkrete Beispiele zur Diskussion stellen, wie das Prinzip der Approximation sich als roter Faden durch den Unterricht ziehen könnte, wie es darin immer wieder auftauchen und thematisiert werden kann. Wir verstehen diesen Aufsatz nicht als Lehrgang für »Numerische Mathematik in der Schule«, der in irgendeiner Weise vollständig oder ganz neuartig wäre, es handelt sich vielmehr um konkrete Anregungen bzw. anwendungsorientierte Beispiele zu Themen wie Fehlerfortpflanzung, Fixpunktverfahren, Newtonsches Näherungsverfahren etc.

Verfasser: Dr. Hans Humenberger, Inst. für Mathematik und Angewandte Statistik, Universität für Bodenkultur, Gregor Mendelstraße 33, A-1180 Wien

1 Einleitung

Das konkrete Rechnen hat bei vielen Mathematikern einen viel niedrigeren Stellenwert als das Arbeiten mit strengen Definitionen, Sätzen und Beweisen – dies gilt nicht nur für Hochschulmathematiker (obwohl dort häufiger), sondern auch für manche Lehrer an Gymnasien oder anderen Schulen. Das Rechnen wird oft als »Knechtsarbeit« abgelehnt und folgender Standpunkt vertreten: Die Hauptsache ist, daß man die Inhalte versteht, daß man weiß, »wie es theoretisch ginge«, »es« aber konkret und womöglich selber auszurechnen, ist irgendwie minderwertig.

Bei fast jeder Anwendung von Mathematik spielen jedoch Quantifizierungen, konkrete Zahlen, Maße, Rechnungen, Ergebnisse und Genauigkeit eine entscheidende Rolle. Auch im sogenannten »täglichen Leben« kommen quantitative Fragen, Antworten oder einfach Aussagen sehr häufig vor, z. B. »Wie spät ist es?«, »Der Zug fährt 4 Stunden und 35 Minuten!«, »Morgen habe ich acht Leute eingeladen.«, »Die Chancen für einen Gewinn stehen 1:100.«, »Ich verdiene 9000 öS im Monat.« usw. Der Genauigkeitsanspruch solcher oder ähnlicher Aussagen variiert zwar, meist sind es jedoch »Ungefähr-Aussagen«, deren Zahlen nur Näherungswerte sind.

Das Bemühen um größtmögliche Exaktheit in der Mathematik ist weitgehend legitim und notwendig – viele Exaktifizierungen im Laufe der Geschichte der Mathematik beweisen dies –, beim Arbeiten mit konkreten Zahlenwerten ist es andererseits aber auch wichtig, die »sinnvolle« Genauigkeit nicht aus den Augen zu verlieren und keine sinnlose bzw. gar nicht vorhandene Genauigkeit vorzutäuschen. Viele Probleme, die uns unsere »Umwelt« stellt, sind auf sogenannten exakten Wegen gar nicht lösbar, d. h., man ist in solchen Fällen auf Näherungsverfahren angewiesen, deren systemimmanente Fehler jedoch i. a. prinzipiell beliebig klein gemacht werden können, sie liefern also das Ergebnis zwar auf analytisch nicht ganz exakten Wegen, aber doch mit beliebiger (vorgebbarer) Genauigkeit. Dies ist in Anbetracht der Tatsache, daß Computer für die meisten Verfahren sehr gut eingesetzt werden können und daß ja auch bei den »exakten« Verfahren Rundungsfehler unvermeidlich sind und manchmal beträchtliche Auswirkungen haben können, u. E. ein guter Grund, sie als gleichwertig zu aktzeptieren und ihre Bedeutung anzuerkennen. In diesem Sinne glauben wir, daß es notwendig ist, die Idee der *Approximation* als roten Faden (als *Leitidee*) im Unterricht auf allen Stufen bzw. Niveaus deutlich werden zu lassen. Solche immer wiederkehrenden Leitideen, an denen der Unterricht spiralförmig orientiert werden kann, heißen seit BRUNER [5] auch *Fundamentale Ideen*.

Schon die meisten alltäglichen Angaben über Größen, Gewichte, Längen usw. können per se nur Näherungscharakter haben, da es schlichtweg unmöglich ist, sie einerseits wirklich exakt zu messen und andererseits sie völlig exakt anzugeben! Daher sind schon viele (die meisten) »Eingangswerte« von Rechnungen mit gewissen Fehlern behaftet und die »Ausgangswerte« (Ergebnisse) – selbst bei analytisch völlig exakten Rechenvorgängen – erst recht »nur« als Näherungswerte zu betrachten! Die meisten Rechenvorgänge sind jedoch ihrerseits gar nicht exakt durchführbar, so daß fast alle Ergebnisse den Status der »totalen Exaktheit« verlieren. Es beginnt schon bei Divisionen (2:3, 10:7 etc. sind nicht mehr exakt ausführbar), daß man sich mit endlichen Dezimalzahlen begnügen muß, »erst recht« bei $\sqrt[n]{x}$, π, $\log x$, e^x u. v. a. m. Da uns weder Zeit noch Platz noch Mittel für völlige Exaktheit zur Verfügung stehen (weder bei Messungen noch bei Rechnungen), sind wir gezwungen, uns i. a. auf *Nähe-*

MNU 48/1 (15. 1. 1995) Seiten 23–31 ISSN 0025-5866

rungswerte zu beschränken – warum sollten wir dann nicht auch *Näherungsverfahren* akzeptieren, die das Ergebnis ohnehin mit beliebiger Genauigkeit liefern! Diese Aussage soll nicht als Freibrief für beliebige »Schlamperei« bei Messungen und beim »Zahlenrechnen« aufgefaßt werden – im Gegenteil! – sie soll vorsichtig stimmen beim Arbeiten mit jeglichen Zahlenwerten (auch bei »exakten« Verfahren) und auf den Widerspruch jener Meinungen hinweisen, die Näherungsverfahren gar nicht oder nur sehr bedingt schätzen bzw. anerkennen. Der Umgang mit Näherungswerten fordert auch verstärkt ein »konstruktives Mitdenken während der Rechnung« (vgl. [9; S. 23), erstens was die aus der Fragestellung ablesbare sinnvolle Genauigkeit und zweitens was die Kontrolle von Fehlern und ihre Fortpflanzung betrifft.

