HANS HUMENBERGER UND BERTHOLD SCHUPPAR

Flächenausgleich bei Weiß und Grau in Vierecken – der Satz von ANNE und sein Umfeld

1 Einleitung

Bei der Verallgemeinerung eines einfachen elementargeometrischen Problems treten spannende Fragen auf, die uns – wie sich durch Recherche im Nachhinein herausgestellt hat – in den Dunstkreis des sogenannten Satzes von ANNE geführt haben. Dies ist ein relativ unbekannter Satz über konvexe Vierecke, der offenbar auf den französischen Mathematiker PIERRE-LEON ANNE (1806 – 1850) zurückgeht. Uns ist nicht bekannt, wie ANNE damals seinen Satz bewiesen hat (geschweige denn, wie er darauf gekommen ist[1]), aber der Beweis in [ALSINA/NELSEN 2010, S. 116 f.; HONSBERGER 1991, S. 174 f.; bzw. DÖRRIE 1969, S. 52 ff.] ist nicht elementargeometrischer Natur und vermutlich nicht die Originalidee von ANNE. Die Idee zu diesem Beweis geht laut HONSBERGER auf den australischen Mathematiker BASIL RENNIE (1920 – 1996) zurück und verwendet geschickt ein Linearitätsargument, wenn man mit Koordinaten rechnet (analytische Geometrie). Es gibt auch einen ISAAC NEWTON zugeschriebenen Satz über Tangentenvierecke, der ein unmittelbares Korollar des Satzes von ANNE ist, auch hier ist uns leider völlig unbekannt, wie NEWTON auf diesen Satz gekommen ist bzw. wie er ihn bewiesen hat. Eine bestimmte Gerade, die auch im Folgenden eine zentrale Rolle spielen wird, ist deshalb nach NEWTON benannt („NEWTON-Gerade“, auch das war uns bis vor kurzem unbekannt).

Im Folgenden wird ein rein elementargeometrischer Beweis für den Satz von ANNE erarbeitet, von der Genese aber so, wie die Autoren (diesen Satz noch gar nicht kennend) durch Verallgemeinerung auf die entsprechenden Phänomene gekommen sind. Die ersten Abschnitte (bis zum Drachenviereck) sind u. E. auch für den Schulunterricht geeignet. Hier können Schüler/innen auch in selbstständiger Arbeit viel erkunden, indem sie mit Dynamischer Geometrie Software arbeiten (DGS als Messinstrument). Der Fall des allgemeinen Vierecks (hier kommt man dann eben zum Satz von ANNE) ist Schülern/innen vermutlich nicht mehr in selbstständiger Arbeit zumutbar, hier muss die Lehrkraft die Lernenden dabei unterstützen oder die zugehörige Begründung als Lehrervortrag planen. Auch in der Lehrerausbildung kann dieses (offenbar sehr wenig bekannte) Thema mit Studierenden in einer Veranstaltung zur Elementargeometrie gewinnbringend umgesetzt werden, wir müssen dazu aber selbst erst Erfahrungen sammeln. Inhaltlich spielt die Flächenformel für Dreiecke eine zentrale Rolle bei den folgenden Überlegungen (bei vielen Begründungen).

Hervorzuheben gilt es aber deutlich, dass hier neue Medien (DGS) einen Zugang zu diesem Thema ermöglichen, der es auch für einen forschend-entdeckenden Unterricht attraktiv erscheinen lässt, bei den explorativen Phasen (Finden bzw. experimentelles Bestätigen von Vermutungen) ist DGS sehr gut und sinnvoll einsetzbar. Dadurch ist es möglich, dass Lernende selber experimentieren, Situationen explorieren und auf Vermutungen kommen, auch

1 Unsere Recherchen zu diesem Thema (auch persönlich bei fachkundigen Kollegen) haben zu nichts geführt. Keiner der von uns befragten Kollegen hat diesen Satz überhaupt gekannt, und auch wir bis vor kurzem nicht.

wenn die zugehörige Begründung vielleicht nicht in Eigenregie gelingt. Auch dann haben sie ein Stück *Mathematik als Prozess* (und nicht nur als *Fertigprodukt*) erfahren.

2 Das Problem und seine Verallgemeinerung

Ausgangspunkt ist das folgende Problem:

In einem Quadrat wird ein beliebiger Punkt I mit den Ecken verbunden, die entstehenden Dreiecke werden abwechselnd grau und weiß gefärbt; dann ist die Summe der Flächeninhalte gleichfarbiger Dreiecke gleich groß (**Abb. 1**).

Die zugehörige Begründung sollte auch Schülern/innen nicht schwerfallen. Eine interessante Frage, die sich daraus ergibt, ist aber die Folgende (wir beschränken uns dabei auf *konvexe* Vierecke):

- Gibt es noch andere *Vierecke* (außer dem Quadrat), für die dies auch gilt? Wenn ja, welche? Begründung?

