Wie können die komplexen Zahlen in die Mathematik gekommen sein? – Gleichungen dritten Grades und die Cardano-Formel

von Hans Humenberger, Wien

In diesem Aufsatz wird der Bogen gespannt von geometrischen Veranschaulichungen algebraischer Zusammenhänge, die bei der Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung eine Rolle gespielt haben könnten, bis hin zur spannenden Geschichte der Entdeckung der Lösungen dieser Gleichungen (16. Jhdt.). In diesem Zusammenhang kamen ja die komplexen Zahlen erstmals in die Mathematik herein, sie blieben aber noch sehr lange Zeit obskure Objekte. Die meisten Mathematiker dieser Zeit und auch noch viel später haben die komplexen Zahlen als absurd abgetan, es ist ein großes Verdienst von R. Bombelli und G. Cardano, Ausdrücke der Form $\sqrt{-a}$ *mit* $a > 0$ *nicht gleich verdammt, sondern sie zugelassen und mit ihnen gerechnet zu haben.*

1. Geometrische Veranschaulichungen algebraischer Zusammenhänge

1.1 Dreidimensionale Veranschaulichungen kubischer Binomialformeln

Gerolamo CARDANO (1501 – 1576) veranschaulichte die kubische Binomialformel $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ geometrisch (siehe Abb. 1), indem er die einzelnen Terme als Volumenteile eines Würfels mit Kantenlänge $a+b$ interpretierte: Zwei Würfel ($a \cdot a \cdot a$, $b \cdot b \cdot b$) und zwei Tripel jeweils gleicher Quader („Platten“: $a \cdot a \cdot b$, „Balken“: $b \cdot b \cdot a$). Je eine solche Platte und ein solcher Balken könnten zu einem etwas größeren Quader (Platte) vereinigt werden $a \cdot b \cdot (a+b)$, so dass man auch schreiben kann: $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$.

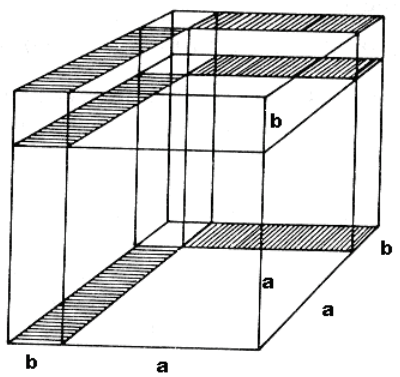

Abb. 1: Geometrische Veranschaulichung von $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$

Analog kann die dritte Potenz einer Differenz interpretiert werden: $(u-v)^3 + 3uv(u-v) = u^3 - v^3$.

Darauf werden wir später noch zurückkommen. Diese Beziehung war vielleicht ein entscheidender Punkt zur Entstehung der Idee, bei der Lösung kubischer Gleichungen die Variable x als Differenz zweier Werte anzusetzen ($x := u - v$) – eine Idee, die bekanntlich zum Erfolg führte (siehe unten).

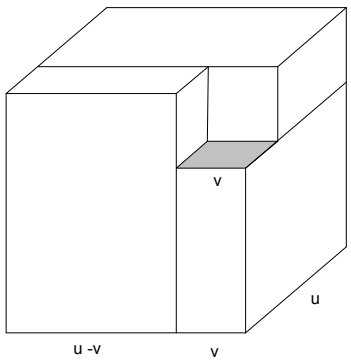

Abb. 2: Geometrische Veranschaulichung von $(u-v)^3 + 3uv(u-v) = u^3 - v^3$

Diese geometrischen Interpretationen algebraischer Formeln waren damals viel verbreiteter als heute, die Sprache der Geometrie dominierte noch sehr stark. Vermutlich war CARDANO nicht der erste, der solche Interpretationen bei den kubischen Binomialformeln anwandte, diese waren wahrscheinlich schon vor ihm bekannt.

Vielleicht war er aber der erste, der sie so aufgeschrieben hat.

1.2 Quadratische Gleichungen und ihre geometrischen Lösungen

Die Griechen (z. B. Diophant ca. 250 n. Chr.) kannten noch keine negativen Zahlen, auch im Mittelalter (z. B. Al Chwarizmi, ca. 800 n. Chr.) und noch weit darüber hinaus waren diese unbekannt. Die quadratischen Gleichungen konnten sie daher nicht so elegant „alle auf einmal“ durch eine einzige Lösungsformel „erschlagen“:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Für quadratische Gleichungen waren um 1500 die entsprechenden Lösungsformeln längst bekannt (nicht in der heutigen Form, aber eben doch); sowohl die Koeffizienten als auch die Lösungen von Gleichungen mussten positive Zahlen sein, andere ließ man auch zu dieser Zeit noch nicht zu.

Man ließ auch keine Subtraktionen in ihren Standardangaben zu, sondern brachte den entsprechenden Term dann auf die andere Seite (positiv, Addition). Unsere Standardangaben $ax^2 + bx + c = 0$ bzw. $x^2 + px + q = 0$ waren damit klarer Weise nicht möglich, da „links ja etwas mit Sicherheit Positives“ steht!

Man hatte also 5 Standardfälle quadratischer Gleichungen:

	Allgemeine Form	Normalform
I	$ax^2 = bx$	$x^2 = px$
II	$ax^2 = c$	$x^2 = q$
III	$ax^2 + bx = c$	$x^2 + px = q$
IV	$ax^2 = bx + c$	$x^2 = px + q$
V	$ax^2 + c = bx$	$x^2 + q = px$

Die zugehörigen Lösungen in der Normalform waren (die ersten beiden Fälle waren natürlich trivial):

	Lösung (Normalform)
I	$x = p$
II	$x = \sqrt{q}$
III	$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$
IV	$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$
V	$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ oder $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Die ersten beiden Fälle sind in der Tat sofort klar (nur positive Lösungen interessieren). Die Fälle III und IV waren noch die einfacheren, V war der unangenehmste, denn während es bei III und IV jedenfalls genau eine positive Lösung gab (Existenz und Eindeutigkeit, die andere negative Lösung interessierte nicht), war dies bei V nicht mehr so: erstens gibt es nur dann Lösungen, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$, also $p^2 \geq 4q^2$ ist, und dann eben nicht nur eine (positive), sondern eben zwei verschiedene (bei $p^2 = 4q^2$ auch nur eine)!

Zur Begründung der jeweiligen Formeln benutzte man damals (statt der *algebraischen* Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat) die Sprache der Geometrie: Quadrate und Produkte wurden als Flächeninhalte von Quadraten und Rechtecken interpretiert. Dabei werden Flächenstücke (teilweise trickreich und für uns oft erst im Nachhinein, d. h. bei bekannter Formel, zu sehen) passend umgelegt. In jedem Fall sind auch (geometrische) vollständige Quadrate im Spiel.

Fall III: $x^2 + px = q$ (Normalform) mit p, q, x positiv!

An ein Quadrat mit Seitenlänge x (Flächeninhalt x^2) wird ein Rechteck px angefügt, so dass ein Rechteck mit Flächeninhalt $x^2 + px = q$ entsteht ($x^2 + px$ ist nach Voraussetzung q, vgl. Gleichung); vom Rechteck px wird die Hälfte abgeschnitten und so umgelegt, dass mit der grauen Ergänzungsfläche $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ insgesamt ein Quadrat mit Seitenlänge $x + \frac{p}{2}$ entsteht:

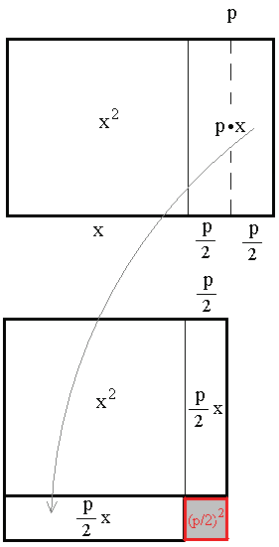

Abb. 3: Fall III

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \underbrace{x^2 + 2\left(\frac{p}{2}x\right)}_{=q \text{ nach Vor.}} + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Daraus erhält man unmittelbar $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Fall IV: $x^2 = px + q$ (Normalform) mit p, q, x positiv!