2 Bewußter Umgang mit Zahlen – sinnvolle Genauigkeit

Ein angemessener Umgang mit Zahlen, ein »Gefühl« für sie, die Fähigkeit, verschiedene Werte in sinnvoller Genauigkeit angeben zu können (»Näherungswerte«) und Kritikfähigkeit gegenüber unmöglichen bzw. sinnlosen Rechenergebnissen sind u. a. sehr wesentliche Ziele des Mathematikunterrichts, sie verdienen u. E. schon in der Sek.-St. I mehr Beachtung als allgemein üblich. Numerische Mathematik im Rahmen des Schulunterrichts sollte nicht eine verkleinerte oder transponierte Version von der Universitätsvorlesung »Numerische Mathematik« sein, sondern vielmehr eine Erziehung zu sinnvoller Genauigkeit, zu einem adäquaten Umgang mit Näherungswerten und elementaren Näherungsverfahren, zum Bewußtmachen von Fehlern und deren weiteren Auswirkungen, zur aufmerksamen Kontrolle der Rechnungen bzw. der Rechenschritte oder zu Verantwortungsbewußtsein gegenüber ihren Rechenergebnissen. Vielleicht würden dann völlig unreflektiert und unkritisch hingeschriebene (u. U. sogar »doppelt unterstrichene«) Ergebnisse bzw. Lösungen zumindest etwas seltener.

Wir glauben, ein anwendungsorientierter Mathematikunterricht hat die Verpflichtung, numerische Fragestellungen möglichst oft zu berücksichtigen, und man kann vielen – auch sogenannten »alten« – Aufgaben einen numerischen »touch« verleihen. Ganz allgemein läßt sich feststellen, daß es nicht die Inhalte an sich sind, die für eine Anwendungsorientierung primär geändert werden sollen, sondern eher die Art der Behandlung des Stoffes und der Beispiele, die Gewichtung, die Tätigkeiten, die von den Schülern verlangt werden, die Sichtweise von Mathematik und ihren Strukturen, die Schwerpunktsetzung u. dgl.

Bemerkung: Approximation und Numerische Mathematik sind keine revolutionierend neuen Inhalte, vielmehr sind sie ohnehin im Unterricht vieler Kolleginnen und Kollegen auch jetzt schon vorhanden, es bedürfe oft »nur« eines Explizit-Machens (Herausstreichens) dieser Prinzipien, einer anderen Schwerpunktsetzung bei durchaus traditionellen Inhalten. Es liegt vielleicht eine erhöhte Chance dieses Prinzips darin, daß nicht alles Bisherige als obsolet anzusehen ist, sondern »nur« versucht wird, neue Zusammenhänge bzw. Schwerpunkte bei meist traditionellen Inhalten zu forcieren. Im selben »Atemzug« sollen u. E. dann aber auch die Schwerpunkte in der Leistungsbeurteilung geändert werden, denn ein didaktisches Prinzip bleibt so lange unfruchtbar – und dies zeigt die Erfahrung deutlich –, als es nicht gelingt, es in die Leistungsbeurteilung miteinzubeziehen! Unterricht und Prüfungssituation müssen unbedingt kompatibel sein bzw. einander widerspiegeln (vgl. auch [8])! △

Schon in der 5. oder 6. Schulstufe könnte z. B. aus der »alten« Aufgabe »Berechne den Flächeninhalt eines Rechteckes mit gegebener Länge $l = 18{,}65$ m und Breite $b = 9{,}54$ m!« eine »neue« gemacht werden, die dem Geist der (Fundamentalen) Idee *Approximation* durchaus entspricht:

Beispiel 1: Der Flächeninhalt eines kleinen Gartens soll bestimmt werden. Der Garten habe eine annähernd rechteckige Form[1], und mit einem Maßband stellt man Länge und Breite fest: $l = 18{,}652$ m; $b = 9{,}546$ m.

a) Berechne den Flächeninhalt mit diesen Maßen!
b) Ist es sinnvoll, Grundstücke auf mm genau zu vermessen! Welche Ungenauigkeitsfaktoren muß man beachten?
c) Wähle eine sinnvolle »Fehlerschranke«, die angibt, um wieviel man sich vermessen haben kann (z. B. ± 1 cm), und berechne den zu dieser Messung passenden kleinst- bzw. größtmöglichen Wert für den Flächeninhalt. Bestimme den Unterschied dieser beiden Werte und ihren jeweiligen Unterschied zum »Angabewert« $18{,}652 \cdot 9{,}546$ m^2. Kannst du erklären, warum diese Unterschiede nicht gleich groß sind, d. h., warum $18{,}652 \cdot 9{,}546$ nicht genau in der Mitte zwischen kleinst- und größtmöglichem Wert liegt?
d) Wie würdest du nun die Frage nach dem Flächeninhalt beantworten (Meßfehler, sinnvolle Genauigkeit)? Begründe deine Antwort!

3 Überschlags- und Kopfrechnen – Schätzen

Die wirkliche Rechenarbeit (i. e. konkretes Rechnen mit gegebenen Werten) ist den Schülern ja durch Taschenrechner und zunehmend auch durch den PC und geeignete Software abgenommen, es ist also wirk-

[1] »Annähernd rechteckig« soll hier zum Ausdruck bringen, daß bei einem Grundstück naturgemäß die Winkel nicht genau 90° betragen und gegenüberliegende Seiten weder exakt parallel noch exakt gleich lang sein werden.

lich nicht mehr nötig, eine Unzahl von Beispielen der Art 18,4215 : 0,004892 = ... völlig durchzurechnen. Viele glauben jedoch – im Gegensatz zu uns – dadurch würde auch um so mehr das Überschlagsrechnen, das Kopfrechnen, das Abschätzen von Ergebnissen obsolet.

Wir meinen, daß dadurch – ganz im Gegenteil – das Kopf- und Überschlagsrechnen (z. B. im Sinne von *Abschätzen der Größenordnung* gewisser Ergebnisse) an Bedeutung zunimmt. Wir sehen darin nicht nur eine *Lösungskontrolle,* wenn der Überschlag vor der eigentlichen Rechnung ausgeführt wird; die Aufmerksamkeit wird dabei auf die *Größenordnung* der Zahlen und auf den *Rechenweg* gelenkt, und zwar losgelöst vom rein mechanischen, ziffernmäßigen Rechnen. Die »Struktur« einer Aufgabe kann unbehindert von eher komplizierten Dezimal- bzw. Bruchzahlen leichter entdeckt werden.

