Längen- und Winkelmessungen bei der Höhenbestimmung von Türmen

Optimierung und Fehlerbetrachtungen

Hans Humenberger, Wien

Zusammenfassung: An einem besonders ausführlich dargestellten Beispiel soll gezeigt werden, wie zwei Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik (vgl. [5]) — **Fehlerbetrachtungen** und **Optimieren** — *verbunden* werden können, wodurch einer dritten Fundamentalen Idee — dem **Vernetzen** — Genüge getan wird. Weiters wollen wir verdeutlichen, wie durchaus traditionelle Inhalte in „numerisches Gewand" gekleidet und dadurch der Grad der Anwendungsorientierung erhöht werden kann. Dies sollte eigentlich mit vielen anderen Inhalten auch passieren; sie brauchen dafür gar nicht rigoros bzw. revolutionär geändert zu werden.

Summary: *We want to deal with a concrete problem and give an example, how it is possible to combine two fundamental ideas of applying mathematics (see [5])* — **numerical aspects** *and* **optimization** — *and doing so practising a third fundamental idea,* **combining of knowledge**.

1 Die Regeln der Fehlerfortpflanzung — insbesondere bei den Grundrechnungsarten

Diese bekannten Regeln beziehen sich auf die Auswirkung von Fehlern (*absolute* oder *relative*) beliebiger Eingangsdaten auf das Ergebnis bei Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten. Sie werden im Schulunterricht nur selten mit Differentialrechnung begründet werden, da Differentialrechnung in zwei Variablen i.a. nicht Unterrichtsgegenstand ist. Selbst wenn dies der Fall sein sollte, so wäre es zumindest erst relativ spät im Schulcurriculum (11. Schulstufe) möglich, so daß numerische Überlegungen (selbst bei den Grundrechnungsarten!) für die ganze Sekundarstufe I nicht durchgeführt werden könnten. Außerdem sind hier Begründungen ohne Differentialrechnung ganz elementar und zeigen den „Kern der Sache" vielleicht sogar besser (vgl. [4, S. 163ff]).

Im Zuge der deutlichen Verbesserungen der graphischen Unterstützung durch Computer und dazugehörige Programme gewinnen Überlegungen bzw. Forderungen, sich im Unterricht auch mit **Funktionen mehrerer Veränderlicher** zu beschäftigen, wieder mehr an Bedeutung (siehe z.B. [7], [8], [9], [10]). Allgemein kann festgestellt werden, daß es bis jetzt (leider) zum Thema „Funktionen mehrerer Veränderlicher" nur relativ wenig Literatur gibt — ein Gebiet, das didaktisch also noch nicht wirklich erschlossen zu sein scheint! Die folgenden Überlegungen können vielleicht dazu propädeutischen Charakter haben.

1.1 Summe und Differenz

Wenn bei einer Summe $z = f(x, y) = x + y$ die beiden Summanden x und y jeweils mit den Fehlern (eigentlich Fehlerschranken!) $\pm\Delta x$ und $\pm\Delta y$ behaftet sind, so ergibt sich für z:

$$z \pm \Delta z = x \pm \Delta x + y \pm \Delta y \ .$$

Subtrahieren wir auf der linken Seite z und auf der rechten $(x+y)$ — es ist ja $z = x+y$ — so erhalten wir:

$$\pm\Delta z = \pm\Delta x \pm \Delta y \ .$$

Man sieht, daß $|\Delta z|$ dann den größten Wert annimmt, wenn Δx und Δy gleiches Vorzeichen haben. Für den größtmöglichen Fehler ergibt sich daher:

$$\boxed{|\Delta z| \leq |\Delta x| + |\Delta y| \ .}$$

Analoges gilt auch bei der Differenzbildung $z = f(x,y) = x - y$:
$z \pm \Delta z = x \pm \Delta x - (y \pm \Delta y) \ \Rightarrow \ \pm\Delta z = \pm\Delta x \mp \Delta y$. Daher gilt auch hier

$$\boxed{|\Delta z| \leq |\Delta x| + |\Delta y| \ .}$$

Der **Absolutfehler** einer **Summe** bzw. einer **Differenz** ist höchstens gleich der **Summe der Absolutfehler** der einzelnen Summanden!

1.2 Produkt und Quotient

Setzen wir bei einem Produkt $z = f(x,y) = x \cdot y$ die mit Fehlern behafteten Größen $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$ ein, so erhalten wir durch Ausmultiplizieren:

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x)\,(y \pm \Delta y) = x\,y \pm x\,\Delta y \pm y\,\Delta x \pm \Delta x\,\Delta y \ .$$

Wenn die beiden Fehler Δx und Δy (sinnvollerweise) relativ klein gegenüber den jeweiligen Sollwerten x bzw. y sind, so wird erst recht $\Delta x\,\Delta y \ll x\,y$ gelten und somit $\Delta x\,\Delta y$ im Vergleich zu $x\,y$ zu vernachlässigen sein. Damit reduziert sich obige Gleichung durch die Subtraktion von $z = x\,y$ auf

$$\pm\Delta z = \Delta(x\,y) \approx \pm x\,\Delta y \pm y\,\Delta x \ . \tag{1}$$

Dividieren wir die linke Seite der Gleichung durch z und die rechte durch xy (es ist ja $z = x\,y$), so erhlten wir:

$$\pm\frac{\Delta z}{z} \approx \pm\frac{\Delta x}{x} \pm \frac{\Delta y}{y} \ .$$

Da der größte Fehler bei gleichem Vorzeichen von Δx und Δy auftritt, gilt:

$$\boxed{\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leq \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \ .}$$

Der **Relativfehler eines Produktes** ist also höchstens gleich der **Summe der Relativfehler** der einzelnen Faktoren!

Bemerkung: Betrachten wir den Spezialfall $y = x$, also $z = x^2$, so gilt: $\left|\frac{\Delta(x^2)}{x^2}\right| \leq 2\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$.
Der **Relativfehler eines Quadrates** ist höchstens gleich dem **doppelten Relativfehler** der Basis! Analog erhalten wir $\frac{\Delta(x^n)}{x^n} \approx n\,\frac{\Delta x}{x}$ zunächst für $n \in \mathbb{N}$. Dies ist auch

auf $n = \frac{1}{k} \in \mathbb{Q}$ (und somit auf alle rationalen Zahlen) leicht verallgemeinerbar: aus $\frac{\Delta(x^k)}{x^k} \approx k\,\frac{\Delta x}{x}$ erhalten wir sofort $\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{1}{k}\,\frac{\Delta(x^k)}{x^k}$ und hieraus durch die Substitution $y \stackrel{\text{def}}{=} x^k$ bzw. $x = y^{\frac{1}{k}}$ die entsprechende Regel für Exponenten der Form $\frac{1}{k}$:

$$\frac{\Delta\left(y^{\frac{1}{k}}\right)}{y^{\frac{1}{k}}} \approx \frac{1}{k}\,\frac{\Delta y}{y}\ .$$