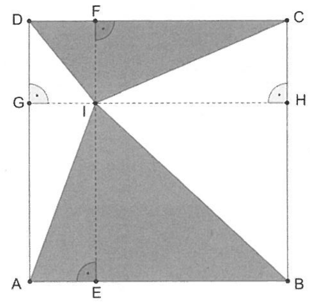

Abb. 1

Es ist nicht schwierig herauszufinden, dass dies auch für *Rechtecke* gilt (mit derselben Begründung wie bei Quadraten). Die nächsten möglichen Vierecke sind der Rhombus bzw. das Parallelogramm: Gilt das beobachtete Phänomen auch bei ihnen? Ja, nicht nur beim Rhombus, sondern allgemein beim Parallelogramm. Dies kann man sich einerseits durch die Flächenformeln für Dreiecke überlegen (**Abb. 2**): Die beiden grauen Dreiecke zusammen haben einen Flächeninhalt von $\frac{a \cdot h_a}{2}$, die weißen zusammen einen von $\frac{b \cdot h_b}{2}$ (jeweils halbe Parallelogrammfläche); dahinter steckt die Konstanz der Höhensummen: Die Höhensumme der beiden grauen Dreiecke ist konstant $h_a = |EF|$, jene der beiden weißen ist konstant $h_b = |GH|$.

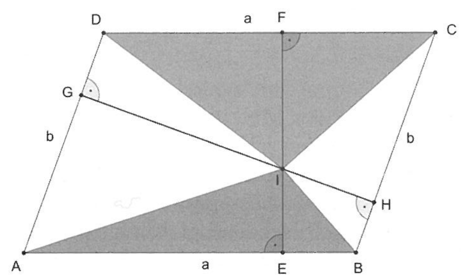

Abb. 2

Andererseits ist dies auch durch die Konstanz der Flächeninhalte bei Scherungen klar. In **Abb. 3** gilt: Die graue Flächensumme ändert sich nicht, wenn man I auf GH bewegt (daher ändert sich auch die weiße nicht, GH ist parallel zu AB bzw. DC); die weiße Flächensumme ändert sich nicht, wenn man I auf EF bewegt (daher ändert sich auch die graue nicht, EF ist parallel zu AD bzw. BC). Dadurch hat man zunächst die Konstanz der grauen und weißen Flächeninhalte; die jetzt noch fehlende Tatsache $A_{\text{grau}} = \frac{A_{\text{Parallelogramm}}}{2} = A_{\text{weiß}}$ ergibt sich dabei aus vielen speziellen Lagen von I, z. B. im Mittelpunkt oder am Rand.

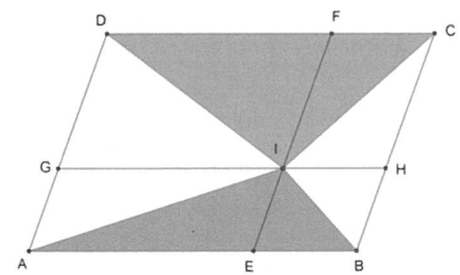

Abb. 3

3 Variation des Problems, Lösung für spezielle Vierecke

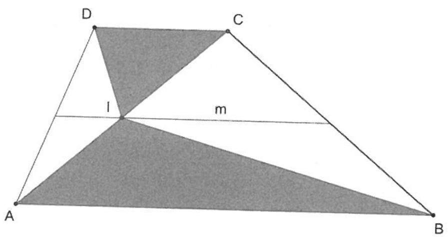

Abb. 4

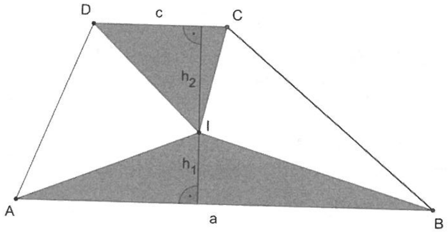

Abb. 5

Wie sieht die Lage bei anderen Vierecken aus? Da wir den Pfad der *Verallgemeinerung* ausgehend vom Quadrat zum Parallelogramm schon beschritten haben, liegt es nahe, auf diesem zu bleiben. Als nächstes spezielles Viereck bietet sich das Trapez an (gemeint sind Trapeze, die kein Parallelogramm sind, denn bei Parallelogrammen wissen wir schon Bescheid). Hier ist es zwar nicht mehr so, dass man einen Punkt beliebig wählen könnte für den angesprochenen Flächenausgleich zwischen Grau und Weiß, aber es gibt trotzdem solche Punkte. Da stellt sich natürlich sofort die Frage: Welche Punkte sind dies beim Trapez? Genauso wie beim Parallelogramm kann man begründen, dass die Punkte auf der Mittellinie die gewünschte Eigenschaft (Flächenausgleich) haben (**Abb. 4**; hier kann ein DGS als Messinstrument wieder gute Dienste leisten):

Wenn man I auf der Mittellinie m bewegt, so ändert sich die Flächensumme der beiden grauen Dreiecke nicht, die Flächensumme ergibt sich leicht zu:

$$A_{\text{grau}} = \frac{a \cdot \frac{h}{2}}{2} + \frac{c \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{(a+c) \cdot h}{4} = \frac{A_{\text{Trapez}}}{2}$$