Daß es sich dabei i. a. um einen sehr defizitären Bereich handelt, zeigt z. B. eine Untersuchung von [10] im Raume Dortmund: Von 4309 Schülern, die sich am Ende des 10. Schuljahres befanden, wurde verlangt, in folgenden drei Rechnungen auf der rechten Seite das Komma richtig zu setzen:

$$12{,}32 + 5{,}6 \cdot 7{,}3 = 5320\,,$$
$$123{,}6 \cdot 9876{,}50 = 1\,220\,735\,400\,,$$
$$224 : 0{,}16 = 1400\,.$$

Alle drei Aufgaben[2] richtig gelöst haben nur 1,6% aller Hauptschüler, 3,7% aller Realschüler und 6% aller Gymnasiasten. Die Prozentzahlen jener Schüler, die keine einzige Aufgabe richtig gelöst hatten, betrug (in gleicher Reihenfolge) 37%, 28%, 28%. Angesichts der relativ großen Stichprobe (Zuverlässigkeit!) und des »Schwierigkeitsgrades« der Aufgaben haben uns diese Prozentzahlen doch erschreckt[3]!

Auch bei »Textaufgaben« herrscht oft blindes, schematisches Rechnen vor, wobei es manchmal bei gewissen Ergebnissen zu wahren Exzessen kommt, die meist »ohne mit der Wimper zu zucken« hingeschrieben und doppelt unterstrichen werden: Züge fahren mit 5312,378941 km/h, Hausdächer haben eine Fläche von einigen Quadratkilometern, die in einer Stadt verbrauchte Gasmenge pro Tag oder pro Jahr wird auf Tausendstel Kubikmillimeter angegeben. Bezüglich Abschätzen von Größenordnungen und sinnvolle Genauigkeit wäre hier mancherorts dringend einiges zu tun! Oft sind dies Resultate von Tippfehlern am Taschenrechner, deren Sinnhaftigkeit in der gewohnten Routine nicht im geringsten in Zweifel gezogen wird.

B e i s p i e l 2 : Wenn ein Auto für eine gewisse Strecke bei einer mittleren Geschwindigkeit von 80 km/h eine Zeit von 1½ h benötigt, dann benötigt es bei einer mittleren Geschwindigkeit von 50 km/h nicht ganz doppelt so viel Zeit, also etwas weniger als 2 · 1½ h = 3 h; ungefähr 2½ h scheint als Schätzwert daher angebracht!

B e i s p i e l 3 : Wenn 17% eines bestimmten Betrages 36,20 DM ausmachen, dann werden 50% ungefähr 3 · 35 DM = 105 DM ausmachen, weil 50% nicht ganz dreimal so viel wie 17% sind und »dafür« 35 DM statt 36,20 DM angebracht erscheinen.

Wir würden solche und ähnliche Formulierungen von Schülern sogar höher einschätzen als ein auf Pfennig bzw. Hundertstel km/h genaues Ergebnis!

4 Fehlerfortpflanzung

In der sogenannten »Praxis« hat man selten mit »exakten Zahlenwerten« zu tun. Schon die Eingangswerte in die meisten Formeln (Algorithmen) sind Meß- oder Näherungswerte und daher prinzipiell mit einem gewissen Fehler behaftet (Messungen können ja eo ipso nicht wirklich genau sein!). Die Ergebnisse von Rechnungen sind daher erst recht nicht als exakt anzusehen, nur reicht für die meisten Zwecke die jeweils erreichte Exaktheit doch aus – aber leider nicht immer!

B e i s p i e l 4 : Der Durchmesser einer runden Tischplatte wird mit einem Maßband zu $d = 118$ cm gemessen. Was kann man über den Flächeninhalt dieser Platte aussagen?

Betrachtet man die 118 cm als exakten Wert für den Durchmesser, so ergibt sich für den Flächeninhalt rund 10 936 cm². Nimmt man allerdings an, daß aufgrund der Messung der wirkliche Durchmesser nur im Intervall [117,5 cm; 118,5 cm] feststeht, so ergibt sich für den Flächeninhalt das Intervall [10 843 cm²; 11 028 cm²]. Ein allfälliges Runden des Ergebnisintervalles hat immer nach außen zu erfolgen (um nie eine nichtvorhandene Genauigkeit zu behaupten); als Antwort könnte hier also stehen: Der Flächeninhalt beträgt zwischen 108 dm² und 111 dm². Dieses Prinzip des Berechnens des größtmöglichen bzw. des kleinstmöglichen Wertes heißt auch »Doppelrechnung«.

B e m e r k u n g e n : (1) Vielen »traditionellen« Beispielen kann allein durch *Doppelrechnung* ein numerischer »touch« und somit mehr Anwendungsorientierung verliehen werden!

(2) Andere »Möglichkeiten« zur Abschätzung der Auswirkung von Eingangsfehlern auf Ergebnisse (»Ausgangsdaten«) wären die *Ziffernzählregeln* (vgl. [2], [3]), die elementaren *Gesetze der Fehlerfortpflanzung* – insbesondere jene der vier Grundrechnungsarten, die mit oder auch ohne Miteinbeziehung der Differentialrechnung ($\Delta f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$) behandelt bzw. begründet

[2] Ähnliche Aufgaben werden unseres Wissens auch bei Aufnahmsprüfungen in »Höheren Technischen Lehranstalten« und »Handelsakademien« immer wieder gestellt! Wir wissen allerdings nicht, wieviel Zeit die Schüler zur Verfügung hatten und wie die Untersuchung im Detail verlief.