Setzen wir nun analog die mit Fehlern behafteten Größen bei einem Quotienten $z = f(x,y) = \frac{x}{y}$ ein, so ergibt sich

$$z \pm \Delta z = \frac{x \pm \Delta x}{y \pm \Delta y}\ ;$$

wir erweitern obigen Bruch mit $y \mp \Delta y$ und erhalten

$$z \pm \Delta z = \frac{(x \pm \Delta x)\,(y \mp \Delta y)}{(y \pm \Delta y)\,(y \mp \Delta y)} = \frac{x\,y \mp x\,\Delta y \pm y\,\Delta x \pm \Delta x\,\Delta y}{y^2 - (\Delta y)^2}\ .$$

Weiters vernachlässigen wir das Quadrat und das Produkt sehr kleiner Größen — also $(\Delta y)^2$ und $\Delta x\,\Delta y$ — und erhalten dadurch

$$z \pm \Delta z \approx \frac{x\,y \mp x\,\Delta y \pm y\,\Delta x}{y^2} = \frac{x}{y} \pm \frac{\Delta x}{y} \mp \frac{x\,\Delta y}{y^2}\ .$$

Beachten wir $z = \frac{x}{y}$, so folgt:

$$\pm\Delta z \approx \pm\frac{\Delta x}{y} \mp \frac{x\,\Delta y}{y^2}\ .$$

Für den größten Fehler gilt daher die Abschätzung:

$$\boxed{|\Delta z| \leq \left|\frac{\Delta x}{y}\right| + \left|\frac{x\Delta y}{y^2}\right|\ .} \tag{2}$$

Dividieren wir schließlich wieder durch $z(=\frac{x}{y})$, so erhalten wir eine zur Multiplikation analoge Formel:

$$\boxed{\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leq \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|\ .}$$

Der **Relativfehler des Quotienten** ist höchstens gleich der **Summe der Relativfehler** von Dividend und Divisor!

Bemerkung: Man sieht, daß der Absolutfehler beim Dividieren sehr stark vom Divisor y abhängt — y und y^2 kommen im Nenner von Gleichung (2) vor! Je kleiner y ist, desto größer ist (bei gleichbleibenden anderen Werten) der Fehler Δz! Man trachtet daher in der Numerischen Mathematik (z.B. bei Verfahren bzw. Algorithmen mit vielen Divisionen), den Divisor „möglichst groß zu halten“.

Die Fehlerabschätzung bei den vier Grundrechnungsarten läßt sich auch auf n Summanden (Faktoren) verallgemeinern:

$$z = x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n \qquad \Longrightarrow \qquad |\Delta z| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \ldots + |\Delta x_n|,$$

$$z = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{y_1 y_2 \ldots y_m} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leq \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \ldots + \left|\frac{\Delta x_n}{x_n}\right| + \left|\frac{\Delta y_1}{y_1}\right| + \ldots + \left|\frac{\Delta y_m}{y_m}\right| .$$

Auch bei vielen Funktionen in *einer* Variablen kann man Fehlerabschätzungen ohne Differentialrechnung durchführen (z.B. bei den Winkelfunktionen als Anwendung der Summensätze). Stellvertretend sei dies an einem Beispiel — der Tangensfunktion (diese werden wir später bei einem Beispiel noch brauchen) — kurz vorgeführt.

Beispiel: Für $z = \tan x$ ergibt sich $z \pm \Delta z = \tan(x \pm \Delta x)$. Verwenden wir hier den Summensatz der Tangensfunktion[1] für den Term $\tan(x \pm \Delta x)$, so folgt

$$z \pm \Delta z = \frac{\tan x \pm \tan \Delta x}{1 \mp \tan x \, \tan \Delta x} .$$

Wir erweitern obigen Bruch mit $1 \pm \tan x \, \tan \Delta x$ und erhalten (da für kleine Δx gilt: $\tan \Delta x \approx \Delta x$):

$$\begin{aligned} z \pm \Delta z &= \frac{\tan x \pm \tan \Delta x \pm \tan^2 x \, \tan \Delta x + \tan x \, \tan^2 \Delta x}{1 - \tan^2 x \, \tan^2 \Delta x} \\ &\approx \frac{\tan x \pm \Delta x \pm \Delta x \, \tan^2 x + (\Delta x)^2 \tan x}{1 - (\Delta x)^2 \tan^2 x} . \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung der Summanden mit $(\Delta x)^2$ erhalten wir

$$z \pm \Delta z \approx \frac{\tan x \pm \Delta x \pm \Delta x \, \tan^2 x}{1} = \tan x \pm \Delta x \, (1 + \tan^2 x) ,$$

und nach Subtraktion von z $(= \tan x)$ ergibt sich schließlich

$$\boxed{\Delta z = \Delta(\tan x) \approx (1 + \tan^2 x) \, \Delta x = \frac{1}{\cos^2 x} \, \Delta x .} \tag{3}$$

2 Fehlerbetrachtungen bei Turmhöhen — eine Aufgabe unter verschiedenen Aspekten

Beispiel 2.1 (Bestimmung einer Turmhöhe, vgl. [5, S. 118f])
Zur Bestimmung der Höhe eines Turmes (vom Boden aus) kann man bekanntlich (unter vorläufiger Vernachlässigung der „Augenhöhe“ — sie kann zum Schluß addiert werden) folgendermaßen vorgehen (siehe Fig. 1): Man mißt eine Standlinie (Länge a) vom Fußpunkt des Turmes ausgehend und visiert von ihrem Ende die Turmspitze an. Dabei wird der Höhenwinkel α gemessen und h nach $h = a \tan \alpha$ bestimmt. Wie wirken sich Meßfehler beim Winkel auf die zu berechnende Höhe aus? Kann man eine Empfehlung über die Länge der Standlinie a bzw. über die Größe des Höhenwinkels α abgeben?