Das Quadrat x^2 wird zerlegt in ein Rechteck px und einen Streifen q mit Länge x und Breite $x - p$ (vgl. Abb. 4). Vom Streifen q wird die Länge $p/2$ abgeschnitten und umgelegt, so dass mit dem schraffierten Ergänzungsquadrat $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ ein Quadrat mit Seitenlänge $x - \frac{p}{2}$ entsteht (warum sind beides Quadrate?): $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$.

Daraus erhält man unmittelbar $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$.

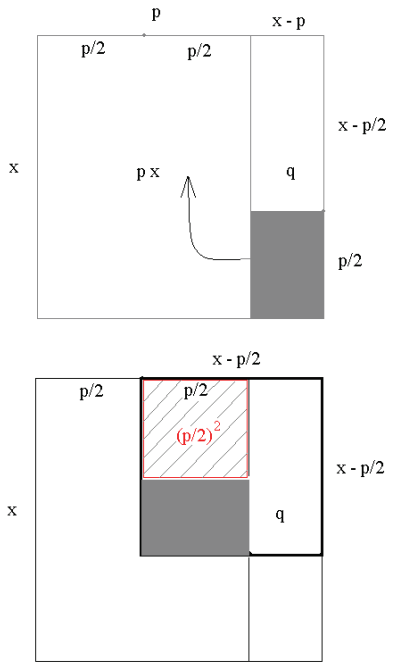

Abb. 4: Fall IV

Die beiden Fälle in V sind ähnlich gelagert und seien den Leserinnen und Lesern überlassen.

An dieser Stelle sei auch an die geometrischen Veranschaulichungen der Binomischen Formeln erinnert, die auch damals schon bekannt waren (vielleicht sogar besser als heute, da damals geometrische Veranschaulichungen viel besser etabliert waren: die Algebra war noch nicht so weit entwickelt wie heute). Hier eine Veranschaulichung in einer etwas anderen Form als meist üblich:

$$(u - v)^2 + 2v(u - v) = u^2 - v^2.$$

Diese Veranschaulichung kann ebenfalls für die quadratische Gleichung im Fall III dienen: $x^2 + px = q$ (die Skizze ist ja analog zur obigen im Fall III).

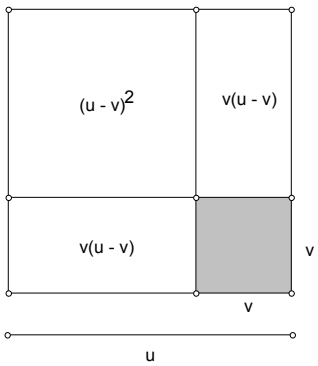

Abb. 5

Wenn man die Unbekannte x als **Differenz zweier Zahlen** u und v auffasst, d. h. $x := u - v$ setzt, ergibt sich wegen $(u-v)^2 + 2v(u-v) = u^2 - v^2$

ein Gleichungssystem für u und v:

$$\begin{aligned} I: &\quad 2v = p \\ II: &\quad u^2 - v^2 = q \end{aligned}.$$

Daraus ergibt sich sofort $v = p/2$ bzw. $u = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$ und damit $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$. Es gab und gibt noch eine ganze Vielzahl verschiedener anderer geometrischer Interpretationen bei quadratischen Gleichungen, und viele von ihnen waren den italienischen Mathematikern der Renaissance sicher bekannt. Diese letzte Version kann neben der ganz zu Beginn gegebenen Version der räumlich-geometrischen Interpretation der kubischen Binomialformel $(u-v)^3$ ein weiterer Grund dafür sein, dass man auch im Fall *kubischer* Gleichungen den genialen Trick versuchte, x als **Differenz zweier Zahlen** aufzufassen (siehe unten).

Man könnte glauben, dass die Lösungsformel bei manchen Kombinationen im Fall V einen negativen Radikanden liefert, schon bei quadratischen Gleichungen Anstoß gab, sich mit Wurzeln aus negativen Zahlen zu beschäftigen. Immerhin waren die quadratischen Gleichungen bestens bekannten und in vielen Facetten gut studiert. In der primitivsten Form: z. B. der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ mit Gewalt eine „Lösung" zuzuschreiben und diese mit dem Symbol $\sqrt{-1}$ zu bezeichnen. Oder: $x^2 - 2x + 2 = 0$ mit den „Lösungen": $1 \pm \sqrt{-1}$, denn die „naive" Probe (hier für $1 + \sqrt{-1}$) ergibt:

$$\left(1+\sqrt{-1}\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{-1}\right) + 2 =$$
$$1 + 2\sqrt{-1} - 1 - 2 - 2\sqrt{-1} + 2 = 0$$

Es war aber nicht so. Solche Gleichungen betrachtete man eben als sinnlos, unlösbar, etc. Dies wird ja auch durch graphische Darstellungen unterstützt, denn der Graph von $f(x) := x^2 - 2x + 2$ (Parabel) schneidet die x-Achse eben nicht!

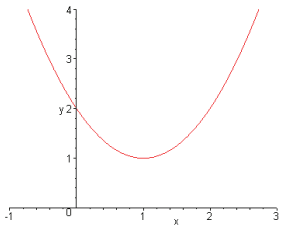

Abb. 6

2. Kubische Gleichungen

Die Mathematiker suchten schon lange ein Pendant zur Lösung von Gleichungen dritten Grades, also eine *Lösungsformel* zur Lösung von Gleichungen der Art $y^3 + ay^2 + by + c = 0$.

(*Geometrische* Lösungen als Schnittpunkte von *Kegelschnitten* waren schon längst bekannt.)

O. B. d. A. kann man den Koeffizienten von y^3 als 1 setzen – „normiertes Polynom" – denn wenn dieser ungleich 1 ist, so kann man die ganze Gleichung durch diesen dividieren (vorausgesetzt er ist ungleich 0; aber sonst läge ja gar keine kubische Gleichung vor).

Obwohl die resultierende Formel nach CARDANO benannt ist, war er nicht ihr erster Entdecker, er war dies in gewisser Weise erst in dritter Linie – siehe unten.

2.1 Die spannende Geschichte um die so genannte Cardano-Formel

Als erstem gelang es Scipione DEL FERRO (1465 – 1526, Professor an der Universität Bologna), Gleichungen der Art $x^3 + px = q$ (mit $p, q > 0$: negative Zahlen waren noch nicht verbreitet!) algebraisch zu lösen, d. h. eine explizite Formel $x = x(p,q)$ zu finden, die in jedem Fall die Lösung lieferte.

„De cubo & rebus aequalibus numero"

$$x^3 \quad + \quad px \quad = \quad q \quad ,$$

so hießen diese Gleichungen damals.

Insgesamt ist die Geschichte um diese Gleichungen ein packendes Kapitel und

könnte sicher Grundlage eines spannenden Buches oder eines Filmes sein. Sie sei hier deswegen etwas ausführlicher geschildert (vgl. z. B. NAHIN 1998 oder die Internetseite `http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Tartaglia.html`).