[3] Obwohl bei der letzten Aufgabe eigentlich gar kein Komma gesetzt zu werden braucht, glauben wir nicht, daß darin ein wesentlicher Grund des Scheiterns der Schüler gelegen ist.

werden können ([6]). Hier soll es jedoch nicht um eine Aufbereitung dieser »Verfahren« gehen, sondern vielmehr um die Ausweisung des Prinzipes Approximation als Fundamentale Idee und um die Angabe konkreter Beispiele. Die erwähnte Vielfalt der Verfahren macht eine immer wiederkehrende Behandlung des Prinzips der »Fehlerfortpflanzung« auf verschiedenen Niveaus (Spiralprinzip!) besonders gut möglich. △

Es ist u. E. besonders wichtig, in den Schülern eine gewisse Sensibilität und Einsicht in die Notwendigkeit zu schaffen, daß die sogenannte »numerische Stabilität« gewisser Verfahren durchaus untersucht werden muß! Dazu nun einige Beispiele:

Beispiel 5: Das »Rationalmachen des Nenners«, das vielleicht zu ästhetischen und algebraisch äquivalenten Ausdrücken führt, kann sich vom numerischen Standpunkt bisweilen katastrophal auswirken. So erhält man z. B. folgende (algebraische) Äquivalenz (Beachte: $97^2 - 3 \cdot 56^2 = 1$):

$$\frac{1}{97 + 56 \cdot \sqrt{3}} = 97 - 56 \cdot \sqrt{3}.$$

Diese beiden Terme sind allerdings numerisch keineswegs mehr äquivalent!

Dies ist in folgendem Sinn gemeint: Wird der Wert des Termes in Dezimalschreibweise bestimmt, so muß für $\sqrt{3}$ ein Näherungswert eingesetzt werden (man kann ja nicht unendlich viele Stellen berücksichtigen), der Wert für $\sqrt{3}$ (»Eingangswert«) ist daher naturgemäß mit einem (absoluten) Fehler e behaftet[4]. Deswegen wird auch der Wert des Termes nur ein Näherungswert sein (können), und es erhebt sich die Frage, wie sich der unvermeidbare Fehler e für $\sqrt{3}$ auf den Wert des Termes auswirkt. Beim rechten Term ist der entstehende Fehler leicht abzuschätzen:

$$\text{Fehler} = (97 - 56 \cdot \sqrt{3}) - [97 - 56 \cdot (\sqrt{3} + e)] = 56 \cdot e.$$

Wenn also der Näherungswert für $\sqrt{3}$ einen Fehler der Größe e aufweist, dann wird der Fehler des Termwertes $56 \cdot e$ betragen. Analoges kann auch beim linken Term geschehen. Hier ergibt sich:

$$\begin{aligned}\text{Fehler} &= \frac{1}{97 + 56 \cdot \sqrt{3}} - \frac{1}{97 + 56 \cdot (\sqrt{3} + e)} \\ &= \frac{97 + 56 \cdot (\sqrt{3} + e) - 97 - 56 \cdot \sqrt{3}}{(97 + 56 \cdot \sqrt{3}) \cdot [97 + 56 \cdot (\sqrt{3} + e)]} \\ &= \frac{56e}{(97 + 56 \cdot \sqrt{3}) \cdot (97 + 56 \cdot \sqrt{3} + 56e)} \\ &\leq \frac{56e}{(97 + 56 \cdot \sqrt{3})^2} \approx \frac{56e}{37634}.\end{aligned}$$

[4] Wenn für $\sqrt{3}$ z. B. der Näherungswert 1,7 genommen wird, so ist $e < 0{,}0331$.

D. h., die Auswirkung des Fehlers e des Näherungswertes für $\sqrt{3}$ ist hier rund 37634 mal (!) kleiner als beim anderen Term. In diesem Sinn sind die beiden algebraisch völlig äquivalenten Terme numerisch im höchsten Grade inäquivalent, und das »Rationalmachen des Nenners« ist hier daher vom numerischen Standpunkt total abzulehnen. Man kann hierzu leicht weitere, analoge Beispiele angeben wie $\frac{1}{10 + 3 \cdot \sqrt{11}}$ usw. (vgl. [9]).

Bemerkung: In $97 - 56 \cdot \sqrt{3}$ wird eine Differenz annähernd gleich großer Werte gebildet (der Wert der Differenz ist also sehr klein). Sehr kleine Zahlen (dem Betrag nach) sind jedoch numerisch als besonders instabil zu bezeichnen, da der relative Fehler sehr groß werden kann und somit auch jener eines weiteren Ergebnisses: Wenn z. B. von einem Wert a bekannt ist, daß er zwischen 1,9997 und 1,9999 liegt, so macht es bei der Differenz $100 - a$ fast keinen Unterschied (relativer Fehler), ob $100 - 1{,}9997 = 98{,}0003$ oder $100 - 1{,}9999 = 98{,}0001$ gerechnet wird; wenn hingegen die Differenz $2 - a$ zu bilden ist, so der Wert $2 - 1{,}9997 = 0{,}0003$ das Dreifache des Wertes $2 - 1{,}9999 = 0{,}0001$! Insbesondere wenn nun mit solchen Werten von Differenzen annähernd gleicher Größen weitergerechnet wird (z. B. in einem iterativen Algorithmus), so kann dies für die Genauigkeit des Ergebnisses »fatale« Folgen haben (besonders: Multiplikationen, Divisionen, Potenzen, Wurzeln etc., weil es bei diesen Rechenarten stark auf den relativen Fehler ankommt)! Wenn z. B. diese Differenz noch mit 10 000 multipliziert werden soll (= »Ergebnis«), so ergibt sich einerseits 980 003 bzw. 980 001 (d. h. der relative Fehler ist verschwindend klein), aber andererseits 1 bzw. 3, was ja – relativ gesehen – doch einen bedeutenden Unterschied ausmacht! △

Ein anwendungsorientiertes Demonstrationsbeispiel für eine solche *Subtraktionskatastrophe* wäre das folgende (es ist zwar thematisch in der Literatur seit langem bekannt, unseres Wissens jedoch nicht unter dem Aspekt der Subtraktionskatastrophe bei Differenzen annähernd gleich großer Werte).

Beispiel 6: Tiefe eines Schachtes (vgl. [1; S. 401 ff.], [4; S. 18 ff.])

Ein Körper fällt in einen Schacht. Den Aufprall des Körpers hört man nach $T = 3$. Wie tief ist der Schacht?