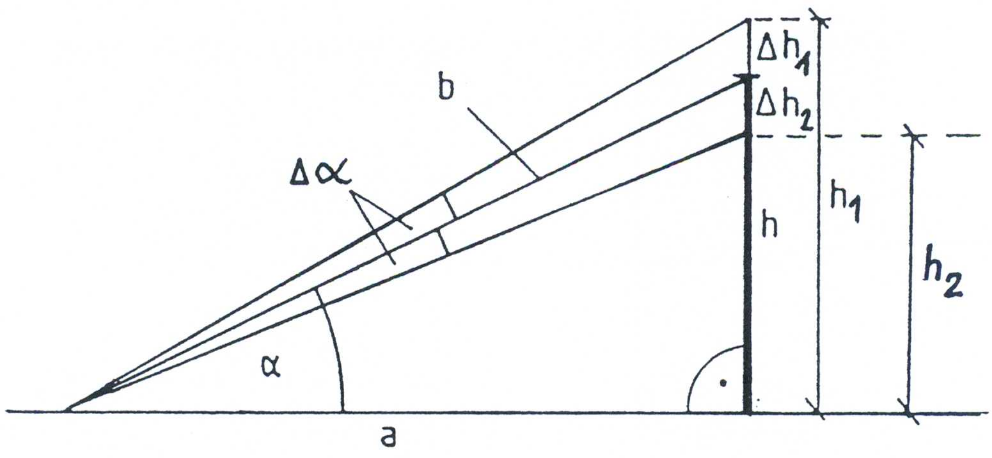

Fig. 1: Bestimmung der Turmhöhe

Die Messung von α ist naturgemäß Meß- und Ablesefehlern (Interpolationsfehlern) unterworfen, was auch für h nur den Status eines Näherungswertes bedeuten kann! Wie stark wirken sich nun Fehler „bei α“ für den Wert der Höhe aus? Wir wollen hier verschiedene Zugänge aufzeigen, einerseits unter Verwendung der in (3) gefundenen „Formel“ für $\Delta(\tan\alpha)$, andererseits die direkte Berechnung des Fehlers der Höhe Δh, und drittens wollen wir die Situation unter der Voraussetzung beleuchten, daß auch a mit einem Meßfehler Δa behaftet ist — h ist dann ein *Produkt* zweier mit Fehlern behafteter Größen[2], nämlich a und $\tan\alpha$.

Eine wesentliche Intention des hier bearbeiteten Beispiels ist zu zeigen, daß Optimierungsaufgaben auch ohne Differentialrechnung zu lösen sind und somit nicht nur in den Klassen 11 bis 13, sondern auch schon früher behandelt werden können (hier in Klasse 10 — Trigonometrie). So ist eine *exakte* Lösung in allen drei Abschnitten 2.1, 2.2 und 2.3 ganz ohne Differentialrechnung möglich (in 2.2 und 2.3 aber *auch* mit Differentialrechnung ausgeführt). Die Absicht, einen Weg ohne Differentialrechnung aufzuzeigen, soll keine Geringschätzung oder einen Wunsch nach Verbannung der Methode $f' = 0$ ausdrücken, sondern lediglich eine frühere Einsatzmöglichkeit solcher und ähnlicher Beispiele im Unterricht betonen.

Es soll u.E. nicht vorkommen, daß Schüler zum ersten Mal in Klasse 11 (im Rahmen der Differentialrechnung) erfahren, daß das Quadrat das flächengrößte Rechteck bei vorgegebenem Umfang, oder daß das Quadrat das umfangkleinste Rechteck bei gegebenem Flächeninhalt ist — Erkenntnisse, für die es eine Fülle elementarster Beweise gibt, die z.T. schon in Klasse 5 verständlich sind, und zwar rein geometrisch, d.h. ohne Terme, Formeln bzw. Algebra. (siehe Fig. 2). Wir wollen zeigen (sehen), daß das Quadrat das größte (in bezug auf den Flächeninhalt) unter allen umfangsgleichen Rechtecken ist. Man sieht ganz einfach, daß jeder Konkurrent des Quadrates mit Seitenlänge a einen kleineren Flächeninhalt hat (Fig. 2 links): wird eine Seite a des Quadrates um ein Stück x verkürzt, so muß die andere Seite um dieses Stück x verlängert werden (der Umfang soll sich nicht

[1] Dieser lautet bekanntlich $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta}$.

[2] Wir danken Herrn Prof. Dr. L. Profke (Gießen) für die Anregung zur Beschäftigung mit dem wohl realistischeren Fall, daß auch die Messung der Standlinienlänge a derselben Art von Fehlern unterliegt, was wir zunächst absichtlich ausblenden, aber in Abschnitt 2.3 sehr wohl beachten wollen!

ändern). Es entsteht also ein Rechteck mit den Seitenlängen $a - x$ und $a + x$. Dieses Rechteck unterscheidet sich vom ursprünglichen Quadrat dadurch, daß aus dem Streifen mit Breite x und Länge a ein Streifen wurde mit gleicher Breite x aber kürzerer Länge, nämlich $a - x$ (beide Streifen sind in Fig. 2 (links) schraffiert). Da der zweite offenbar einen kleineren Flächeninhalt haben muß (dies ist selbst ohne Flächeninhaltsformel — z.B. durch gedachtes Übereinanderlegen der beiden gleichbreiten Streifen — einsichtig), kann man durch Veränderung der Längenverhältnisse (Umfang soll gleich bleiben) aus einem Quadrat allenfalls ein Rechteck mit kleinerem Flächeninhalt bekommen.

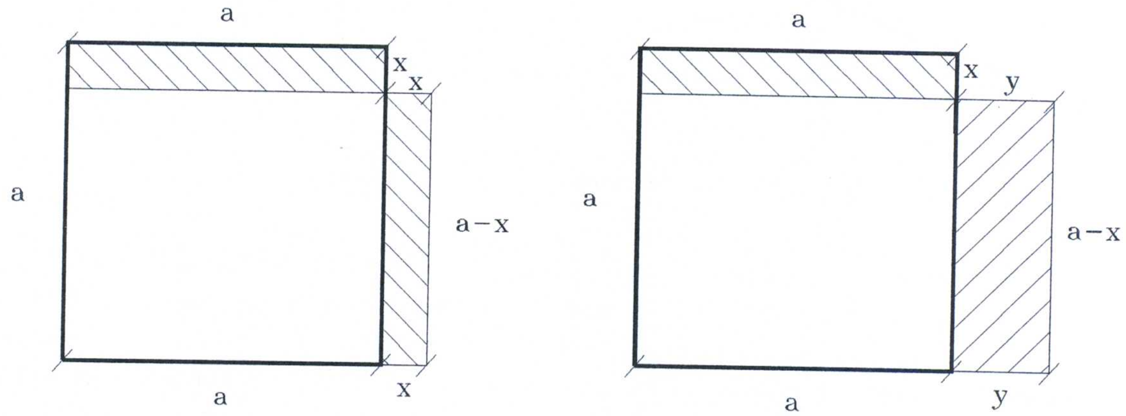

Fig. 2: Links: Das Quadrat ist das flächengrößte Rechteck bei gegebenem Umfang. Rechts: Das Quadrat ist das umfangkleinste Rechteck bei gegebenem Flächeninhalt — rein geometrisch

Wir geben hier auch eine algebraische Möglichkeit an, die oben erwähnten Eigenschaften des Quadrates zu beweisen — basierend auf der bekannten Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel. Für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,b} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq a\,b \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq a\,b\,.}$$

Aus der dritten Form kann abgelesen werden:

> Ein **Produkt** variabler Faktoren a, b mit **konstanter Summe** $s = a + b$ ist **maximal**, wenn diese **Faktoren gleich groß** sind, wenn also jeder Faktor $\frac{s}{2} = \frac{a+b}{2}$ beträgt.