Nun kommt eine typisch mathematische Fragestellung: Gibt es bei Trapezen außer den Punkten auf der Mittellinie vielleicht noch andere Punkte mit der Flächenausgleicheigenschaft? Denn bis jetzt wurde ja nur begründet, dass die Punkte auf der Mittellinie diese Eigenschaft haben, die Frage nach anderen solchen möglichen Punkten wurde noch nicht berührt. Um zur Aussage zu kommen „Beim Trapez ist die Menge aller Punkte mit der gewünschten Flächenausgleicheigenschaft die Mittellinie" („Ortslinie"), fehlt noch der Nachweis, dass keine anderen Punkte in Frage kommen. Aber dieser Nachweis ist beim Trapez nicht schwierig, er sollte von Schülern/innen in Eigenregie erbracht werden können: Wenn das Trapez kein Parallelogramm ist, dann muss $a \neq c$ sein, o. B. d. A. $a > c$. Für $h_1 < h_2$, d. h. $h_1 = \frac{h}{2} - x$ und $h_2 = \frac{h}{2} + x$ gilt

$$A_{\text{grau}} = \frac{a \cdot \left(\frac{h}{2} - x\right)}{2} + \frac{c \cdot \left(\frac{h}{2} + x\right)}{2} = \underbrace{\frac{(a+c) \cdot h}{4}}_{\frac{A_{\text{Trapez}}}{2}} - \underbrace{\frac{x}{2} \cdot (a-c)}_{>0} < \frac{A_{\text{Trapez}}}{2}$$

(**Abb. 5**, analog für $h_1 > h_2$).

Als nächstes untersuchen wir die Lage beim Drachen (der kein Rhombus ist[2]). Aus Symmetriegründen ist hier a priori klar, dass die Punkte auf der Symmetriediagonale e die gewünschte Eigenschaft haben (**Abb. 6**: $I \in e \Rightarrow$ Flächenausgleich).

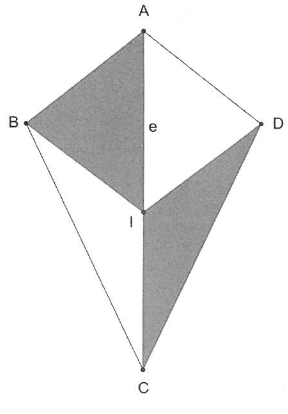

Abb. 6

Auch hier stellt sich natürlich wieder die Frage, ob es außer den Punkten auf e noch andere Punkte mit dieser Eigenschaft geben kann. DGS-Experimente (als Messinstrument) bestätigen die Vermutung, dass es wohl keine anderen Punkte mit der in Rede stehenden Eigenschaft geben wird. Aber die zugehörige Begründung fällt hier nicht mehr so leicht wie beim Trapez, wir werden zwei verschiedene Begründungen angeben. Es gäbe auch noch andere Möglichkeiten, z. B. eine, die wir erst für den Fall eines allgemeinen Vierecks vorstellen werden. Diese Vielfalt an Möglichkeiten begünstigt natürlich die Erfolgschancen, wenn Lernende dieses Problem selbständig bearbeiten.

Wenn der Punkt I nicht auf $e = AC$ liegt, so liegt er entweder links oder rechts von e, wir nehmen o. B. d. A. an, dass er rechts liegt. Wir nehmen auch an, dass er unterhalb von $f = BD$ liegt und dass $|AB| < |BC|$ und somit $|AR| < |RC|$ ist (**Abb. 7** und **Abb. 8b**, die anderen Fälle gingen analog zu behandeln).

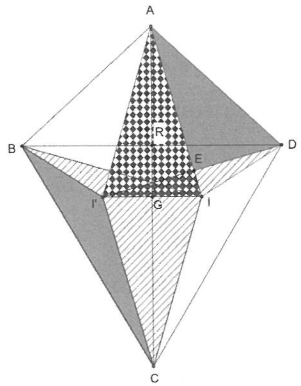

Abb. 7

1. Möglichkeit:

Wir spiegeln I an e ($\to I'$) und interessieren uns dabei für die *Veränderung* der grauen Flächensumme (**Abb. 7**). Klarerweise sind die weißen Dreiecke bei I kongruent zu den grauen bei I', d. h. die grauen Flächeninhalte von I und I' miteinander zu vergleichen ist gleichbedeutend mit dem Vergleich von Grau und Weiß bei I. Folgende Dreiecke kommen beim Übergang $I \to I'$ bei der grauen Fläche weg (in **Abb. 7** schraffiert): $\Delta CII'$, $\Delta I'IB$, $\Delta I'ID$ (im Dreieck $\Delta I'ID$ ist das Dreieck $\Delta I'IE$ zu Unrecht inkludiert, wir werden es aber auch bei der Fläche, die dazukommt, berücksichtigen, dann ist dieser Fehler wieder ausgeglichen). Folgendes Dreieck kommt beim Übergang $I \to I'$ bei der grauen Fläche dazu (in **Abb. 7** mit Schachbrettmuster): $\Delta I'IA$

Wenn man $d := |I'I|$ setzt, dann ergibt sich für die daraus resultierende Veränderung des Flächeninhalts für Grau: $\frac{d \cdot (|AR| + |RG|)}{2} - \frac{d \cdot |GC|}{2} - 2 \cdot \frac{d \cdot |RG|}{2} = \frac{d}{2} \cdot \underbrace{(|AR| - |RC|)}_{<0} < 0$

Damit kann beim Punkt I kein Ausgleich zwischen Grau und Weiß herrschen, was wir ja zeigen wollten.

[2] Denn bei Parallelogrammen wissen wir ja schon Bescheid.