DEL FERRO veröffentlichte seine Entdeckung aber nicht, obwohl er wusste, dass Generationen von Mathematikern danach gesucht hatten. Heutzutage wäre dies ziemlich unüblich, dass ein Mathematiker wichtige Resultate nicht veröffentlicht. Es besteht ja die Gefahr, dass jemand anderer die Lorbeeren der Erstpublikation erntet, und auf dem Weg zu einer Professur sind Publikationen ja eine notwendige Voraussetzung. Er konnte sich das leisten, weil er erstens schon Professor an der Universität in Bologna und zweitens nebenbei auch unabhängiger Geschäftsmann und daher nicht abhängig von einem weiteren Karrieresprung war. Man verdiente damals auch Geld durch öffentliche Problemlösewettbewerbe. Der Sieger gewann das Preisgeld, den Ruhm und, wenn er Glück hatte, die finanzielle Unterstützung eines weiteren reichen Gönners.

Fast hätte DEL FERRO sein Wissen mit ins Grab genommen, er hat sein Geheimnis nur ganz wenigen guten Freunden verraten, z. B. seinem Schwiegersohn Hannibal NAVE (auch Mathematiker, der an der Universität von Bologna auch seine Nachfolge antrat) und auch – fast schon am Sterbebett – seinem Schüler Antonio Maria FIORE (Bologna). Dieses Wissen war natürlich eine gute Waffe in solchen Wettbewerben, so dass es auch ein nur durchschnittlicher Mathematiker wagen konnte, einen eigentlich bedeutenderen zu so einem Wettkampf herauszufordern.

So geschah es auch: Im Jahr 1535 versuchte FIORE aus der Kenntnis dieser Lösungsformel einen Vorteil zu ziehen, indem er einen der besten Mathematiker Italiens dieser Zeit, Nicolo FONTANA (1499 – 1557, Mathematiklehrer in Venedig) zu einem mathematischen Disput aufforderte. Dies lief meist so ab, dass man einander 30 Aufgaben stellte und zur Bearbeitung 40 – 50 Tage Zeit gab. FONTANA ist heute besser bekannt unter dem Namen TARTAGLIA („Stotterer“: seine Sprachstörung hatte er seit seinem 12. Lebensjahr, als er von einem französischen Soldaten mit einem Schwert schwer verwundet wurde). FIORE stellte TARTAGLIA 30 Aufgaben, die alle die Gleichung $x^3 + px = q$ betrafen. TARTAGLIA verzweifelte fast, weil er die Aufgaben zunächst nicht lösen konnte. Aufgrund der Aufgabenstruktur war aber klar, dass FIORE über eine Lösungsformel verfügen würde, d. h. ihm war klar, dass es Lösungen zu diesen Problemen *gibt*. Für TARTAGLIA gab es also noch einen Grund mehr, nach so einer Lösungsformel zu suchen: Erstens natürlich der Wettbewerb selbst, den man ja nicht verlieren wollte, zweitens aber das Wissen, dass es offenbar eine Lösung gibt: dies beflügelt natürlich schon und erhöht die Frustrationstoleranz. Dafür gibt es in der Geschichte der Mathematik ja auch zahlreiche Beispiele: Wenn bekannt ist, dass ein Problem eine Lösung hat, finden manche andere dieselbe Lösung selbständig oder eine ähnliche oder eine ganz andere. Ohne das Wissen um die Existenz der Lösung hätte man vielleicht früher aufgegeben!

Nach zahllosen schlaflosen Nächten fand schließlich TARTAGLIA doch die Lösung für diesen Gleichungstyp selbständig (nur knapp vor der Abgabe der Lösungen!). Durch diesen Kraftakt konnte TARTAGLIA alle 30 Aufgaben von FIORE lösen, so dass er als eindeutiger Sieger aus diesem Wettbewerb hervorging, denn FIORE brachte bei TARTAGLIAs Aufgaben nicht allzu viel heraus.

Wie DEL FERRO hielt auch TARTAGLIA sein Wissen geheim, erstens weil man dieses Wissen bei solchen Wettbewerben ja ganz gut gebrauchen kann, zweitens weil er „demnächst“ ein Buch veröffentlichen wollte. Die Nachricht vom Sieg TARTAGLIAs verbreitete sich natürlich wie ein Lauffeuer unter den Experten und auch Gerolamo CARDANO (1501 – 1576) hörte davon.

Er war primär eigentlich Mediziner (Professuren in Mailand, Pavia, Bologna; 1524 schon kurze Zeit Rektor der Universität Padua) aber auch mathematisch sehr interessiert und versuchte selbst das Problem der kubischen Gleichungen zu lösen, zunächst aber leider erfolglos.

1539 kontaktierte er TARTAGLIA mit der Bitte ihm die Lösung mitzuteilen, was dieser zunächst verweigerte, da TARTAGLIA diese Erkenntnis zu einem späteren Zeitpunkt selbst publizieren wollte. Nach einigen Versuchen konnte er TARTAGLIA aber doch dazu bewegen, ihm die Lösungsformel mitzuteilen, unter der Bedingung, dass CARDANO versprach, niemandem davon zu erzählen und nichts darüber zu schreiben, bevor nicht TARTAGLIA selbst das Resultat publiziert hatte. Dieses Versprechen hat CARDANO auch gegeben, es sollte dann aber schlussendlich gebrochen werden.

CARDANO veröffentlichte in diesem Jahr zwei mathematische Bücher, publizierte aber die Formel wie versprochen nicht. TARTAGLIA war sich aber zwischendurch sicher, einen groben Fehler begangen zu haben, als er die Lösungsformel an CARDANO weitergab, und beantwortete freundliche Briefe von CARDANO an ihn sehr verbittert damit, dass seine Bücher ohnehin nur Trivialitäten enthielten – der Beginn einer langen Feindschaft!

TARTAGLIA hat CARDANO nur die Lösungsformel mitgeteilt, nicht aber die Herleitung, d. h. die Begründung dazu. Zusammen mit seinem Assistenten Lodovico FERRARI (1522 – 1565) hat CARDANO schließlich doch eine Begründung der Formel von TARTAGLIA gefunden. Mehr noch, es ist ihnen auch gelungen, *alle* Arten kubischer Gleichungen zu lösen und FERRARI konnte auf geniale Art und Weise sogar die allgemeine Lösung von Gleichungen vierten Grades auf jene der Gleichungen dritten Grades zurückführen.

Zu dem kamen noch zwei Dinge hinzu: Erstens machte TARTAGLIA keine Anstalten seine Formel zu publizieren, und zweitens erfuhren CARDANO und FERRARI, dass TARTAGLIA gar nicht der erste war, der die Formel entdeckte: Auf einer Reise trafen sie 1543 Hannibal NAVE, den Schwiegersohn von DEL FERRO, der ihnen geerbte Papiere von DEL FERRO zu lesen gab, die die Lösung des Problems schon enthielten.

Nun fühlte sich CARDANO nicht mehr an sein Versprechen gebunden, nichts darüber zu schreiben und zu publizieren, bevor nicht TARTAGLIA selbst darüber geschrieben hatte. 1545 publizierte CARDANO sein wichtigstes mathematisches Buch *Ars magna*, in dem er sein Wissen über kubische und Gleichungen vierten Grades zusammenfasste. Er erwähnte in diesem Buch sehr wohl die Geschichte, dass die ersten beiden DEL FERRO und TARTAGLIA waren, die eine Lösungsformel für bestimmte kubische Gleichungen unabhängig voneinander gefunden hatten, dass er sie von TARTAGLIA auf sein Drängen hin mitgeteilt bekam.