Der Beweis der angegebenen Mittelungleichung — sollte sie den Schülern noch nicht bekannt sein — kann z.B. direkt aus $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ erfolgen oder geometrisch mit Hilfe des Höhensatzes.

„Umkehrung“: In der Form $a + b \geq 2\sqrt{a\,b}$ bzw. $\boxed{a + b \geq \sqrt{a\,b} + \sqrt{a\,b}}$ können wir das Pendant dazu ablesen:

Eine **Summe** variabler Summanden a, b mit **konstantem Produkt** $p = a\,b$ ist **minimal**, wenn diese **Summanden gleich groß** sind, wenn also jeder Summand $\sqrt{p} = \sqrt{a\,b}$ beträgt.

Geometrisch bedeutet dies offenbar: Unter allen Rechtecken mit konstantem (vorgegebenem) Flächeninhalt besitzt das Quadrat den kleinsten Umfang! Diese Erkenntnis wird uns in Abschnitt 2.3 nützlich sein, wenn man Differentialrechnung dort vermeiden will. Obwohl dieser Satz logisch äquivalent mit dem Satz ist, daß das Quadrat das flächengrößte Rechteck bei gegebenem Umfang ist, kann dies auch direkt und ebenfalls rein geometrisch gezeigt werden (ganz analog, siehe Fig. 2 rechts: da die beiden schraffierten Rechtecke nun *flächengleich* sind und das rechte eine Seitenlänge von $a-x$ statt a — also sicher kürzer! — hat, so muß „zum Ausgleich" die Breite y wohl größer sein als x; jedes Konkurrenzrechteck hat also mit Sicherheit einen größeren Umfang als das Quadrat).

2.1 „Fehlerrechnung"

Wir nehmen plausiblerweise an, daß eine Schranke $\Delta\alpha$ für den Betrag des Meßfehlers von Winkeln (bei diesem bestimmten Gerät) aus Erfahrung bekannt sei. Bestimmen wir Δh näherungsweise nach den Regeln der Fehlerfortpflanzung, so erhalten wir wegen der in (3) erarbeiteten Beziehung $\Delta(\tan\alpha) \approx (1+\tan^2\alpha)\,\Delta\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\Delta\alpha$ folgende Darstellung für die Auswirkung des Meßfehlers $\Delta\alpha$ auf den Wert der zu bestimmenden Höhe:

$$\Delta h = \Delta(a\,\tan\alpha) \approx a\,\frac{1}{\cos^2\alpha}\,\Delta\alpha = \frac{a\,\Delta\alpha}{\cos^2\alpha}\,. \tag{4}$$

Wie soll nun die Länge der Standlinie a (und somit der Höhenwinkel α) zur Berechnung der Turmhöhe gewählt werden, wenn der Fehler der Turmhöhe minimal sein soll? Hiezu muß das Minimum des in (4) angegebenen Terms für Δh gesucht werden. Mit $a = \frac{h}{\tan\alpha}$ erhalten wir

$$\boxed{\Delta h = \frac{a\,\Delta\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{h\,\Delta\alpha}{\sin\alpha\,\cos\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} f_1(\alpha)} \tag{5}$$

als zu minimierende Funktion in α (h und $\Delta\alpha$ sind ja konstant). Wir formen $f_1(\alpha)$ um zu $f_1(\alpha) = \frac{2\,h\,\Delta\alpha}{\sin 2\alpha}$ und können ablesen: Δh bzw. $f_1(\alpha)$ wird genau dann *minimal*, wenn $\sin 2\alpha$ *maximal* wird, was offensichtlich bei $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ der Fall ist (es ist hier also durchaus ohne Differentialrechnung auszukommen). In bezug auf die Minimierung des Fehlers ist es also am besten, einen Höhenwinkel von $\alpha = 45°$ zu wählen. Dann ist übrigens auch die Berechnung von h besonders einfach: $h = a$ (das Dreieck in Fig. 1 ist dann rechtwinklig-gleichschenklig).

Bemerkung: Diese beiden Tatsachen (besondere Einfachheit und Fehlerminimierung) spiegeln sich auch beim sogenannten *Försterdreieck* wider. Zur (ungefähren) Bestimmung von Baumhöhen benutzen Förster relativ große rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke folgendermaßen (Hypotenusenlänge ca. 1 m): sie halten das Dreieck, so daß eine Kathete waagrecht ist und visieren mit der Hypotenuse die Krone des Baumes an. Ihre Entfernung vom Baum gibt dann die ungefähre Baumhöhe an.

2.2 Exakte Berechnung des Fehlers

Nun sei $\Delta\alpha$ der wirkliche (unbekannte, mit Vorzeichen versehene) Meßfehler[3] des Winkels α. Wenn wir Δh (bzw. Δh_1 und Δh_2) genau bestimmen wollen, erhalten wir zunächst

$$h = a\,\tan\alpha\,, \qquad h_{1,2} = a\,\tan(\alpha \pm \Delta\alpha)\,, \qquad b = \frac{a}{\cos\alpha}$$

und laut Sinussatz (siehe Fig. 1):

$$b : \sin(90^\circ \mp (\alpha \pm \Delta\alpha)) = \Delta h_{1,2} : \sin\Delta\alpha$$

bzw.

$$\frac{a}{\cos\alpha} : \cos(\alpha \pm \Delta\alpha) = \Delta h_{1,2} : \sin\Delta\alpha\,.$$

Daraus entnehmen wir

$$\Delta h_{1,2} = \frac{a\,\sin\Delta\alpha}{\cos\alpha\,\cos(\alpha \pm \Delta\alpha)} \tag{6}$$

und erkennen, daß die Abweichung Δh direkt proportional zu a und $\sin\Delta\alpha$ und indirekt proportional zu $\cos\alpha$ ist. Damit Δh möglichst klein wird, sollen also a, $\Delta\alpha$ und α möglichst klein sein — dies entspricht ja auch durchaus unserer Vorstellung[4]: Daß $\Delta\alpha$ selbst möglichst klein sein soll, ist wohl trivial, für a ist es auch klar, da bei längerem a der Winkel $\Delta\alpha$ „eine längere Strecke hat", um sich auszuwirken, und für α hilft den Schülern vielleicht am ehesten eine kleine Skizze (siehe Fig. 3), um ohne viele Worte einzusehen, daß bei größerem α (und gleicher Standlinienlänge[5] a) die Auswirkung Δh eines Meßfehlers $\Delta\alpha$ größer ist!