2. Möglichkeit:

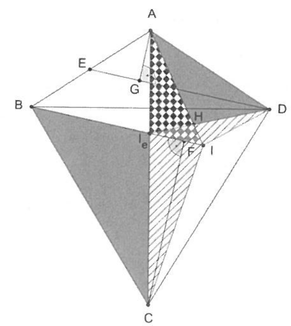

Abb. 8a

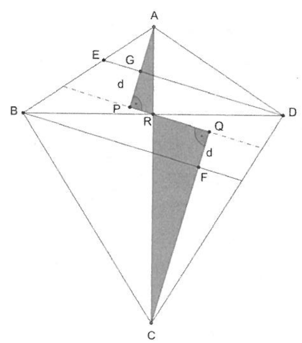

Abb. 8b

Statt der Spiegelung von I an e wird hier die Verbindung IB gezeichnet und mit $e = AC$ geschnitten, wir bezeichnen den Schnittpunkt mit I_e. Wenn wir in dieser Situation zeigen können, dass die graue Flächensumme bei I_e ***kleiner*** ist als bei I, dann sind wir fertig, denn bei I_e ist die graue Flächensumme sicher so groß wie die weiße, daher kann bei I kein Flächenausgleich zwischen Weiß und Grau stattfinden.

In **Abb. 8a** ist die graue Flächensumme bei I_e um die beiden schraffierten Dreiecke (HID und I_eCI) kleiner als bei I und um das Dreieck I_eHA mit dem Schachbrettmuster größer. Wir denken uns nun die Dreiecke HID und I_eHA ergänzt um das Dreieck I_eIH, so dass sie zu Dreiecken mit der Seite I_eI werden (diese Seite ist auch im Dreieck I_eCI vorhanden). Wenn DE parallel zu IB ist, ist der Unterschied der beiden Flächeninhalte der Dreiecke I_eID und I_eIA durch $\frac{|II_e|\cdot|AG|}{2}$ gegeben, der Flächeninhalt des Dreiecks I_eCI durch $\frac{|II_e|\cdot|CF|}{2}$.

Wir müssen nun $|AG| < |CF|$ zeigen, dann sind wir fertig. Dies ist aber nicht schwierig (**Abb. 8b**). Die Dreiecke APR und CQR sind ähnlich zueinander, und wegen $|AR| < |RC|$ folgt $|AP| < |CQ|$. Zieht man nun auf beiden Seiten der Ungleichung d ab, so folgt $|AG| < |CF|$.

Diese nun für Drachen bewiesene Eigenschaft kann wegen der Scherungs-Invarianz der Flächeninhalte direkt auf *Schrägdrachen* verallgemeinert werden (das sind Vierecke, bei denen eine Diagonale von der anderen halbiert wird).

4 Lösung für allgemeine Vierecke

Wie ist nun die Situation bei einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ (Parallelogramm)?

Hier ist zunächst der Einsatz von DGS als *heuristisches* Werkzeug zu empfehlen: Man sucht Punkte I im Viereck, die die Flächenausgleicheigenschaft erfüllen. Technischer Tipp: Wenn man die *Differenz* der Flächeninhalte grauer und weißer Dreiecke berechnet, dann sind Punkte mit Zielwert 0 leicht zu finden. Nach ein paar Versuchen wird sich der Eindruck immer mehr verstärken, dass all diese Punkte auf einer *Geraden* liegen.

Man kann das Experiment weiter verfeinern: Man sucht zwei Punkte, die (wenigstens annähernd) die Bedingung erfüllen, legt eine Gerade hindurch und bindet den Punkt I der Dreiecke an diese Gerade; die Beobachtung wird dadurch eindrucksvoll bestätigt.

Welche Gerade ist es? Kann man zwei *spezielle* Punkte konstruieren, die die Bedingung erfüllen? Die Gerade durch diese beiden Punkte ist dann die gesuchte Ortslinie.

Ansätze:

1. Extremlagen: Suche Punkte auf den Viereckseiten, die die Bedingung erfüllen; eines der vier beteiligten Dreiecke ist dann entartet. Offenbar gibt es immer zwei Gegenseiten des Vierecks, auf denen ein solcher Punkt existiert; man könnte solche Punkte auch konstruieren, aber nur mit beträchtlichem Aufwand; der Ansatz entpuppt sich als nicht besonders zielführend.
2. Leichter zu kontrollieren ist der Flächenvergleich grauer und weißer Dreiecke, wenn der gemeinsame Punkt I auf einer *Diagonale* wandert: Die jeweils benachbarten Paare (verschiedenfarbiger!) Dreiecke, die je ein Stück dieser Diagonale als Grundseite besitzen, haben bezüglich dieser Grundseiten dieselben Höhen; zwei Dreiecke eines solchen Paares sind daher flächengleich, wenn I der Mittelpunkt der Diagonale ist. Das gilt für *beide* Diagonalen; somit sind zwei spezielle Punkte gefunden, die sogar sehr leicht zu konstruieren sind!
   Wir bezeichnen die Mittelpunkte von AC und BD mit M und N.
   (An dieser Stelle heißt es in Mathematikbüchern gern „Man sieht sofort, dass M und N die Bedingung erfüllen" – wenn man die Mittelpunkte betrachtet, ist das in der Tat leicht einzusehen, aber wie kommt man darauf, dass diese Mittelpunkte eine besondere Rolle spielen? Hierzu braucht man heuristische Strategien!)

Konstruiert man nun mit DGS die Gerade $g := MN$ und bindet den Punkt I an g (vgl. **Abb. 9**), dann stellt man fest, dass die grauen und weißen Flächen tatsächlich exakt gleich groß sind; löst man I wiederum von g, dann ergibt sich: Für $I \notin g$ sind die Flächensummen verschieden.