Diese Publikation gab Anlass zu einer sehr heftigen und berühmten Kontroverse in der Geschichte der Mathematik zwischen TARTAGLIA und CARDANO. TARTAGLIA war unversöhnlich wegen des nicht zu leugnenden Wortbruches, warf ihm Plagiat vor, aber CARDANO sah sich im Recht: Erstens war TARTAGLIA nicht der erste, der die Formel gefunden hatte, zweitens hat er die Entstehungsgeschichte der Formel mit zugehörigen Namen ja wahrheitsgemäß aufgeschrieben (er hat also nicht so getan, als ob all das auf seinem Mist gewachsen wäre), drittens hatte er mit seinem Studenten FERRARI ja auch selbst einiges auf diesem Gebiet geleistet und viertens wollte er vielleicht die so wichtige Formel vor der Fachwelt nicht mehr länger geheim halten. Schließlich ging es um ein Problem, an dem man schon viele Jahrhunderte arbeitete und von dem es noch im Buch *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità* (1494) von Luca PACIOLI (1445 – 1517) hieß, es sei *unlösbar*. Tartaglia wurde angeblich auch von einem Mailänder Gericht zum öffentlichen Widerruf seiner Anschuldigungen verurteilt (Wikipedia). Jedenfalls ist die Formel heute nach CARDANO benannt, ob zu Recht, sei dahingestellt.

Im Jahr 1548 kam es in Mailand zu einem weiteren solchen Duell zwischen dem duellerfahrenen TARTAGLIA und dem in Sachen mathematischer Duelle sehr unbedarften FERRARI. TARTAGLIA kam am ersten Tag in Schwierigkeiten und reiste heimlich in der Nacht ab, so dass FERRARI, der die Belange um die kubischen und biquadratischen Gleichungen offenbar doch noch besser verstanden hatte, als strahlender Sieger hervorging.

2.2 Die Gleichung $x^3 + px = q$ mit $p, q \geq 0$ (*)

Der entscheidende Trick bei der Lösung ist, x als Differenz zweier anderer Größen aufzufassen, also

$$x := u - v \quad \text{mit} \quad u > v. \qquad (**)$$

Bemerkung: *Wie* CARDANO darauf kam, ist nicht belegt. Er hat nur aufgeschrieben und gezeigt, *dass* es so geht. Sicher spielten dabei geometrische Überlegungen (Volumina) eine Rolle, die meisten Mathematiker dachten damals auch bei Gleichungen und allgemein bei algebraischen Beziehungen *geometrisch*. Vielleicht liegen zwei entscheidende Punkte in den beiden oben schon erwähnten Zusammenhängen: erstens die geometrischen Veranschaulichungen der kubischen Binomialformel $(u-v)^3 + 3uv(u-v) = u^3 - v^3$, die ja eine ganz offensichtliche Verwandtschaft mit (*) hat, zweitens der oben beschriebene Ansatz schon bei gewissen quadratischen Gleichungen.

Setzt man (**) in (*) ein, so ergibt sich $(u-v)^3 + p(u-v) = q$. Vergleicht man dies mit $(u-v)^3 + 3uv(u-v) = u^3 - v^3$ aus der geometrischen Darstellung ganz zu Beginn, so ergeben sich daraus zwei Gleichungen für die Unbekannten u und v, deren Differenz $x = u - v$ wir eigentlich suchen:

$$p = 3uv \qquad \text{(A)}$$

$$q = u^3 - v^3 \qquad \text{(B)}$$

Dieses Gleichungssystem kann nun relativ leicht gelöst werden! Wenn wir dann $u = u(p,q)$ und $v = v(p,q)$ in Abhängigkeit von p und q haben, so haben wir dadurch auch eine explizite Darstellung für die gesuchte Differenz $x(p,q) = u(p,q) - v(p,q)$, die Lösung des Problems.

Aus (A) erhalten wir zunächst $v = \frac{p}{3u}$; dies setzen wir in (B) ein und erhalten

$$u^3 - \left(\frac{p}{3u}\right)^3 = q \quad \Rightarrow \quad \left(u^3\right)^2 = q \cdot \left(u^3\right) + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für u^3 (Typ IV), und für quadratische Gleichungen gab es ja bereits Lösungsformeln (es wurden nur die positiven Lösungen gezählt):

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

bzw. wenn man sich eben auf die positive Lösung beschränkt:

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Wegen $v^3 = u^3 - q$ ist

$$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

und damit

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Nun sind wir am Ziel:

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Dies ist die berühmte „CARDANO-Formel“. Alternativ dazu kann man wegen „$\sqrt[3]{-1} = -1$“ auch schreiben:

$$\boxed{x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

Beide Schreibweisen sind gleichwertig, beide kommen in der Literatur vor; wir werden uns im Folgenden primär auf die zweite beziehen.

Dies ist in der Tat immer eine (und die *einzige*!) *reelle* Lösung der Ausgangsgleichung $x^3+px=q$ mit $p,q>0$; sie ist sogar immer *positiv*, was ordentliche Lösungen damals zu sein hatten.

Bemerkung: Schon CARDANO wusste, dass es in diesem Fall genau eine reelle Lösung gibt, vielleicht so: *Dass* es eine positive reelle Lösung gibt, ist durch die CARDANO-Formel klar; es kann keine negativen Lösungen geben, denn sonst wäre die linke Seite der ursprünglichen Gleichung negativ, die rechte positiv. Es kann auch nicht zwei verschiedene positive Lösungen $x_1>x_2>0$ geben, denn sonst wäre $x_1^3+px_1>x_2^3+px_2$ und es können nicht beide $=q$ sein!

2.3 Ein Abstecher zu Rafael Bombelli

Bevor es chronologisch mit CARDANO und *anderen kubischen* Gleichungen weiter geht, bleiben wir noch kurz bei diesem Gleichungstyp $x^3+px=q$ und machen aber einen Sprung vom Jahr 1545 ins Jahr 1572, zu Rafael BOMBELLI (1526 – 1572). Er publizierte in seinem Todesjahr 1572 drei Bände eines auf fünf Bände angelegten Werkes *Algebra* (zu den anderen Bänden reichte sein Leben leider nicht). Natürlich hatte er das Werk von CARDANO (*Ars Magna*) gelesen und war auch an den kubischen und biquadratischen Gleichungen interessiert. Er beschäftigte sich auch mit diesen. Z. B. liefert die CARDANO-Formel bei der Gleichung

$$x^3+6x=20$$

mit p = 6 und q = 20 die (eindeutige!) Lösung

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}} \\ &= \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} \end{aligned},$$

eine sehr kompliziert anmutende Zahl.

Alleine durch Probieren erhält man hier schnell die Lösung x = 2. (Vielleicht hat diese Lösung auch CARDANO gesehen, sie aber nicht erwähnt, weil er sie nicht erklären konnte?) Kann so ein komplizierter Ausdruck wirklich genau 2 ergeben? Ja, heutzutage könnte das der Taschenrechner dies *bestätigen*, aber eine zufriedenstellende *Erklärung* kann dies ja wohl nicht sein (wenn es nur um einen konkreten numerischen (Näherungs-)Wert ginge, könnte man die Gleichung ja von vornherein *numerisch*, d. h. näherungsweise lösen).

Eine Begründung kann durch

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^3=10+6\sqrt{3}\,,\ \left(1-\sqrt{3}\right)^3=10-6\sqrt{3}$$

erfolgen, denn dann ist ja $x=\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)=2$. Die CARDANO-Formel hat also die Zahl **2** ziemlich gut in einen komplizierten Wurzelterm **versteckt**; aber wie kommt man von $10+6\sqrt{3}$ auf die zugehörige 3. Wurzel: $1+\sqrt{3}$?