Dieses Problem führt auf eine quadratische Gleichung (1) in t, der Fallzeit des Körpers, (2) in $\bar{t}$, der vom Schall benötigten Zeit, oder (3) in s, der Tiefe des Schachtes.

Hier soll es weder um das Bilden eines zugehörigen Modells, noch um das Aufstellen bzw. Lösen der jeweiligen Gleichungen gehen, sondern nur um den oben angesprochenen Aspekt. Mit obigen Bezeichnungen könnten wir uns z. B. folgende Behandlung vorstellen:

Aus

$$T + t + \bar{t} \quad \text{und} \quad s = \frac{g}{2}\, t^2 = c \cdot \bar{t}$$

(c = Schallgeschwindigkeit) ergibt sich nach kurzer Rechnung (quadratische Gleichung):

$$t = \frac{c}{g} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{2gT}{c}} - 1\right].$$

Nimmt man nun für die Gesamtzeit z. B. den Wert $T = 3$ s und setzt man $g = 10\ \text{ms}^{-2}$ und (zum »Ausgleich« dieser Vergröberung) $c = 340\ \text{ms}^{-1}$, so kann zunächst t und dann $s = \frac{g}{2} t^2 = 5t^2$ bestimmt werden. Da i. a. $\frac{2gT}{c} \ll 1$ sein wird (bei unseren Werten $\frac{6}{34} \approx 0{,}1765$), wird im Term $\sqrt{1 + \frac{2gT}{c}} - 1$ eine Differenz von annähernd gleich großen Werten gebildet, wodurch sich Rundungsfehler (mit diesem Wert wird ja noch weitergerechnet!) beträchtlich auswirken können. Der »wirkliche« Wert für die Schachttiefe (bei diesen Werten für c und g) liegt hier bei ungefähr[5] 41,4 m. Führt man jedoch die Berechnung von s nach obiger Formel mit einer Genauigkeit von zwei Dezimalstellen (auch bei Zwischenergebnissen, d. h. Runden nach jedem Rechenschritt auf zwei Dezimalstellen) durch – dies ist durchaus schulüblich! –, so ergibt sich für s der relativ schlechte Näherungswert von 36,95 m!

Dieser Misere wird in [1] durch eine Reihenentwicklung entgangen – ein relativ komplizierter und aufwendiger Weg. Wir würden hier hingegen vorschlagen, ihr durch eine Erweiterung zu entgehen:

$$t = \frac{c}{g} \cdot \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{2gT}{c}} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2gT}{c}} + 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{2gT}{c}} + 1}$$

$$= \frac{2T}{1 + \sqrt{1 + \frac{2gT}{c}}}.$$

Obwohl hier die Wurzel im Nenner auftritt (daher scheinbar »komplizierter«), ist dieser Term für die Berechnung von t bei weitem besser geeignet, weil er numerisch stabiler ist (keine Differenzen gleich großer Werte mehr!). Mit analoger Genauigkeit (wiederum Runden nach jedem Rechenschritt auf zwei Dezimalstellen) erhält man hier den »exakten« Wert von 41,4 m für die Schachttiefe s – ein nahezu unverfälschtes Ergebnis!

[5] Nimmt man für $c = 333$ m/s und für $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$, so ergibt sich für $s \approx 40{,}5$ m. Dieser Wert dürfte u. E. auch als Richtwert für die Beantwortung der ursprünglichen Fragestellung geeignet sein!

Bemerkung: Wenn für die Zeit T realistischerweise nur $2{,}9\ \text{s} < T < 3{,}1$ s feststeht, so ist die Schachttiefe bei $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und $c = 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ überhaupt nur im Intervall [38,8 m; 44,2 m] festgelegt, wie man z. B. durch einfache Doppelrechnung leicht feststellen kann!

5 Näherungsverfahren bei anwendungsorientierten Aufgaben

5.1 Das Fixpunktverfahren

Das Fixpunktverfahren zum näherungsweisen Lösen von Gleichungen wird – wenn überhaupt – meist erst in der 11. Schulstufe behandelt. Wir bedauern, daß es erstens so selten und zweitens so spät im Unterricht behandelt wird. Es ist u. E. ein sehr »konstruktives« Näherungsverfahren, das vielfältige Aktivitäten (Umformen von Gleichungen, Zeichnen von Funktionsgraphen, Betrachten der Umkehrfunktion etc.) erfordert, bei dem aber der Begriff der »Ableitung« explizit gar nicht nötig ist, wodurch es prinzipiell auch z. B. in der 9. Schulstufe anwendbar ist. Zur Exaktifizierung könnte es ja in der 11. Schulstufe unter Einbeziehung des Differentialkalküls erneut thematisiert werden (Spiralprinzip!).

Wie z. B. in [6; S. 192 ff.] ausgeführt, kann das Lösen einer Gleichung $f(x) = 0$ auf das Suchen des Fixpunktes einer bestimmten Funktion F zurückgeführt werden ($F(x) = x$), z. B.:

$$f(x) = x^3 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = x^3 + 1 = x.$$

Das Suchen des Fixpunktes $\bar{x}$ einer Funktion F kann in gewissen Fällen sehr einfach iterativ erfolgen (Abb. 1), F heißt daher auch Iterationsfunktion zu f.

Man beginnt bei einem Startwert x_0 (in »geeigneter« Nähe von $\bar{x}$), berechnet $F(x_0) = x_1$, $F(x_1) = x_2$ usw. und kommt dadurch an $\bar{x}$ in vielen Fällen jeweils näher heran (graphisch – siehe Abbildung 1 – entspricht dem iterativen Anwenden der Funktion F das mit Pfeilen versehene »Band« zwischen Funktionsgraph und erster Mediane). Fixpunkte (Schnittpunkte des Graphen mit der ersten Mediane), die sich durch die Iteration von F ergeben – bei denen das Iterationsverfahren also konvergiert –, heißen »anziehende Fixpunkte«. Nun gibt es aber auch »abstoßende Fixpunkte«, bei denen die Iteration von F jeweils weiter weg vom Fixpunkt führt, selbst wenn x_0 beliebig nahe bei $\bar{x}$ gewählt wird (Abb. 2).