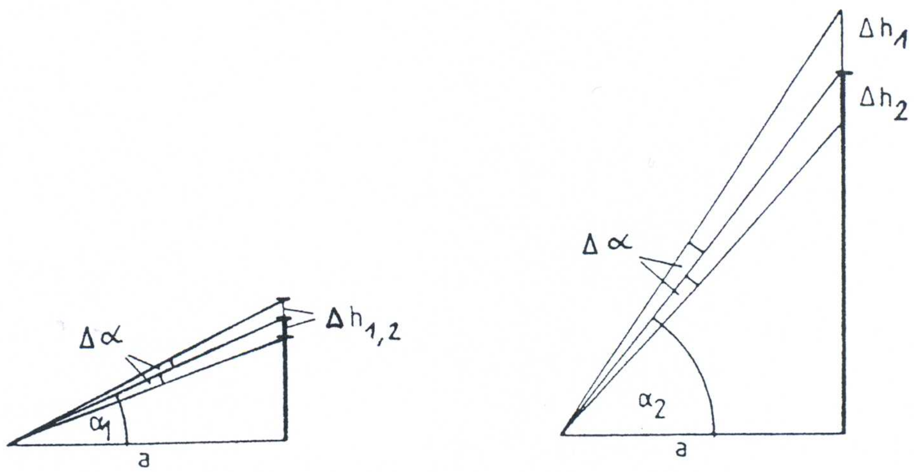

Fig. 3: Auswirkung von α auf Δh

Bemerkung 1: Für kleine $|\Delta\alpha|$ ist aber $\sin\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$ und $\cos(\alpha \pm \Delta\alpha) \approx \cos\alpha$. Das bedeutet, daß der Unterschied der beiden Formeln für Δh bzw. $\Delta h_{1,2}$ — gemeint sind (4)

[3] In den Abschnitten 2.1 und 2.3 — „Fehlerrechnung" — stellt $\Delta\alpha$ ja eine *Schranke* für den *Betrag* des möglichen Meßfehlers dar.

[4] Die Werte für a und α können natürlich nicht gleichzeitig beliebig klein werden, da ja $h = a\,\tan\alpha$ gilt und h zwar unbekannt aber fest ist. Je näher man dem Fußpunkt des Turmes ist („kleines a"), desto größer muß α sein.

[5] Dann ist auch h größer!

und (6) — bei kleinem $\Delta\alpha$ sicher nur sehr gering sein wird, eine weitere (nachträgliche) „Rechtfertigung" der Formel (3).

Bemerkung 2: Als „Nebenprodukt" der obigen Gedanken erhalten wir **Additionstheoreme** (zwar nicht die üblichen) für die Tangensfunktion. Durch Einsetzen in $\Delta h_{1,2} = |h_{1,2} - h|$ ergibt sich mit $\Delta\alpha = \beta$ die Beziehung $\frac{a\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos(\alpha\pm\beta)} = |a\,\tan(\alpha\pm\beta) - a\,\tan\alpha|$ und daraus schließlich

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \tan\alpha \pm \frac{\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos(\alpha\pm\beta)}\ .$$

Überlegen wir nun auch in „diesem Modell", wie groß der Höhenwinkel gewählt werden soll! Für welche α wird

$$\boxed{\Delta h_{1,2} = \frac{a\,\sin\Delta\alpha}{\cos\alpha\,\cos(\alpha\pm\Delta\alpha)} = \frac{h\,\sin\Delta\alpha}{\sin\alpha\,\cos(\alpha\pm\Delta\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} f_2(\alpha)} \tag{7}$$

minimal? Dies ist analog zu oben genau dann der Fall, wenn der Nenner $\sin\alpha\,\cos(\alpha\pm\Delta\alpha)$ **maximal** wird.

Bemerkung: Hier können wir nicht mehr ganz so einfach mit $\sin 2\alpha$ arbeiten[6]. Z.B. könnte man mit einem Computer den Graphen von $\sin\alpha\,\cos(\alpha\pm\Delta\alpha)$ zeichnen (für einige spezielle Werte von $\Delta\alpha$) und das Maximum bzw. α_{opt} näherungsweise daraus ablesen; diese Methode bietet sich insbesondere als Lieferant von Vermutungen oder auch als „endgültige Lösung" an (z.B. wenn nur der ungefähre Wert, nicht aber Hintergründe bzw. Begründungen interessieren, oder wenn einfach der Umgang mit Computergraphiken geübt werden soll). Auch wenn Differentialrechnung noch nicht zur Verfügung steht (Klasse 10) oder man Differentialrechnung einfach vermeiden will (z.B. um zu betonen, daß nicht jede Optimierungsaufgabe der „Methode $f' = 0$" bedarf — eine unter Schülern ja weit verbreitete Fehlmeinung!), kann eine Optimierung mit exakter Begründung vorgenommen werden (dies ist auch *nach* der Lösung mittels Differentialrechnung möglich und begrüßenswert, um die Vielfalt an Optimierungsmöglichkeiten zu betonen).

Wir verwenden hier jedoch zunächst Differentialrechnung, setzen die erste Ableitung des Nenners von $f_2(\alpha)$ – siehe (7) – gleich Null und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\sin\alpha\,\cos(\alpha\pm\Delta\alpha)) = \cos\alpha\,\cos(\alpha\pm\Delta\alpha) - \sin\alpha\,\sin(\alpha\pm\Delta\alpha) = 0 \tag{8}$$

bzw. nach Anwendung des Summensatzes für den Kosinus

$$\cos(2\,\alpha\pm\Delta\alpha) = 0\ . \tag{9}$$

Daraus ergibt sich natürlich sofort $2\,\alpha\pm\Delta\alpha = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\boxed{\alpha = \alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \mp \frac{1}{2}\Delta\alpha.}$

Man überzeugt sich leicht, daß $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}(\sin\alpha\,\cos(\alpha\pm\Delta\alpha)) = -2\,\sin(2\,\alpha\pm\Delta\alpha)$ für $\alpha\approx\frac{\pi}{4}$ negativ ist, und daher wirklich ein Maximum des Nenners vorliegt. Dies ist aber auch ohne

[6] Bereits an dieser Stelle ist jedoch zu erahnen, daß α_{opt} in der Nähe von $\frac{\pi}{4} = 45°$ liegen wird.

Betrachtung der zweiten Ableitung klar, da die erste Ableitung nur eine einzige Nullstelle zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ hat und der Term $\sin\alpha\,\cos(\alpha \pm \Delta\alpha)$ bei $\alpha = 0$ und bei $\alpha = \frac{\pi}{2} \mp \Delta\alpha$ den Wert 0, dazwischen aber *positive* Werte hat!
Selbst wenn man hier nicht auf die Anwendung des Summensatzes kommt, kann Gleichung (8) umgeformt werden zu

$$\tan\alpha = \cot(\alpha \pm \Delta\alpha)\ . \tag{10}$$

Diese Beziehung wird ohne weitere Umformungen vielleicht klarer, wenn die Situation am Einheitskreis betrachtet wird. Man sieht in Fig. 4, daß Gleichung (10) genau dann erfüllt ist, wenn $\alpha = \alpha_{\rm opt} = \frac{\pi}{4} \mp \frac{1}{2}\Delta\alpha$ gilt — je nachdem, ob $\Delta\alpha$ in Wirklichkeit positiv oder negativ ist.