Auch der Vergleich mit den bisherigen Ergebnissen für spezielle Vierecke verläuft positiv: Bei Trapezen liegen beide Diagonalenmitten auf der Mittellinie der Parallelseiten, diese ist in Abschn. 3 als Ortslinie erkannt; bei (Schräg-)Drachen liegt per definitionem eine Diagonalenmitte auf der anderen Diagonale, auch hier sind also die alten und neuen Resultate voll kompatibel. Wenn $M = N$ ist, dann ist die Gerade MN nicht eindeutig bestimmt, aber in diesem Fall ist das Viereck ein Parallelogramm, und das haben wir ausgeschlossen.

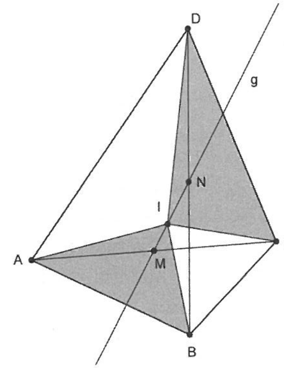

Abb. 9

Das Ergebnis ist jetzt so weit abgesichert, dass wir es als *Satz* formulieren können; es fehlt nur noch die letzte Bestätigung durch einen Beweis.

Satz („Satz von ANNE")
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, das kein Parallelogramm ist. Dann liegen alle Punkte I, für die Flächenausgleich bei den grauen und weißen Dreiecken herrscht, auf der Geraden $g = MN$ durch die beiden Mittelpunkte der Diagonalen.

Beweis
Zuerst zeigen wir elementargeometrisch: Wenn man den gemeinsamen Punkt I aller vier Dreiecke innerhalb des Vierecks auf g bewegt, dann ändern sich die Flächeninhaltssummen der grauen und weißen Dreiecke nicht. Da für die Punkte M, N der Flächenausgleich

gilt, ist damit der Beweis geführt, dass alle Punkte im Viereck, die auf g liegen, die gewünschte Eigenschaft haben.

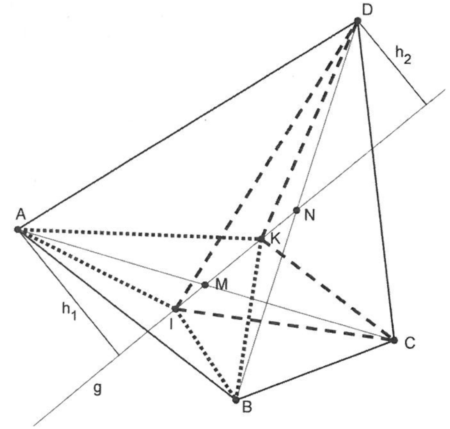

Abb. 10

Es seien I, K zwei verschiedene Punkte auf g; wir zeigen zunächst, dass die beiden „Pfeile“ $AIBK$ und $CIDK$ (vgl. **Abb. 10**: gepunktet und gestrichelt) flächengleich sind.

Da M auf g liegt, haben A und C den gleichen Abstand h_1 von g; ebenso haben B, D den gleichen Abstand h_2 von g, denn auch N liegt auf g. Beide Pfeile sind aus je zwei Dreiecken mit derselben Grundseite IK zusammengesetzt, von denen eines die Höhe h_1, das andere die Höhe h_2 hat. Also haben beide Pfeile den Gesamtflächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot |IK| \cdot (h_1+h_2)$.

Wenn wir nun den Punkt von I nach K bewegen, dann können wir die folgende Gewinn-Verlust-Rechnung für die grauen und weißen Flächen aufstellen (vgl. **Abb. 11a** vorher, **11b** nachher):

1. Das Viereck $IRKS$ (Überlappung der Pfeile) war grau und bleibt grau.
2. Die Dreiecke RKD und SKC ändern die Farbe von grau zu weiß.
3. Die Dreiecke RIA und SIB ändern die Farbe von weiß zu grau.

Da die Pfeile flächengleich sind, sind auch jeweils die beiden Rest-Dreiecke aus 2. bzw. 3., die die Farbe ändern, in der Summe flächengleich.

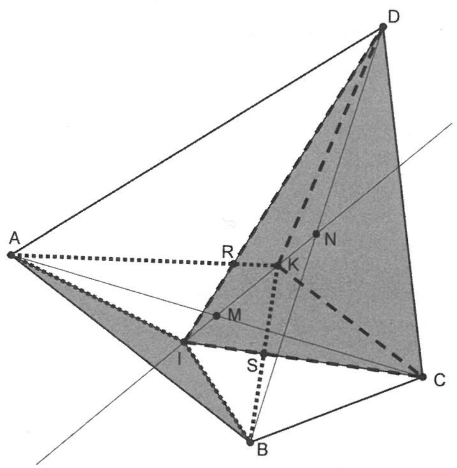

Abb. 11a

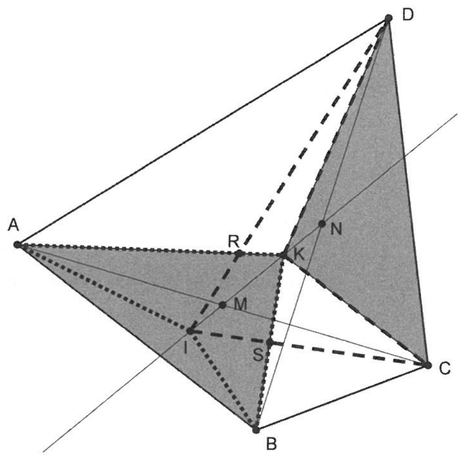

Abb. 11b

Es bleibt zu klären: Was gilt für Punkte $I \notin g$?