Man erkennt schnell, daß bei $|F'(\bar{x})| < 1$ (dies gilt dann auch in einer »geeigneten« Umgebung von $\bar{x}$) der Fixpunkt anziehend und bei $|F'(\bar{x})| > 1$ der Fixpunkt abstoßend ist.

Bemerkung: Hierzu ist der Begriff der Ableitung eigentlich noch gar nicht nötig, durch Zeichnen des Graphen der Funktion F sieht man einfach, ob F bei $\bar{x}$ »steiler« oder »flacher« als die erste bzw. zweite Mediane verläuft – und diese Erkenntnis genügt! △

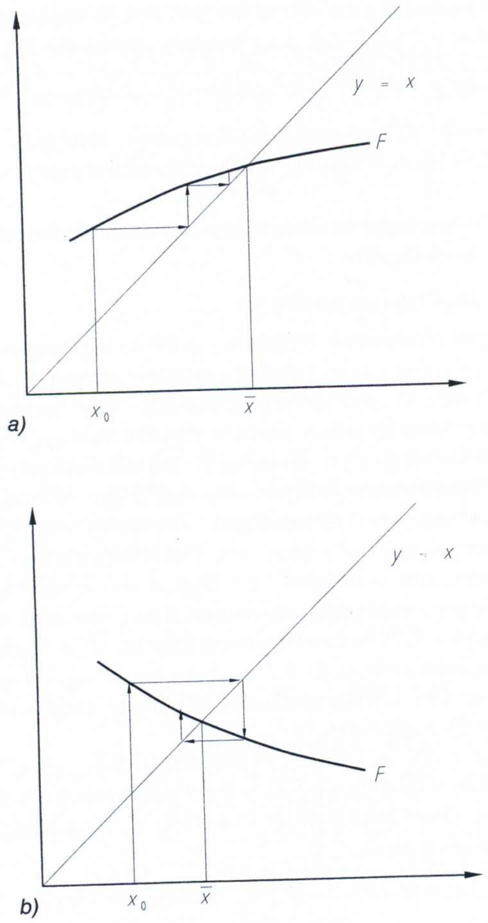

Abb. 1. Anziehende Fixpunkte

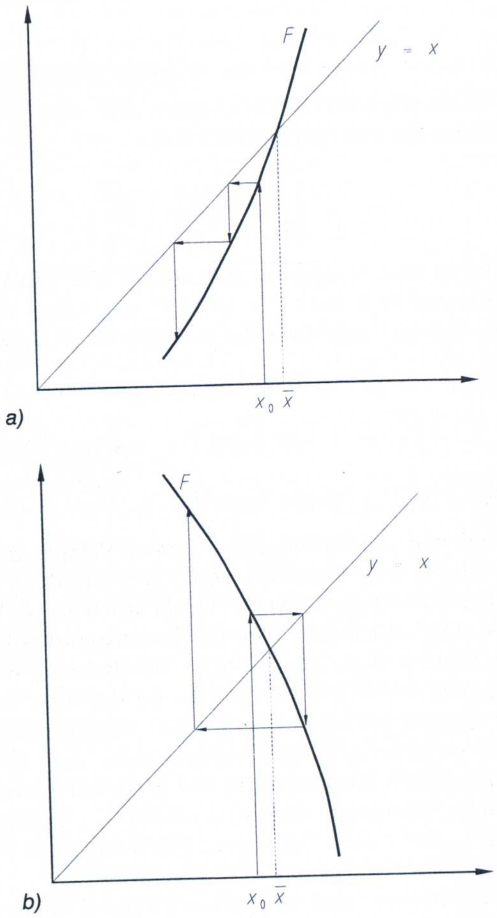

Abb. 2. Abstoßende Fixpunkte

Dem Problem eines abstoßenden Fixpunktes von F ist aber auch durch einen einfachen »Trick« leicht beizukommen. Man betrachtet in so einem Fall statt F einfach deren Umkehrfunktion F^*, die dann erstens den gleichen Fixpunkt wie F hat und der zweitens dann ein anziehender ist! Der Graph der Umkehrfunktion (Abb. 3) ist ja symmetrisch (spiegelbildlich) zur ersten Mediane – eine Tatsache, die hier echte Bedeutung erlangt und nicht – wie weitgehend üblich – der Vollständigkeit halber zwar erwähnt, aber sehr schnell wieder vergessen (weil nie gebraucht!) wird.

Da es zu einer Gleichung $f(x) = 0$ eigentlich unendlich viele Möglichkeiten gibt, sie in der Form $F(x) = x$ darzustellen, muß man u. U. sehr lange umformen, um eine Iterationsfunktion zu finden, deren Fixpunkt anziehend ist (mehrere Fehlversuche möglich – Zeichnen der jeweiligen Graphen von F und Erkennen, daß der Fixpunkt abstoßend ist; dies ist dann der Fall, wenn der Graph von F beim Fixpunkt steiler ist als die 1. bzw. 2. Mediane), oder man bestimmt gleich nach dem ersten Fehlversuch (F) die zugehörige Umkehrfunktion F^*, deren Fixpunkt garantiert anziehend ist, wenn jener von F abstoßend war. Ein Demonstrationsbei spiel für den gerade beschriebenen Sachverhalt wär folgende in einigen Schulbüchern und in der didakt schen Literatur (z. B. [7]) auch schon einigermaße beschriebene Aufgabe (aber nicht unter dem in Red stehenden Gesichtspunkt):

Beispiel 7: Wie tief taucht eine Holzkugel m Radius 1 cm und dem spezifischen Gewicht vo $0{,}75\ \frac{\mathrm{cN}}{\mathrm{cm}^3}$ im Wasser ein (Abb. 4)?

Für das Volumen V eines Kugelabschnittes d Höhe h (Kugelradius r) gilt (Vorwissen!):

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h).$$

Da das Gewicht der Kugel gleich dem Gewicht d verdrängten Wassermenge sein muß, gilt ferner

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} h^2 (3 - h),$$

woraus wir schließlich die Gleichung

$$h^3 - 3h^2 + 3 = 0$$

erhalten, die näherungsweise gelöst werden soll! Sie kann für $h \neq 0$ z. B. in die Form

$$3 - \frac{3}{h^2} = h$$

gebracht und die Iterationsfunktion $F(h) = 3 - \frac{3}{h^2}$ probiert werden. Zunächst ist dafür der Graph von F zu zeichnen (Abb. 5).