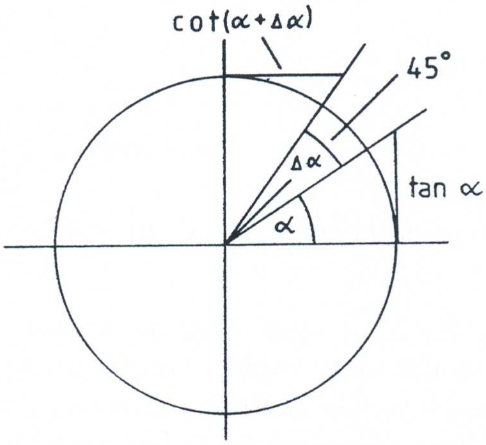

Fig. 4: Tangens und Kotangens am Einheitskreis

Auch mit Hilfe der Komplementbeziehung $\cot\varphi = \tan(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ kann Gleichung (10) geschrieben werden als $\tan\alpha = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha \mp \Delta\alpha)$, woraus wieder unmittelbar $\alpha = \alpha_{\rm opt} = \frac{\pi}{4} \mp \frac{1}{2}\Delta\alpha$ folgt. Also selbst innerhalb der Methode „Nullsetzen der ersten Ableitung" gibt es einige Möglichkeiten der Begründung!

Fazit in diesem Modell: Wenn $\Delta\alpha$ (der wirkliche Meßfehler) positiv ist, so liegt $\alpha_{\rm opt}$ knapp (um $\frac{1}{2}\Delta\alpha$) unterhalb von $\frac{\pi}{4}$, wenn $\Delta\alpha$ negativ ist, so liegt $\alpha_{\rm opt}$ knapp (um $\frac{1}{2}\Delta\alpha$) oberhalb von $\frac{\pi}{4}$. Mit α bzw. $\alpha_{\rm opt}$ ist aber der *exakte* Wert des Höhenwinkels gemeint; der gemessene Wert ist $\alpha \pm \Delta\alpha$. Interessiert man sich für den besten „Sollwert", den ein konkretes Winkelmeßgerät bei der Messung anzeigen soll (durch Wahl der Entfernung zum Turm ja steuerbar), so muß man natürlich nach $\alpha_{\rm opt} \pm \Delta\alpha = \frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2}\Delta\alpha$ fragen. Man soll also so weit weg vom Turm gehen, bis das Gerät einen Winkel von $\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2}\Delta\alpha$ anzeigt! Dann liegen exakter Wert und Meßwert symmetrisch um $\frac{\pi}{4}$ und der dadurch entstehende Höhenfehler ist minimal. Zur Bestimmung dieses Winkels müßte jedoch der wirkliche Meßfehler $\Delta\alpha$ bekannt sein.
Da aber bei einer Winkelmessung der wirkliche Meßfehler $\Delta\alpha$ i.a. verborgen bleiben wird (sowohl Betrag als auch Vorzeichen[7]), wird man also auch hier „sicherheitshalber" die Empfehlung $\alpha_{\rm opt} = \frac{\pi}{4} = 45°$ abzugeben haben!

[7] Man kennt allenfalls aus Erfahrung mit dem jeweiligen Meßgerät eine mehr oder weniger zuverlässige *Schranke* für den Betrag des Meßfehlers. Wäre der Meßfehler wirklich bekannt, so könnte man ja gleich mit dem korrigierten Wert rechnen und man bräuchte nicht nach einem optimalen Wert für den Höhenwinkel zu suchen!

Ohne Differentialrechnung: Wir wollen im folgenden ohne Differentialrechnung herausfinden, für welchen Wert α der Nenner in (7), $g_1(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sin\alpha\,\cos(\alpha \pm \Delta\alpha)$, maximal wird. Dieses Produkt aus einem sin- und einem cos-Term erinnert natürlich sofort an das Additionstheorem der Sinusfunktion[8].

Wir setzen zu $g_1(\alpha) = \sin\alpha\,\cos(\alpha \pm \Delta\alpha)$ den für die Anwendung des Additionstheorems fehlenden Term $g_2(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \cos\alpha\,\sin(\alpha \pm \Delta\alpha)$ einfach dazu:

$$\underbrace{\sin\alpha\,\cos(\alpha \pm \Delta\alpha)}_{g_1(\alpha)} + \underbrace{\cos\alpha\,\sin(\alpha \pm \Delta\alpha)}_{g_2(\alpha)} = \sin(\alpha + (\alpha \pm \Delta\alpha)) = \sin(2\alpha \pm \Delta\alpha)\ .$$

Der dadurch erhaltene Ausdruck $\sin(2\alpha \pm \Delta\alpha)$ ist natürlich sehr leicht zu maximieren: er ist genau dann maximal, wenn $2\alpha \pm \Delta\alpha = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\alpha = \alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \mp \frac{1}{2}\,\Delta\alpha$ ist, unsere Lösung von oben! Es bleibt allerdings noch zu zeigen, daß $g_1(\alpha)$ genau dann maximal ist, wenn auch $g_2(\alpha)$ maximal ist. Dies rechtfertigt dann obige „Ergänzung“. In der Tat gilt

$$g_2(\alpha) = g_1(\alpha) + \sin(\pm\Delta\alpha) = g_1(\alpha) \pm \sin(\Delta\alpha)\ , \tag{11}$$

was durch erneutes Anwenden des Sinus-Additionstheorems zu begründen ist:

$$\sin(\pm\Delta\alpha) = \sin((\alpha \pm \Delta\alpha) - \alpha) = \underbrace{\sin(\alpha \pm \Delta\alpha)\cos\alpha}_{g_2(\alpha)} - \underbrace{\cos(\alpha \pm \Delta\alpha)\sin\alpha}_{g_1(\alpha)}\ ,$$

woraus die Beziehung (11) unmittelbar folgt. D.h. $g_1(\alpha)$ und $g_2(\alpha)$ unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, nämlich durch $\pm\sin(\Delta\alpha)$, und $g_1(\alpha)$ ist wirklich genau dann maximal, wenn es auch $g_2(\alpha)$ ist.

2.3 Wie ändert sich die Lage, wenn auch die Messung der Standlinienlänge mit einem Fehler behaftet wird?

Wir gehen im folgenden davon aus, daß aus der Erfahrung im Umgang mit den Meßgeräten (Winkel und Länge) *Schranken* für die Beträge der Meßfehler ($\Delta\alpha$ und Δa) bekannt seien. Wir fragen erneut nach dem „besten“ Meßwinkel α_{opt} zur Berechnung von h nach der Formel $h = a\,\tan\alpha$.