Wie oben gesagt, sind die Flächensummen leicht auszurechnen, wenn I auf einer Diagonale läuft; das zahlt sich auch hier aus. Für $I = M$ sind nämlich die Flächensummen gleich; bewegt man I von M weg (wir nehmen o. B. d. A. an, dass N nicht auf AC liegt, denn sonst wären wir beim Schrägdrachen – siehe oben), dann ändern sich die Flächensummen (vgl. **Abb. 12**). Denn das Dreieck MID wird grau, das Dreieck MIB wird weiß; die Dreiecke haben jedoch verschiedene Flächeninhalte, weil die Höhen von B bzw. D auf MI bzw. AC verschieden lang sind (wären sie gleich lang, dann läge N auf AC).

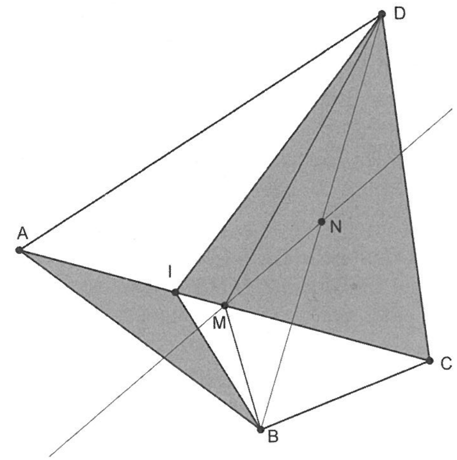

Abb. 12

Der Rest ergibt sich aus einer Beobachtung, die auf einer allgemeineren Fragestellung beruht: Für welche Punkte I ist die Flächensumme gleichfarbiger Dreiecke *konstant* (also nicht unbedingt je die Hälfte der Vierecksfläche)? Eine naheliegende Vermutung, die leicht durch DGS-Experimente bestätigt werden kann: Das ist immer dann der Fall, wenn I auf einer Parallelen p zu g läuft. Der obige Beweis für $I \in g$ ist unmittelbar auf diesen Fall übertragbar, wenn man Folgendes beachtet (vgl. **Abb. 10**; man interpretiere die Figur *dynamisch*): Wenn man die Diagonale IK eines Pfeils (Grundseite seiner Teildreiecke) auf eine Parallele zu g verschiebt, dann wird sich die Höhe eines seiner Teildreiecke vergrößern, die Höhe des anderen aber um denselben Betrag vermindern, sodass die Summe der Höhen gleich bleibt; somit ändert sich auch der Flächeninhalt des Pfeils nicht. Beide Pfeile haben also nach wie vor den gleichen Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot |IK| \cdot (h_1+h_2)$.

Fazit: Liegt I nicht auf g, dann verschiebe man I parallel zu g auf eine Diagonale (die Flächensummen bleiben dabei unverändert); für I auf der Diagonale, aber nicht auf g sind die Flächensummen verschieden (siehe oben). Damit ist der Beweis komplett.

Abschließend seien noch zwei interessante Beobachtungen aus den DGS-Experimenten erwähnt (bei Bedarf jeweils relativ leicht zu zeigen), die im obigen Beweis nicht verwendet wurden:

1. Die Schnittpunkte von g mit den Vierecksseiten teilen diese im gleichen Verhältnis.
2. Der Mittelpunkt der Strecke MN ist der Mittelpunkt des Seitenmittenvierecks.
3. Es ist eine interessante elementargeometrische Aufgabe, unabhängig vom obigen Beweis (d. h. auf eine andere Art) zu begründen, dass der in 2. angesprochene Mittelpunkt die hier zentrale Flächenausgleichseigenschaft hat.

5 Rückblick und Ausblick

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, haben wir den alten, aber nicht sehr bekannten bzw. verbreiteten *Satz von Anne* wiederentdeckt. Wir legen jedoch großen Wert auf die *Entwicklung* des Satzes: Ausgehend von einem elementaren, auch für Schüler/innen zu lösenden

Problem wird die Fragestellung weitgehend verallgemeinert und variiert, wobei grundlegende mathematische Arbeitsweisen diskutiert werden können, u. a. heuristische Strategien unterstützt von DGS-Experimenten. Schließlich wird der Satz mit *elementargeometrischen* Mitteln bewiesen; der allgemeine Beweis in Abschn. 3 ist sicherlich nicht so einfach, dass man von Schülern/innen erwarten könnte, ihn zu *finden*, aber *verständlich* ist er u. E. schon; insbesondere ist die gesamte Struktur des Beweises von Bedeutung (zur Verifikation der Ortslinien-Eigenschaft „Punkt I erzeugt Flächenausgleich" ist nachzuweisen, dass die Bedingung „I liegt auf g" hinreichend *und* notwendig ist).

Der übliche analytische Beweis des Satzes von ANNE beruht auf der folgenden Idee: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABI bei festen Punkten A,B ist eine lineare Funktion der Koordinaten von I; das Gleiche gilt dann auch für die Summe der Flächeninhalte von ΔABI und einem weiteren ΔCDI (C,D fest). Daran erkennt man, dass die analytische Geometrie zweifellos ein mächtiges Werkzeug ist, aber es erfordert natürlich einen gewissen Aufwand, dieses Werkzeug bereitzustellen.