BOMBELLI schreibt leider nicht, wie er darauf gekommen ist, vielleicht ungefähr so: Die Beschäftigung mit den 3. Wurzeln (in der CARDANO-Formel kamen ja solche vor!) hat BOMBELLI zunächst zu einem einfachen Rechenresultat gebracht (Formeln für die 3. Potenz eines Binoms gab es ja): 3. Potenzen „konjugierter“ Zahlen sind ihrerseits „konjugiert“:

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)^3=r+s\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(a-b\sqrt{3}\right)^3=r-s\sqrt{3}$$

In der Schreibweise mit 3. Wurzeln:

$$\sqrt[3]{r+s\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt[3]{r-s\sqrt{3}}=a-b\sqrt{3}$$

Dadurch kann BOMBELLI schlagartig klar geworden sein, dass es also für die 3. Wurzeln in $x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ jeweils eine vereinfachte Darstellung „geben muss“, denn in Summe kommt ja 2 heraus

(die Wurzeln heben sich weg): $2=\left(a+b\sqrt{3}\right)+\left(a-b\sqrt{3}\right)=2a$, also $a=1$. Damit konnte er auch b bestimmen aus $\left(1+b\sqrt{3}\right)^3=10+6\sqrt{3}$, nämlich $b=1$ (durch „Koeffizientenvergleich“ ergeben sich die Gleichungen $9b^2+1=10$ und $b\left(b^2+1\right)=2$).

Auch durch einen zunächst völlig unbestimmten Ansatz $\left(a+b\sqrt{3}\right)^3=10+6\sqrt{3}$ und „Koeffizientenvergleich“ kann man zum Ziel kommen (ohne zu verwenden, dass $a = 1$ wegen $x = 2$ sein muss):

Die beiden entscheidenden Gleichungen, die man hier bekommt, sind

$$a(a^2+9b^2)=10 \quad \text{und} \quad b(a^2+b^2)=2.$$

Solche nicht linearen Gleichungssysteme sind *allgemein* nicht leicht zu lösen (sie führen ihrerseits wieder auf eine Gleichung 3. Grades!), aber man kann (in diesem Fall) sein Glück ja unter den *ganzzahligen* Werten *versuchen*. In der zweiten Gleichung sieht man: wenn ein Produkt ganzer Zahlen 2 ergeben soll, so muss ja ein Faktor 1 und der andere 2 sein, also $a = 1$ und $b = 1$. Mit diesen Werten ist auch die 1. Gleichung erfüllt, also haben wir eine Lösung „zufällig“ gefunden.

Dieses Arbeiten mit dritten Wurzeln war eine große Leistung BOMBELLIS, die sich später noch bezahlt machen sollte (siehe *casus irreducibilis*). Leider schreibt er nicht, *wie* er auf diesen Umgang mit 3. Wurzeln gekommen ist.

Doch nun zurück zu CARDANO und den anderen kubischen Gleichungen.

2.4 Die Gleichung $x^3=px+q$ mit $p,q\geq 0$

Negative Koeffizienten waren nicht im allgemeinen Gebrauch und man suchte sie zu vermeiden, so dass die Gleichung $x^3-px=q$ mit $p,q>0$ so weder geschrieben noch behandelt wurde, statt dessen schrieb man $x^3=px+q$ mit $p,q>0$ und betrachtete dies als völlig neue Gleichung, bei der man wieder „von vorne“ anfangen musste.

Dies ist aus heutiger Sicht natürlich umständlich und entsprach damals einfach dem Zeitgeist; noch dazu wurde ja im obigen Fall nirgendwo von der Nichtnegativität von p bzw. q wirklich Gebrauch gemacht, sie ging gar nicht in die Rechnung ein; alle Schritte bleiben gültig, wenn man p durch $-p$ (mit $p>0$) ersetzt, d. h.:

Die Lösung der Gleichung $x^3=px+q$ mit $p,q>0$ ist gegeben durch:

$$\boxed{x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

Nun machte CARDANO gemeinsam mit seinem Schüler FERRARI noch eine weitere wichtige Entdeckung, dass sich nämlich die allgemeine Gleichung 3. Grades

$$y^3+ay^2+by+c=0$$

durch einen kleinen Trick auf die reduzierte Form, in der kein quadratisches Glied mehr vorkommt, überführen lässt[1]. Setzt man nämlich $y=x-\frac{a}{3}$, so ergibt sich $x^3+px=q$ mit $p=b-\frac{1}{3}a^2$ und $q=-\frac{2}{27}a^3+\frac{1}{3}ab-c$.

Wer also die reduzierten Gleichungen 3. Grades $x^3+px=q$ bzw. $x^3=px+q$ lösen kann, der hat auch die Lösung jeder beliebigen Gleichung 3. Grades!

Nun schien also irgendwie das allgemeine Problem (dessen Lösung so lange ersehnt wurde!) geknackt zu sein, so dass man sich also diesbezüglich zur Ruhe setzen konnte. Dies war aber nicht so, was auch CARDANO wusste und nun erläutert

[1] Auch die Rückführung der Lösung der allgemeinen Gleichung 4. Grades auf jene von Grad 3 gelang FERRARI durch einen genialen Trick!

werden soll. Denn die oben gefundene neue Formel

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

hat einen deutlichen Pferdefuß: Unter den Quadratwurzeln stehen Terme, die negativ sein können!

An zwei Beispielen soll diese „neue“ Formel getestet werden:

$$x^3=6x+9$$

hat hiernach die Lösung 3, was ja auch richtig ist (27 = 18 + 9):

$$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{3}\right)^3}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{81}{4}-8}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{81}{4}-8}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1}=2+1=3$$

$x = 3$ ist hier wirklich die einzige reelle Lösung; sie ist sogar wieder positiv, der Graph der zugehörigen Funktion $f(x):=x^3-6x-9$ sieht aus wie in Abb. 7.

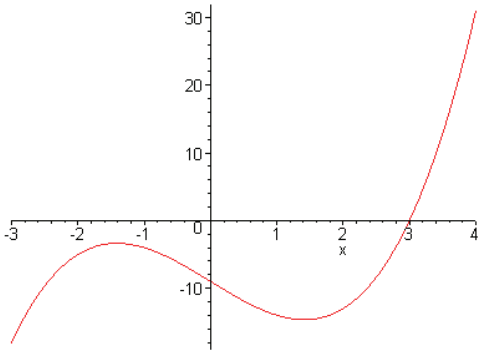

Abb. 7

Nun probieren wir dies an der nur geringfügig anderen Gleichung (BOMBELLI, 1572)

$$x^3=15x+4:$$

Wieder durch Probieren wird klar, dass hier $x = 4$ hier eine Lösung ist. Der Graph der zugehörigen Funktion $f(x)=x^3-15x-4$ sieht aus wie in Abb. 8.