Der konstante, aber unbekannte Wert h ist ein Produkt zweier mit einem Fehler behafteter Größen, nämlich a und $\tan\alpha$. In Gleichung (1) wurde beschrieben, wie der durch ein solches Produkt entstehende Fehler abgeschätzt werden kann (hier *ohne* Vorzeichenunterscheidung der Fehler):

$$\Delta h = \Delta(a\,\tan\alpha) = \Delta a\,\tan\alpha + a\,\Delta(\tan\alpha)\ .$$

[8] Jenes der Kosinusfunktion war ja auch schon bei der Methode mit Differentialrechnung hilfreich; wer also vorher mit Differentialrechnung und Kosinus-Additionstheorem gearbeitet hat, wird also wahrscheinlich eher an folgende Möglichkeit denken. Auch der Verfasser „gesteht“ gerne, daß er in diesem Abschnitt zuerst mit Differentialrechnung gearbeitet hat.

Nun wissen wir einerseits $a = \frac{h}{\tan\alpha}$ und andererseits aus Gleichung (3) $\Delta(\tan\alpha) = (1+\tan^2\alpha)\,\Delta\alpha$, wodurch wir zu

$$\begin{aligned} \Delta h &= \Delta a \, \tan\alpha + \frac{h\,\Delta\alpha}{\tan\alpha}(1+\tan^2\alpha) && (12) \\ &= \boxed{(\Delta a + h\,\Delta\alpha)\,\tan\alpha + \frac{h\,\Delta\alpha}{\tan\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} f_3(\alpha)} && (13) \end{aligned}$$

kommen. Wir haben also Δh in Abhängigkeit von α (und den Konstanten h, $\Delta\alpha$ und Δa) dargestellt und müssen das Minimum von $\Delta h = f_3(\alpha)$ finden.

Bei der Summe für Δh — siehe Gleichung (13) — handelt es sich um Summanden, deren Produkt konstant ist: $\Delta h = (\Delta a + h\,\Delta\alpha)\,\tan\alpha + \frac{h\,\Delta\alpha}{\tan\alpha}$ — das Produkt der beiden Summanden beträgt offenbar konstant $(\Delta a + h\,\Delta\alpha)\,(h\,\Delta\alpha)$. Daher ist Δh nach dem oben beschriebenen Prinzip genau dann minimal, wenn jeder der beiden Summanden gleich groß ist („das Quadrat hat bei gegebenem Flächeninhalt den kleinsten Umfang“). Daraus ist das Ergebnis für α_{opt} unmittelbar auch ohne Differentialrechnung zu erhalten (vgl. [6]). Aus $(\Delta a + h\,\Delta\alpha)\,\tan\alpha = \frac{h\,\Delta\alpha}{\tan\alpha}$ folgt sofort

$$\tan^2\alpha = \frac{h\,\Delta\alpha}{\Delta a + h\,\Delta\alpha} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{\alpha = \alpha_{\text{opt}} = \arctan\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Delta a}{h\,\Delta\alpha}}}\,,} \qquad (14)$$

wobei $\Delta\alpha \neq 0$ vorausgesetzt wurde. Der Wert für α_{opt} liegt natürlich wieder in der Nähe von $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$ — genauer gesagt „etwas“ darunter, d.h. der optimale Standort für Messungen ist in diesem Modell knapp außerhalb des „45°-Punktes“ (Punkt mit Entfernung h vom Turmfußpunkt). *Wie weit* außerhalb, hängt vom Term $\frac{\Delta a}{h\,\Delta\alpha}$ ab. Durch die Berücksichtigung von Δa „wandert“ der optimale Meßwinkel weg von $\frac{\pi}{4} = 45°$, er wird etwas kleiner.

Auch mit Differentialrechnung kommt man zur selben Lösung. Wir können die Nullstelle der ersten Ableitung von $f_3(\alpha)$ suchen, d.h. die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}f_3(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = (\Delta a + h\,\Delta\alpha)\,\frac{1}{\cos^2\alpha} - h\,\Delta\alpha\,\frac{1}{\sin^2\alpha} = 0\,,$$

lösen. Wir erhalten auch hier unmittelbar[9] $\tan^2\alpha = \frac{h\,\Delta\alpha}{\Delta a + h\,\Delta\alpha}$ und daraus $\alpha = \alpha_{\text{opt}} = \arctan\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Delta a}{h\,\Delta\alpha}}}$.

Nun überlegen wir, welche Wirkung die Ungenauigkeiten Δa und $\Delta\alpha$ auf den optimalen Winkel α_{opt} haben. Wir lesen unmittelbar aus (14) ab:

(1) Wenn die Messung der Standlinienlänge a sehr ungenau ist (Δa groß), dann ist α_{opt} klein (bzw. deutlich kleiner als 45°) — d.h. man soll weit vom Fußpunkt des Turmes weggehen (genauer: weit weg vom „45°-Punkt“).

(2) Wenn die Messung des Winkels α sehr ungenau ist ($\Delta\alpha$ groß), dann wird α_{opt} größer (bzw. nur wenig kleiner als 45°) — d.h. man soll relativ nahe an den Fußpunkt des Turmes

[9] Wir verzichten auf die zweite Ableitung, da sie wieder durch andere Überlegungen ersetzt werden kann: $f_3(\alpha)$ *kann* kein lokales Maximum haben! Warum?!

herangehen (genauer: relativ nahe an den „45°-Punkt"). Dasselbe gilt, wenn h selbst sehr groß ist!

Die beiden Meßfehler — Δa und $\Delta\alpha$ — haben also eine entgegengesetzte „Wirkung": Wegen Δa sollte man möglichst weit weg vom Turm gehen, wegen $\Delta\alpha$ sollte man hingegen möglichst nahe beim Turm (genauer: beim „45°- Punkt") bleiben! Die konstante (unbekannte) Höhe h verstärkt bzw. unterstützt die Wirkung von $\Delta\alpha$: je größer h ist, desto näher sollte man beim 45°-Punkt bleiben. Eine daraus folgende Tatsache, die es wert ist, betont zu werden: Der optimale Standort kann *nie* innerhalb des 45°-Punktes liegen! Er liegt immer außerhalb bzw. — bei völliger Vernachlässigung des Meßfehlers Δa bei der Längenmessung der Standlinie — genau beim 45°-Punkt.

Dies ist nicht nur aus der Formel für α_{opt} (14) abzulesen, sondern ist z.B. auch durch isoliertes Betrachten der Auswirkungen von Δa bzw. $\Delta\alpha$ (den jeweils anderen Wert vernachlässigen!) auf Δh zu begründen: Fig. 5 macht dies für Δa graphisch deutlich (bei jeweils gleichem h und Δa und unter Vernachlässigung von $\Delta\alpha$ ist ein großes a besser[10]).