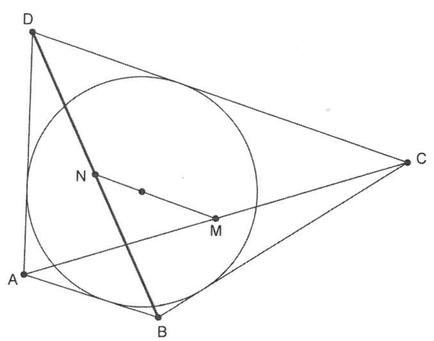

Abb. 13

Im Allgemeinen wird der Satz von ANNE in Kombination mit dem *Satz von NEWTON* genannt (vgl. **Abb. 13**):

In einem Tangentenviereck liegt der Mittelpunkt des Inkreises auf der Geraden durch die Mittelpunkte M,N der Diagonalen.

Beachtet man die charakteristische Eigenschaft der Tangentenvierecke, dass die Summen der Gegenseitenlängen gleich groß sind, dann ist dieser Satz eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von ANNE.

Die Gerade MN trägt aus diesem Grund auch den Namen *NEWTON-Gerade*. Es wäre natürlich interessant zu erfahren, in welchem Kontext NEWTON auf diesen Satz gestoßen ist, denn in der Regel sind solche Ergebnisse nicht isoliert entstanden. Derartige Informationen sind aber schwierig zu finden. Selbst unsere älteste Quelle [SERRET 1855, S. 9] erwähnt nichts über historische Zusammenhänge[3]. Es ist auch möglich, dass NEWTON selbst diesen Satz nie formuliert und bewiesen hat, dass er ihm erst posthum (von wem?) zugeschrieben wurde (warum?). Einen kleinen Hinweis liefert die folgende Fußnote [HOFMANN 1958, S. 200]:

„Die Aufgabe soll mit der Bestimmung des Mittelpunktortes aller Ellipsen zusammenhängen, die einem konvexen Viereck einbeschrieben sind. Ich habe die Stelle bei NEWTON nicht finden können."

[3] Vielleicht gibt es auch gar keine „Originalarbeit" von ANNE, in der er „seinen" Satz und einen zugehörigen Beweis veröffentlicht hat? Vielleicht hat er nur handschriftliche Notizen oder seine Erkenntnisse mündlich an Kollegen weitergegeben, die dann zu diesem Thema – unter Nennung des Namens „ANNE" – publiziert haben, z. B. [SERRET 1855].

In der Tat: Wenn man einem konvexen Viereck eine Ellipse einbeschreibt, dann liegt ihr Mittelpunkt auf der NEWTON-Geraden des Vierecks. (Vgl. **Abb. 14**; zu einem gegebenen Viereck gibt es sehr viele einbeschriebene Ellipsen, wie man sie konstruiert, sei dahingestellt.)

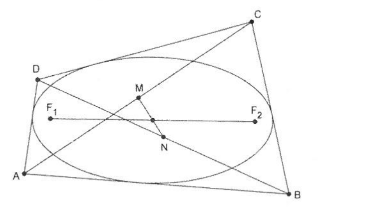

Abb. 14

Man kann den Beweis dieses Satzes auf den speziellen Satz von NEWTON zurückführen: Wenn man das Viereck mit der einbeschriebenen Ellipse in Richtung ihrer großen Halbachse staucht, sodass die Ellipse zum Kreis wird, dann hat man ein Tangentenviereck mit Inkreis; die beteiligten Eigenschaften bleiben erhalten, d. h. der Mittelpunkt der Ellipse wird zum Inkreismittelpunkt, und die gestauchte NEWTON-Gerade des Vierecks ist auch die NEWTON-Gerade des gestauchten Vierecks.

Es ist durchaus plausibel, dass NEWTON das Problem, den geometrischen Ort der Mittelpunkte einbeschriebener Ellipsen zu bestimmen, in dieser Weise auf Tangentenvierecke zurückgeführt hat; der Kern der Lösung hat sich dann als „Satz von NEWTON" verselbstständigt, und dieser ist wiederum zum Korollar des „Satzes von ANNE" geworden. Dieses Phänomen ist in der Mathematik nicht selten zu beobachten: Wird ein Problem gelöst, dann befreit sich ein wesentlicher Teil der Lösung vom ursprünglichen Kontext und beginnt ein eigenes Leben, er kann neue Begriffe generieren und sogar zum Kern einer neuen Theorie werden (dazu ist natürlich erheblich mehr Substanz nötig als in unserem Mikro-Beispiel). Es ist dann i. A. nicht leicht, die Entstehung nachzuvollziehen.

Die Qualität geometrischer Probleme und Sätze manifestiert sich u. a. darin, dass sie mit anderen Themen in enger Beziehung stehen. Das gilt auch für den Satz von ANNE, wie die folgenden weiteren Eigenschaften der Diagonalenmitten und der NEWTON-Gerade zeigen sollen.

Die Gerade MN wird manchmal auch als „GAUß'sche Gerade" bezeichnet, denn es gilt der *Satz von GAUß*:

Wenn das Viereck $ABCD$ kein Trapez ist, dann betrachte man die Schnittpunkte E bzw. F der Paare von Gegenseiten (Geraden) AB,CD bzw. AD,BC; O sei der Mittelpunkt der Strecke EF. Dann liegen die Punkte M,N,O auf einer Geraden.