Wir erkennen, daß $F(h)$ drei Fixpunkte F_1, F_2 und F_3 besitzt, wobei einer einen negativen h-Wert hätte (F_3) und einer bei $h \approx 2{,}5$ läge. Da aber h nicht negativ sein kann und der Kugelradius $r = 1$ beträgt, muß h zwischen 0 und 2 liegen – es fallen daher die beiden Fixpunkte F_3 und F_2 als für unsere Fragestellung nicht sinnvoll weg, und es bleibt ein einziger sinnvoller Fixpunkt F_1 über. Aus dem Graph von F erkennen wir weiter, daß F_1 ungefähr bei $h \approx 1{,}5$ liegt und daß $F(h)$ bei F_1 (leider!) steiler als die erste Mediane verläuft und daher F_1 ein abstoßender Fixpunkt ist. Nun könnten wir eine »neue« völlig andere Iterationsfunktion probieren oder eben die Umkehrfunktion F^* zu $F(h) = 3 - \frac{3}{h^2}$ und den (dann anziehenden) Fixpunkt bestimmen, was wir hier auch ausführen möchten.

Die Umkehrfunktion zu $F(h) = y = 3 - \frac{3}{h^2}$ erhalten wir leicht durch

$$\frac{3}{h^2} = 3 - y \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{\frac{3}{3-y}} \quad (y < 3).$$

Um den Graphen in dasselbe Diagramm einzeichnen zu können (Abb. 5), »vertauschen« wir noch die beiden Variablen und schreiben

$$y = F^*(h) = \sqrt{\frac{3}{3-h}} \quad (h < 3).$$

Da der Fixpunkt F_1 nun anziehend ist ($h \approx 1{,}5 \Rightarrow h_0 = 1{,}5$), können wir nun die Werte $F^*(h_0) = h_1$, $F^*(h_1) = h_2$ etc. berechnen, und zwar so lange, bis sich eine sinnvolle Anzahl von Dezimalstellen nicht mehr ändert! Hier ist natürlich ein programmierbarer Taschenrechner oder ein Computer sehr von Vorteil. Nach acht Schritten bleiben hier die ersten drei Nachkommastellen bereits unverändert, und wir erhalten $\bar{h} \approx 1{,}347$. Die Kugel taucht demnach ungefähr 1,35 cm (zwischen 1,3 cm und 1,4 cm) tief ins Wasser ein – dies sind rund zwei Drittel der Kugelhöhe!

5.2 Das Newtonsche Näherungsverfahren

Auch das Newtonsche Näherungsverfahren ist im Unterricht bisweilen ein »Stiefkind«, das nur gestreift bzw. erwähnt wird, dem i. a. aber weder aus-

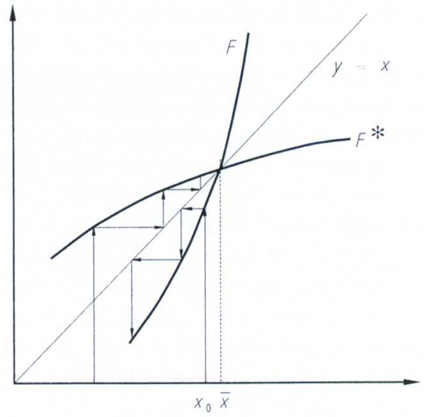

Abb. 3. Umkehrfunktion F^* bei einem abstoßenden Fixpunkt

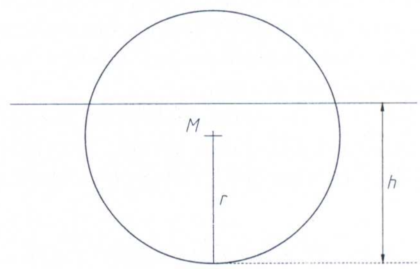

Abb. 4. Holzkugel im Wasser

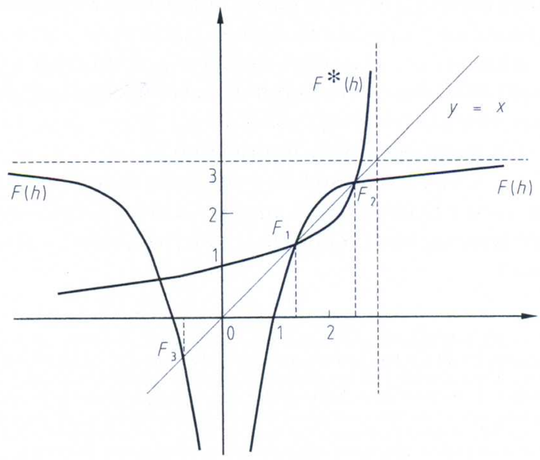

Abb. 5. Graph von $F(h)$ und $F^*(h)$

reichend Zeit noch Bedeutung beigemessen wird. Es könnte (sollte) aber das »Plateau« (i. e. das höchste Niveau) der Idee der Approximation bilden – handelt es sich doch um ein wirklich wichtiges Näherungsverfahren selbst in der »echten« Angewandten Mathematik; es ist nämlich i. a. ein Verfahren zweiter Ordnung, was eine ziemlich rasche Konvergenz bedeutet. Dies soll jedoch nicht unser Thema sein, wir möchten nur ein mögliches Beispiel angeben, bei dem auch das Bilden von Modellen sehr deutlich wird. Sowohl die Modelle sind bewußte Vereinfachungen (Approximationen), als auch die Lösungsmethode wird eine Näherungsmethode sein – die Idee der Approximation wird hier also u. E. sehr gut deutlich!

B e i s p i e l 8: Dehnung einer Brücke

Eine 2 km lange waagerechte Brücke sei an den beiden Enden »festgemacht« (Abb. 6). An einem heißen Tag dehnt sich diese Brücke um 1 m aus und wird dadurch nach »oben gekrümmt«. Um wieviel wird dabei der höchste Punkt D gehoben werden[6]?

Erste Schätzungen liegen hier i. a. weit entfernt, meistens werden Werte um 1 dm oder höchstens 1 m genannt. Die »exakte« Berechnung (»elliptische Funktionen«) würde den Schulstoff doch bei weitem übersteigen, aber Näherungslösungen können auch in der Schule betrachtet werden.