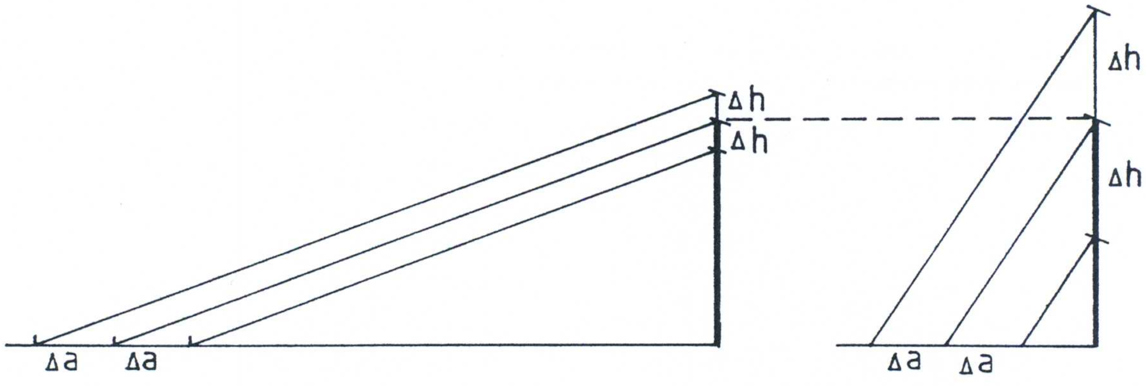

Fig. 5: Auswirkung von Δa auf Δh bei verschiedenen Werten für a bzw. α (h und Δa jeweils gleich, $\Delta\alpha$ vernachlässigt!)

Fig. 6 veranschaulicht die zugehörige Situation für $\Delta\alpha$ (bei jeweils gleichem h und $\Delta\alpha$ und unter Vernachlässigung von Δa ist ein a nahe bei h besser; Meßpunkt nahe dem „45°-Punkt", aber nicht näher als dieser!).

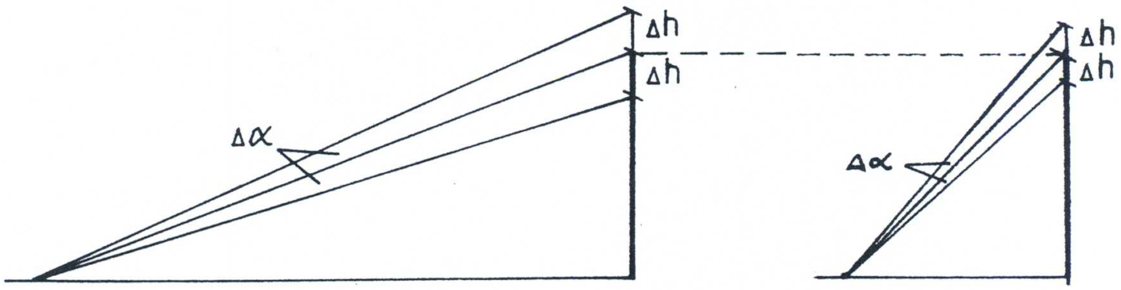

Fig. 6: Auswirkung von $\Delta\alpha$ auf Δh bei verschiedenen Werten von a bzw. α (h und $\Delta\alpha$ jeweils gleich, Δa vernachlässigt!)

[10]Bei völliger Vernachlässigung von $\Delta\alpha$ würde dies tatsächlich uneingeschränkt gelten: je weiter weg, desto besser!

Ein fiktives Beispiel: Wenn z.B. ein Turm von ca. 20 m Höhe[11] durch die beschriebene Methode genau vermessen werden sollte und die Fehlerschranken für die Entfernungs- bzw. Winkelmessung 1 cm bzw. 1° betragen, so ergibt sich für den optimalen Höhenwinkel (1 cm = 0.01 m, $1° \approx 0.01745$ rad):

$$\alpha_{\text{opt}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{1+\frac{0.01}{20\cdot 0.01745}}} \approx 0.7783 \text{ rad } \approx 44.6° \ .$$

Dieser ist etwas kleiner als 45°, was — wie bereits erwähnt — bedeutet, daß der optimale Standort des Winkelmeßgerätes geringfügig weiter entfernt vom Fußpunkt des Turmes ist, als durch die Höhe des Turmes angegeben wird („45°-Punkt"). Wenn man also das Winkelmeßgerät an eine Stelle gebracht hat, bei der ein Höhenwinkel von 44.6° zu messen ist, kann die Höhe des Turmes nach Messen der Standlinienlänge a durch $h = a \cdot \tan \alpha_{\text{opt}}$, also $h \approx a \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{0.01}{20\cdot 0.01745}}} \approx a \cdot 0.986$ berechnet werden!

Literatur

[1] BAUMANN, R. (1980): Näherungs- und Fehlerrechnung als notwendige Voraussetzung sinnvollen Taschenrechnergebrauchs. In: *Praxis der Mathematik* **22**, 3, 65–77.

[2] BAUMANN, R. (1981): Behandlung der Fehlerfortpflanzung in den Klassen 9/10 mittels Taschenrechner. In: *Praxis der Mathematik* **23**, 7, 193–201.

[3] BLANKENAGEL, J. (1985): Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik. Ansätze zu einer Didaktik. Bibliographisches Institut, Mannheim–Leipzig–Wien–Zürich.

[4] HUMENBERGER, H., G. HANISCH u. H.-C. REICHEL (1991): Fachbereichsarbeiten und Projekte im Mathematikunterricht — mit Anregungen für das Wahlpflichtfach. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

[5] HUMENBERGER, H. u. H.-C. REICHEL (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich.

[6] HUMENBERGER, H. (1998): Problemlösen als „roter Faden" im Unterricht — einige Anregungen. Erscheint in *Praxis der Mathematik.*

[7] KIRSCH, A. (1990): Funktionen zweier Veränderlicher in einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht. In: RUNCK, P. u. W. SCHLÖGLMANN (Hrsg., 1990): *Vorträge bei der Fortbildungstagung für Mathematiklehrer der AHS und BHS*, **19**, 44–61, Universität Linz.

[8] KLIKA, M. (1985): Funktionen von mehreren Veränderlichen — kein Thema für den Mathematikunterricht? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1985, 176–180.

[9] KLIKA, M. (1986): Zeichnen und zeichnen lassen: Funktionen von zwei Variablen. In: *mathematik-lehren* **14**, 61–63.

[10] SCHWEIGER, F. (1995): Funktionen in mehreren Variablen — Aschenputtel der Schulmathematik. In: *Didaktik-Reihe der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* **24**, 21–34.

[11] TITZE, H. (1980): Elementare Fehlerbetrachtungen für den Unterricht. In: *Didaktik der Mathematik* **8**, 4, 281–291.

Anschrift des Verfassers:
Hans HUMENBERGER, Institut für Mathematik und Angewandte Statistik, Universität für Bodenkultur, Gregor Mendel-Straße 33, A — 1180 Wien. E-mail: `hans@edv1.boku.ac.at`

[11] Dieser Wert kann z.B. aus einer vorangehenden Messung oder aus einer Schätzung stammen.