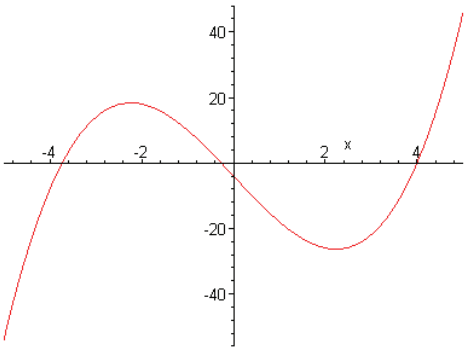

Abb. 8

Die CARDANO-Formel ergibt hier

$$x=\sqrt[3]{\frac{4}{2}+\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{15}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{4}{2}-\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{15}{3}\right)^3}}$$

$$=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-125}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-125}}$$

$$=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\,.$$

Mit (*)

$$\sqrt{-121}=\sqrt{121\cdot(-1)}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{-1}=11\sqrt{-1}$$

kann man höchstens noch schreiben:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

$$=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}\,.$$

Die Gültigkeit des „Rechengesetzes“ (*) muss hier zunächst vorausgesetzt werden. Dies war der erste Schritt von BOMBELLI, solche Monster wie $\sqrt{-121}$ oder $\sqrt{-1}$ überhaupt irgendwie zuzulassen, nicht gleich Halt zu machen und die Rechnungen als sinnlos abzutun, sondern einen ersten Umgang mit ihnen und damit ein Weiterkommen irgendwie zu ermöglichen. Heute würde man aus algebraischer Sicht vielleicht dazu sagen: „Permanenzprinzip bei Zahlbereichserweiterungen“, BOMBELLI war also ein Vorläufer dessen.

Wie man’s aber dreht und wendet: Es treten unter der Quadratwurzel nun negative Zahlen auf! Mit anderen Worten, die CARDANO-Formel scheitert hier!

Nun konnte man es sich nicht mehr so leicht machen wie bei quadratischen Gleichungen der Form $x^2+1=0$ und sagen: „das ist mal wieder eine sinnlose Aufgabe, es gibt da eben keine Lösung“, denn alleine

durch Probieren bekommt man die (sogar positive!) Lösung $x = 4$.

Für dieses erstaunliche Phänomen gab es ja im Prinzip nur zwei mögliche Erklärungen: Entweder die CARDANO-Formel ist in manchen Fällen wertlos, unzuverlässig bzw. gar *falsch*, oder diese *imaginäre* Antwort der CARDANO-Formel war in Wirklichkeit doch nur eine versteckte Schreibweise für eine *reelle* Zahl? Sollte also an diesen imaginären Zahlen $\sqrt{-121}$ oder $\sqrt{-1}$ am Ende doch was dran sein?

Genau dies war in der Tat **DER** Grund, sich mit ihnen näher zu beschäftigen, sie als Symbole, Denkgegenstände bzw. „Zahlen" überhaupt zuzulassen und nicht als Irrsinn abzutun. Insbesondere Leonhard EULER (1707 – 1783) hat hier Enormes geleistet. Sie blieben aber eigentlich bis C.F. GAUß für die meisten Mathematiker obskure Objekte, bis sie eine *geometrische Veranschaulichung*[2] in der *Zahlenebene* bekamen.

Es gibt bei der Gleichung $x^3 = 15x + 4$ sogar drei reelle Lösungen, aber die CARDANO-Formel sagt uns, dass es *keine* Lösung zu geben scheint!

Vielleicht ist aber auch hier eine reelle Lösung irgendwie durch die CARDANO-Formel versteckt, ähnlich wie oben die Zahl 2 kompliziert darin versteckt war?

Zu diesem Behufe müsste es uns gelingen, Terme der Art $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$ bzw. $\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$ einfacher darzustellen, d. h. diese 3. Wurzeln rechnerisch zu ziehen.

[2] Dies ist ein Beleg dafür, dass auch in der *abstrakten* Wissenschaft *Mathematik* die *Grundvorstellungen und Veranschaulichungen eine große Rolle spielen*. Auch heutzutage haben die Mathematiker(innen) von ihren (Forschungs-)Objekten klare *Vorstellungen* im Kopf: Es handelt sich um für sie vertraute Objekte, die für andere oft sehr abstrakt erscheinen. Ohne diese Vorstellungen, die den Forschungsgegenstand in einer gewissen Weise zum Leben erwecken, könnten auch professionelle Mathematiker nicht erfolgreich sein in ihrer Forschung.

Es kann einem „gelingen", wenn man die involvierten Quadratwurzeln aus negativen Zahlen einfach als Symbole hinnimmt und mit diesen einfach naiv rechnet, so wie man es von den anderen Zahlen her gewohnt ist. Dies ist ein großes Verdienst von BOMBELLI! CARDANO sprach von „geistigen Qualen" die man für einen Moment bei Seite legen müsse, um solche Rechnungen durchzuführen, d. h. $\sqrt{-121}$ wie eine normale Zahl zu behandeln und mit ihr unverblümt zu rechnen.

Mit $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 =$

$$= (2)^3 + 3\cdot 2^2\left(\sqrt{-1}\right) + 3\cdot 2\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3$$

$$= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 + (-1)\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

d. h. $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} = 2+\sqrt{-1}$

und analog $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = \ldots = 2-11\sqrt{-1}$

bzw. $\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} = 2-\sqrt{-1}$

erhalten wir für die Lösung nach CARDANO $x = \left(2+\sqrt{-1}\right) + \left(2-\sqrt{-1}\right) = 4$.

Dabei stellt sich allerdings wieder die Frage, wie man ausgehend von $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$ auf $2+\sqrt{-1}$ kommt. Muss man dafür Hellseher sein?

BOMBELLI hat das Symbol $\sqrt{-1}$ zunächst einfach akzeptiert und hat damit unverblümt gerechnet, ähnlich wie oben mit $\sqrt{3}$ (als die 2 in CARDANOs Formel versteckt war). Vielleicht hat BOMBELLI wieder so ähnlich wie folgt gedacht:

Die Beschäftigung mit den 3. Wurzeln könnte ihn auch in diesem Fall zu einem einfachen Rechenresultat gebracht haben: 3. Potenzen „konjugierter" Zahlen sind ihrerseits „konjugiert":

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)^3 = r+s\sqrt{-1} \Leftrightarrow \left(a-b\sqrt{-1}\right)^3 = r-s\sqrt{-1}$$

In der Schreibweise mit 3. Wurzeln:

$$\sqrt[3]{r+s\sqrt{-1}} = a+b\sqrt{-1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{r-s\sqrt{-1}} = a-b\sqrt{-1}$$

Dadurch kann BOMBELLI in Anlehnung an oben wieder klar geworden sein, dass es

also für die 3. Wurzeln in $x = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$ vielleicht wieder jeweils eine vereinfachte Darstellung geben muss, denn in Summe soll sich ja 4 ergeben (die Wurzeln aus negativen Zahlen heben sich weg): $4 = \left(a+b\sqrt{-1}\right)+\left(a-b\sqrt{-1}\right) = 2a$,

also $a = 2$ (wenn die CARDANO-Formel die offensichtliche Lösung 4 liefern sollte).

Damit konnte er auch b bestimmen aus $\left(2+b\sqrt{-1}\right)^3 = 2+11\sqrt{-1}$, nämlich $b = 1$ (durch „Koeffizientenvergleich" ergeben sich die Gleichungen $4-3b^2 = 1$ und $b(12-b^2) = 11$).

Die 4 war also ähnlich wie oben die 2 in CARDANOs Formel *versteckt*, wenn man bereit ist „zwischendurch" Wurzeln aus negativen Zahlen zuzulassen, die sich eben dann ohnehin aufheben:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \\ &= \left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right) = 4 \end{aligned}$$

So half BOMBELLIs Ansatz für $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3}$ im Prinzip auch hier[3], nur mit $\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{3}$, und die CARDANO-Formel kann also doch noch „gerettet" werden.