M o d e l l 1: In erster Näherung könnte man die Bögen AD und BD durch gerade Strecken ersetzen. Durch den Lehrsatz des Pythagoras erhält man dabei (in m)

$$= |\overline{AD}|^2 - |\overline{AC}|^2 = (|\overline{AD}| - |\overline{AC}|) \cdot (|\overline{AD}| + |\overline{AC}|)$$
$$= (1000{,}5 - 1000) \cdot (1000{,}5 + 1000) = 1000{,}25\,,$$

und daraus $x \approx 31{,}6$ m! Die Näherung durch gerade Strecken (»Linearisierung«) ist doch als relativ grob anzusehen, und man kann auch schon feststellen, daß der wirkliche Wert für x sicher kleiner sein wird, da die wirkliche Biegelinie ja krumm und nicht in zwei gerade Strecken zu teilen ist (»Krümmung benötigt Länge«).

M o d e l l 2: In zweiter Näherung könnte nun der Bogen ADB durch einen Kreisbogen ersetzt, und daraus x berechnet werden (Abb. 7).

Für x gilt bei einem Kreisbogen $x = r - r \cdot \cos\alpha = r \cdot (1 - \cos\alpha)$. Man muß also zunächst r und α bestimmen, um x berechnen zu können. Die folgenden zwei Gleichungen sind unmittelbar aus Abbildung 7 abzulesen:

[6] Es gibt in Wirklichkeit natürlich keine 2 km lange waagrechte Brücke in einem Stück – dies ist rein produktionstechnisch unmöglich; dieses Beispiel ist also auf den ersten Blick nicht unbedingt als »praxisorientiert« zu bezeichnen, es stellt u. E. aber trotzdem keine an den Haaren herbeigezogene Scheinanwendung dar, da es zeigt, warum es auch nicht sinnvoll wäre, die einzelnen Brückenteile zu kilometerlangen Stücken zusammenzuschweißen. Die kleinen Fugen sind gerade aus thermischen Gründen unerläßlich! Außerdem sind Brücken (insbesondere längere) i. a. nicht waagrecht, sondern von vornherein leicht nach oben gekrümmt, um eine höhere Belastbarkeit zu gewährleisten.

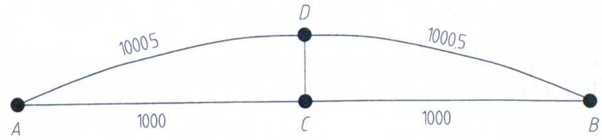

Abb. 6. Wölbung der Brücke

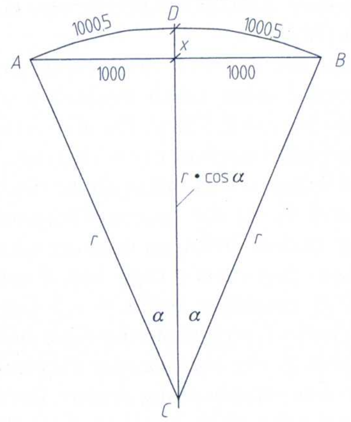

Abb. 7. Ersetzen durch einen Kreisbogen

$$1000{,}5 = r \cdot \alpha$$
$$r^2 - r^2\cos^2\alpha = 1000^2 \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot \sin\alpha = 1000\,.$$

Diese führen zur Gleichung

$$\frac{1000{,}5}{\alpha} = \frac{1000}{\sin\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \sin\alpha - \frac{1000}{1000{,}5} \cdot \alpha = 0\,.$$

Mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens (Startwert $\alpha_0 = 0{,}1$) ist bereits nach fünf Schritten der auf fünf Dezimalen genaue Wert $\overline{\alpha} = 0{,}05476$ zu erhalten. Daraus ergibt sich ein Radius von ungefähr $r \approx 18\,270$ m und schließlich der Wert für die gesuchte Distanz $x \approx 27{,}4$ m, ein Wert, der im Gegensatz zu vorher sicher zu klein sein wird, da die wirkliche Biegelinie nicht so gleichmäßig krumm wie ein Kreisbogen sein wird. Auch ohne Kenntnis des exakten Wertes kann hier also (begründet!) interpoliert und eine Hebedistanz von ungefähr 29–30 m angenommen werden!

Literatur

[1] J. Albrecht – L. Collatz: Beispiele für numerische Mathematik im Schulunterricht. – MNU **11** (1958/59) 398–403 und 452–458.

[2] R. Baumann: Näherungs- und Fehlerrechnung als notwendige Voraussetzung sinnvollen Taschenrechnergebrauchs. – PM **22** (1980) 65–77.

[3] R. Baumann: Behandlung der Fehlerfortpflanzung in den Klassen 9/10 mittels Taschenrechner. – PM **23** (1981) 193–201.

[4] J. BLANKENAGEL: Näherungsrechnen - ein Gebiet mit vielen Problemen. - MU **31** (1985) Heft 2, S. 14–25.
[5] J. S. BRUNER: Der Prozeß der Erziehung. - Berlin - Düsseldorf: Berlin-Verlag und Schwann (englisch bereits 1960 erschienen).
[6] H. HUMENBERGER - G. HANISCH - H.-C. REICHEL: Fachbereichsarbeiten und Projekte im Mathematikunterricht. - Wien: Hölder-Pichler-Tempsky 1991.
[7] G. KREBS: Näherungsweises Lösen von Gleichungen. - Aus: N. CHRISTMANN u. a.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht unter besonderer Berücksichtigung der Möglichkeiten von Rechnern. - Paderborn: Schöningh 1981, S. 91–127.
[8] H.-C. REICHEL: Sprachschulung und Spracheinsatz im Mathematikunterricht. - Aus: H. POSTEL - A. KIRSCH - W. BLUM: Mathematik Lehren und Lernen. Hannover: Schrödel 1991, S. 156–170.
[9] H. J. STETTER: Numerische Mathematik im Schulunterricht. - MPSB **16** (1969) 18–26.
[10] A. WYNANDS - D. WICKMANN: Rechenfertigkeit und Taschenrechner - Istzustand 1979/80. - ZDM **12** (1980) 162–166. □