Weiterhin ist der *Satz von EULER* zu erwähnen:
In einem beliebigen Viereck sei $e := |AC|$, $f := |BD|$, $g := |MN|$; dann gilt: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4 \cdot g^2$

(Vgl. **Abb. 15**.) Hierzu sei ein Beweis skizziert, der vor allem wegen seiner Struktur reizvoll ist: Der allgemeine Fall wird mithilfe einer geschickten Rechnung auf einen einfach zu beweisenden Spezialfall zurückgeführt (fehlende Details bitte selbst ergänzen).

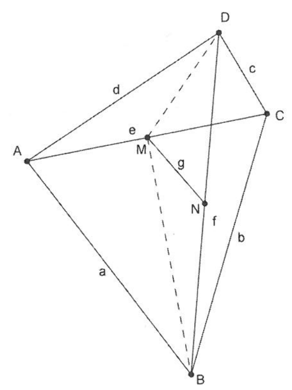

Abb. 15

a) Für Parallelogramme ist $M = N$, also $g = 0$; zudem gilt $a = c$ und $b = d$, somit wird die Behauptung reduziert auf $2 \cdot (a^2 + b^2) = e^2 + f^2$; das ist mit dem Satz des PYTHAGORAS leicht zu beweisen.

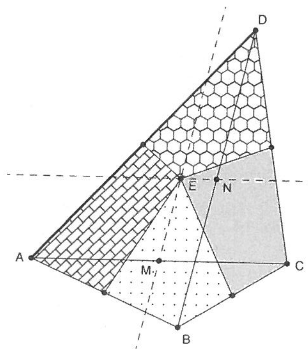

Abb. 16

b) Übertragen auf ein Dreieck (halbes Parallelogramm) lautet der Satz aus a) wie folgt (um die Vierecks-Bezeichnungen nicht zu stören, nennen wir die Dreiecksseiten jetzt x,y,z): Ist s_x die Seitenhalbierende von x, dann gilt $y^2+z^2=\frac{x^2}{2}+2\cdot s_x^{\;2}$.

c) Im allgemeinen Viereck wird nun der Satz über Dreiecke aus b) dreimal angewendet: Im ΔABC bzw. ΔACD gilt $a^2+b^2=\frac{e^2}{2}+2|BM|^2$ bzw. $c^2+d^2=\frac{e^2}{2}+2\cdot|DM|^2$; im ΔBDM gilt $|BM|^2+|DM|^2=\frac{f^2}{2}+2\cdot g^2$. Addieren der ersten beiden Gleichungen und Einsetzen der dritten ergibt sofort die Behauptung.

Abschließend sei noch ein kleines Problem genannt, das mit den Diagonalenmitten zusammenhängt [aus SIMON 1906, S. 156]; vgl. **Abb. 16**; eine bedeutend ältere Literaturquelle[4] dazu ist [BRUNE 1841]:

Man zeichne die Parallele zur Diagonale AC durch N und die Parallele zu BD durch M; sie schneiden einander in einem Punkt E. Verbindet man E mit den Seitenmitten des Vierecks, dann wird das Viereck in vier *flächengleiche* Teile zerlegt!

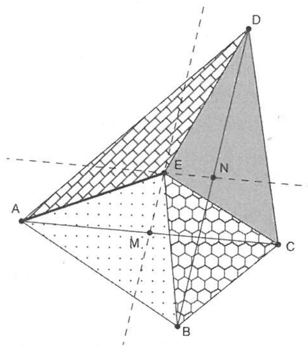

Abb. 17

Eine Variation dieser Figur führt direkt auf ein weiteres Problem: Verbindet man E mit den Eckpunkten des Vierecks, dann sind nicht mehr alle Teile flächengleich, aber immerhin noch die jeweils gegenüberliegenden Dreiecke (vgl. **Abb. 17**).

Die Figur ist ähnlich gebaut wie bei unserem ursprünglichen Problem des Satzes von ANNE, nur die Frage ist eine andere. Man kann das Problem wie folgt verallgemeinern: Für welche Punkte I ist ein einziges Paar gegenüberliegender Dreiecke flächengleich? Vermutlich wird sich wiederum eine Gerade ergeben, und wenn man die beiden zu den jeweiligen zwei Dreieckspaaren gehörenden Geraden zum Schnitt bringt, dann erhält man den Punkt E.

Literatur

[1] ALSINA, C., NELSEN, R. B. (2010): *Charming Proofs: A Journey Into Elegant Mathematics*. Dolciani Mathematical Expositions 42; The Mathematical Association of America (dt. Übers.: *Bezaubernde Beweise*. Berlin Heidelberg 2013; Springer).
[2] BRUNE (1841): *Eine Eigenschaft des Vierecks*. Crelle Journal, Band XXII, S. 379f.
[3] DÖRRIE, H. (1969): *Mathematische Miniaturen*. Wiesbaden; Verlag Dr. Martin Sändig (Neudruck der Ausgabe von 1943)
[4] HOFMANN, J. E. (1958): *Zur elementaren Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene*. L' enseignement mathématique, Band 4, Heft 1.
[5] HONSBERGER, R. (1991): *More Mathematical Morsels*. Dolciani Mathematical Expositions 10; The Mathematical Association of America.
[6] SERRET, PAUL J. (1855): *Des méthodes en géométrie*. Paris; Mallet-Bachelier.
[7] SIMON, MAX (1906): *Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert*. Leipzig; Teubner.

[4] Wir danken Herrn JÖRG STARK für diesen Hinweis.