Solche Rechnungen mit Wurzeln aus negativen Zahlen (also „komplexen Zahlen") gaben immer wieder Anlass zu Unbehagen und zur Verwunderung: Wie können zur Beschreibung von reellen Zahlen diese komplexen Zahlen (Monster, Unzahlen, etc.) nötig sein? So hat z. B. Leibniz $\sqrt{-1}$ einmal eine „Amphibie zwischen Sein und Nichtsein" genannt, Euler hat $\sqrt{-1}$ einmal mit „weder nichts, noch kleiner als nichts, noch größer als nichts" beschrieben,

Hadamard hat einmal gesagt: "The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain."

Jedenfalls bleiben dabei noch mindestens zwei Fragen offen:

1. Wie weiß man, welche „komplexe Zahl" die 3. Wurzel aus einer gegebenen „komplexen" Zahl, z. B. aus $46+37\sqrt{-1}$, ist? In der CARDANO-Formel tauchen ja immer solche 3. Wurzeln auf. Muss man dazu eine Eingebung (vom Wind oder von Gott) bekommen, wenn die Zahlenverhältnisse nicht so einfach wie oben sind?

2. Wo bleiben die anderen reellen Lösungen? Wir wissen ja, dass es in unserem Beispiel drei reelle Lösungen gibt. Liegen diese Lösungen vielleicht auch irgendwo in der CARDANO-Formel versteckt?

Die erste Frage gab natürlich Anlass, sich genauer mit komplexen Zahlen zu beschäftigen, insbesondere eben, wie man aus solchen die 3. Wurzel zieht. Auch die zweite Frage kann erst mit der Theorie der *komplexen Zahlen* geklärt werden, hier soll es aber „nur" um die Darstellung gehen, wie sie vielleicht in die Mathematik kamen.

Literatur:

Internet: `http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Tartaglia.html`).

NAHIN, P. G. (1998): An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$. Princeton University Press, Princeton.

[3] Auch hier kann man übrigens (bei diesen einfachen Zahlenverhältnissen!) durch „Koeffizientenvergleich" beim zunächst völlig unbestimmten Ansatz $\left(a+b\sqrt{-1}\right)^3 = 2+11\sqrt{-1}$ zum Ziel kommen (ohne zu verwenden, dass wegen $x = 4$ gelten muss: $a = 2$), wenn man sich auf *ganze* Zahlen beschränkt und dadurch eine Lösung „zufällig" findet.

Anhang 1: Casus Irreducibilis

In Fällen mit drei reellen Lösungen sollte man ja eigentlich die wenigsten Schwierigkeiten mit der CARDANO-Formel erwarten! Trotzdem traten die Schwierigkeiten (Quadratwurzeln aus negativen Zahlen) nur in solchen Fällen auf (siehe die beiden obigen Beispiele der zweiten Gattung).

Dies ist kein Zufall, denn man kann sich mit Differentialrechnung davon überzeugen, dass der Radikand der Quadratwurzel genau dann negativ ist, wenn es drei verschiedene reelle Lösungen gibt.

Wir wissen, dass es bei der ersten Gattung der reduzierten Form $x^3 + px = q$ mit $p, q > 0$ immer genau eine positive reelle Lösung gibt. Bei der zweiten Gattung $x^3 = px + q$ mit $p, q > 0$ kommt es eben auf das Vorzeichen von $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ an, ob es Schwierigkeiten gibt: Bei $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ gibt es die erwähnten Schwierigkeiten.

Wir betrachten dazu die zugehörige Funktion $f(x) := x^3 - px - q$ mit $p, q > 0$. Wir berechnen $f'(x) := 3x^2 - p$ und sehen, dass die beiden Extremstellen bei $x = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}$ (Nullstellen von f'), d. h. symmetrisch zur y-Achse liegen. Die Funktionswerte an diesen Stellen („Extremwerte“) bezeichnen wir mit E_1 und E_2:

$$E_1 = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} - p\sqrt{\frac{p}{3}} - q = -\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} - q$$

bei $x = \sqrt{\frac{p}{3}}$,

$$E_2 = -\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} + p\sqrt{\frac{p}{3}} - q = \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} - q$$

bei $x = -\sqrt{\frac{p}{3}}$.

E_1 ist sicher negativ während E_2 beide Vorzeichen haben kann, je nach den Werten von p bzw. q. Nun ist klar, dass die x-Achse genau dann dreimal von f geschnitten wird, wenn $E_2 > 0$ ist – siehe Abb. 9.

D. h. die notwendige und hinreichende

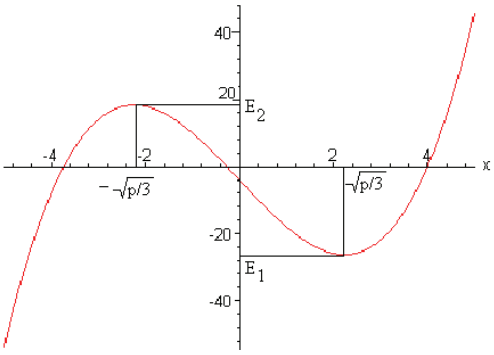

Abb. 9

Bedingung für drei verschiedene reelle Nullstellen ist in diesem Fall $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} - q > 0$ bzw. $4 \cdot \frac{p^3}{27} > q^2$ bzw. $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$ bzw. $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ und das ist genau die Bedingung dafür, dass in der CARDANO-Formel negative Zahlen unter der Quadratwurzel stehen.

Mittels des Wurzelsatzes von Vieta erkennt man auch, dass erstens die Summe der drei Nullstellen 0 ergeben muss (Koeffizient von x^2 ist 0 !) und dass es zweitens eine positive und zwei negative Nullstellen geben muss.

Zum Schluss möchten wir noch erklären, warum dieser Fall „casus irreducibilis“ genannt wurde. Im BOMBELLI-Beispiel hat die CARDANO-Formel zunächst $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ ergeben und weiter (algebraisch) kommt CARDANO in diesem Fall auch nicht, die Situation ist *irreduzibel*.

BOMBELLI hat doch algebraisch weiter gearbeitet, kam aber auch zu keinem allgemeinen Resultat (nur in einfachen Spezialfällen, in denen er die Lösung „durch Zufall“ fand – siehe oben) und musste diese Situation auch als *irreduzibel* bezeichnen.

Er hat nämlich diese Terme oben noch zu $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$ + $\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$ umgeschrieben[4]. Man kann sich nun auf einen Teilterm beschränken und nach Werten *a, b* fragen mit $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} \;=\; a+b\sqrt{-1}$

(„3. Wurzel ziehen“).

Wir haben oben schon herausbekommen (durch Erheben zur 3. Potenz und Koeffizientenvergleich), dass dann gelten müssen:

$$a(a^2-3b^2)=2$$
$$b(3a^2-b^2)=11$$

Wenn man nun im Reich der ganzen Zahlen sucht und zufällig fündig wird, ist es ja noch relativ einfach; was aber, wenn nicht, also im allgemeinen Fall?

Quadrieren dieser beiden Gleichungen ergibt zunächst

$$a^6-6a^4b^2+9a^2b^4 = \quad 4$$
$$9a^4b^2-6a^2b^4+b^6=121$$

und Addition dieser beiden Gleichungen ergibt $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=125$ bzw., da beide Seiten dritte Potenzen sind, $\left(a^2+b^2\right)^3=5^3$ oder $b^2=5-a^2$ (wenn allgemeine Zahlen *c*, *d* statt 2, 11 die Koeffizienten sind, so ergibt sich statt der hier „schönen“ Kubikzahl 125 eben c^2+d^2, die aber auch eine 3. Wurzel *e* hat).

Setzt man dies wiederum in die erste Gleichung ein, so erhält man $4a^3=15a+2$ – wieder eine kubische Gleichung in einer Variable. Dividieren wir diese Gleichung durch 4, so erhalten wir die zugehörige Standardform $a^3=\frac{15}{4}a+\frac{1}{2}$, d. h.

$$p=\frac{15}{4};q=\frac{1}{2};\ \left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3=\frac{1}{16}-\frac{125}{64}<0$$

also wieder eine Gleichung 3. Grades, deren Lösung durch die CARDANO-Formel komplexe Zahlen braucht. Also sind wir mit BOMBELLI in einer gewissen Weise genau dort, wo wir begonnen haben, nämlich eine solche Gleichung lösen zu wollen. Das Problem dreht sich also gewissermaßen im Kreis und es ist irgendwie verständlich, dass auch BOMBELLI diese Situation *irreduzibel* nannte.

[4] Dies wäre nicht unbedingt nötig gewesen, muss aber schon als eine große moderne „Leistung“ anerkannt werden, denn viele seiner mathematischen Zeitgenossen hätten auch diesen Schritt als „Unsinn“ abgetan.

Anhang 2 – mit komplexen Zahlen: Beim *Casus irreducibilis* sind alle Lösungen reell

Wir haben oben bereits für die Lösung x der reduzierten kubischen Gleichung $x^3+px=q$ erhalten (zunächst mit den $\pm$-Lösungen):

$$x=u-v=$$
$$\underbrace{\sqrt[3]{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}_{u}+\underbrace{\sqrt[3]{\frac{q}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}_{-v},$$

wobei für die Werte *u* und *v* gilt:

$$3uv=p\ . \qquad \text{(A)}$$

Nimmt man jeweils die oberen Vorzeichen (bei $\pm$ bzw. $\mp$), so ergibt sich für *x* dasselbe wie mit den unteren, so dass man sich auf die oberen beschränken kann:

$$x=\overbrace{\sqrt[3]{\underbrace{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}_{U}}}^{u}+\overbrace{\sqrt[3]{\underbrace{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}_{-V}}}^{-v}$$

Ab nun braucht man einige Kenntnisse über komplexe Zahlen, die damals eben noch nicht vorhanden waren. Es wird sich herausstellen, dass dieser früher so schwierige *casus irreducibilis* eigentlich nichts Irreduzibles hat.

Im Komplexen haben 3. Wurzeln drei Werte! Mit den nichttrivialen 3. Einheitswurzeln $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ bzw. $\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ und den Werten $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ (irgendwelche 3. Wurzeln aus *U* bzw. *V*) erhält man für die drei Wurzelwerte jeweils:

$$u_1 = \tilde{u} \quad , \qquad u_2 = \tilde{u} \cdot \omega \quad , \qquad u_3 = \tilde{u} \cdot \omega^2$$

$$v_1 = \tilde{v} \quad , \qquad v_2 = \tilde{v} \cdot \omega \quad , \qquad v_3 = \tilde{v} \cdot \omega^2 \ .$$

Nun ergäben sich hier zunächst $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten für $x = u - v$, aber nur drei davon erfüllen auch die Bedingung (A):

$$x_1 = \tilde{u} - \tilde{v} \ , \ x_2 = \tilde{u} \cdot \omega - \tilde{v} \cdot \omega^2 \ , \ x_3 = \tilde{u} \cdot \omega^2 - \tilde{v} \cdot \omega$$

Dies sind die drei Lösungen!

Nun wollen wir noch *einsehen*, dass beim *casus irreducibilis* alle drei Lösungen reell sind. In diesem Fall ist der Radikand der Quadratwurzel $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ (d. h. p ist negativ und betraglich hinreichend groß!), und es ergeben sich die erwähnten Schwierigkeiten mit komplexen Zahlen. Die gewünschte Einsicht kann man sich nun auf mehrere Arten verschaffen.

1) Mittels der Moivre'schen Formel:

Mit $U := \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ und

$-V := \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ gilt

$x = \sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{-V}$, wobei U und $-V$ konjugiert komplexe Zahlen sind, in trigonometrischer Darstellung:

$$U = R(\cos\Phi + i \cdot \sin\Phi)$$

$$-V = R(\cos\Phi - i \cdot \sin\Phi) \ .$$

Daher ist mit $r := R/3$ und $\varphi := \Phi/3$ und der Moivre'schen Formel:

$$\tilde{u} := r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = \sqrt[3]{U}$$
$$-\tilde{v} := r(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi) = \sqrt[3]{-V}$$

und damit $x_1 = \tilde{u} - \tilde{v} = 2r\cos\varphi$ eine *reelle* Lösung. Nun gibt es wieder verschiedene Argumente, dass auch die anderen beiden Lösungen *reell* sind:

a) Für die anderen beiden Lösungen $x_2 = \tilde{u} \cdot \omega - \tilde{v} \cdot \omega^2$ und $x_3 = \tilde{u} \cdot \omega^2 - \tilde{v} \cdot \omega$ erhalten wir wegen $\omega + \omega^2 = -1$ und $\omega - \omega^2 = \sqrt{3} \cdot i$:

$$\boxed{x_2} = \tilde{u} \cdot \omega - \tilde{v} \cdot \omega^2 =$$
$$= \omega r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) + \omega^2 r(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)$$
$$= (\omega + \omega^2) \cdot r\cos\varphi + (\omega - \omega^2) \cdot r \cdot i \sin\varphi$$
$$= \boxed{-r\cos\varphi - r\sqrt{3}\sin\varphi \ \in \mathbb{R}!}$$

Dies ist identisch mit (Additionstheorem!): $2r\cos(\varphi + 120°)$.

Analog: $x_3 = 2r\cos(\varphi - 120°) \in \mathbb{R}$!

b) Einfacher: Wenn man beachtet, dass sin und cos eine 360°-Periode haben, kann man oben Φ durch $\Phi + 360°$ bzw. $\Phi - 360°$ ersetzen und erhält statt x_1 jeweils *direkt* die anderen Lösungen $x_2 = 2r\cos(\varphi + 120°)$, $x_3 = 2r\cos(\varphi - 120°)$

2) Eine einfachere Methode:

Diese Methode beruht auf zwei Tatsachen:

(i) Salopp formuliert:
„Wurzeln konjugiert komplexer Zahlen sind ihrerseits konjugiert komplex"
[genauer: die Zahlenmengen $\left\{\sqrt[n]{z}\right\}$ und $\left\{\sqrt[n]{\overline{z}}\right\}$ bestehen aus paarweise konjugiert komplexen Zahlen: $x^n = z \Leftrightarrow \overline{x}^n = \overline{z}$]

(ii) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$

U und $-V$ sind konjugiert komplexe Zahlen, also nach (i) bei „geeigneter Wahl" auch die 3. Wurzeln $\tilde{u}$ und $-\tilde{v}$, so dass $x_1 = \tilde{u} + (-\tilde{v}) \in \mathbb{R}$ klar ist (dies hatten wir ja oben schon bei BOMBELLI).

Die additiven Bestandteile von x_2 und x_3, nämlich $\tilde{u} \cdot \omega$ und $-\tilde{v} \cdot \omega^2$, bzw. $\tilde{u} \cdot \omega^2$ und $-\tilde{v} \cdot \omega$ sind nach (ii) auch konjugiert komplex (weil auch ω und ω^2 konjugiert komplex sind), so dass auch deren Wesen als *reelle* Zahl klar ist!

Während bei **2)** nur die Tatsache $x_i \in \mathbb{R}$ gezeigt wird, wird bei **1)** auch deren innerer Zusammenhang mitgeliefert.