# Optimieren im Mathematikunterricht

## Beispiele aus der elementaren Spieltheorie

**Hans Humenberger**

Spieltheorie - ein neues Element im Unterricht? Ein neues Thema im ohnehin überfüllten Mathematik-Curriculum? Neuer Ballast für den Unterricht? Nein, dieser Aufsatz versteht sich nicht als Plädoyer für die Aufnahme spieltheoretischer Aspekte in den *Pflicht*unterricht für alle Lernenden bzw. für die explizite Aufnahme in gewisse *Lehrpläne*. Es sollen lediglich einige (ausgewählte) *elementare* Aspekte herausgestrichen und so aufbereitet werden, daß eine Umsetzung im Unterricht für interessierte Lehrer (insbesondere in Leistungskursen, freiwilligen Kursen oder „Wahlpflichtgegenständen" - wie es sie z. B. in österreichischen Gymnasien seit einigen Jahren gibt - etc.) möglich erscheint, und zwar ohne nötige Vorkenntnisse des Lehrers in der Spieltheorie. Aus diesem Grund war es uns auch ein Anliegen, die Materie mit möglichst konkreten Beispielen und auf niederem Abstraktionsniveau darzustellen.

## 1 Einleitung

*Optimieren* in allen seinen Erscheinungsformen ist ein besonders wichtiges Element der Mathematik, insbesondere der Angewandten Mathematik. Die Idee des Optimierens verdient u. E. zurecht die Bezeichnung *Fundamentale Idee der Angewandten Mathematik* (vgl. [5]), sie wird im Unterricht jedoch oft ziemlich reduziert; bisweilen sogar bis auf eine einzige Methode - das „Nullsetzen der ersten Ableitung". Wir meinen, daß gerade im *Optimieren* eine große mathematische Vielfalt liegen soll, daß Schüler verschiedenste Arten, an ein Optimierungsproblem heranzugehen, kennenlernen sollten - nicht nur der Anwendungsorientierung wegen, auch das Motivationspotential von Optimierungsaufgaben scheint uns im Vergleich zu anderen Themen oft etwas höher zu liegen. Doch nun zurück zur Spieltheorie, anhand derer wir einen möglichen Weg darstellen wollen, die Idee des Optimierens auf eine einfache Art zu realisieren und so die Vielfalt der Optimierungsverfahren einmal mehr zu demonstrieren.

Unentwegt müssen wir Menschen Entscheidungen treffen oder Strategien entwickeln, wir müssen uns fragen, wie wir ein gewisses Ziel möglichst schnell, mit möglichst wenig Aufwand o. ä. - also jeweils ein gewisses *Optimum* - erreichen. Auch in der Spieltheorie geht es vor allem darum, optimale Entscheidungen zu treffen, wobei wir hier nur den einfachsten Fall behandeln wollen. Wenn uns z. B. ein Spielbudenbesitzer das Spiel anbietet, eine (garantiert) faire Münze zu werfen (*Kopf* (*K*) oder *Zahl* (*Z*)), uns bei *Kopf* den doppelten Einsatz zurückzugeben und bei *Zahl* unseren Einsatz zu behalten, dann ist es wohl zunächst klar[1]), daß dies ein faires Spiel ist. Hier können wir aber keine Strategie wählen, der Zufall bestimmt alles, wir haben nur die Wahl, das Spiel entweder zu spielen oder nicht - diese Entscheidung wird jedoch, da das Spiel fair ist, nicht von zusätzlichen mathematischen Überlegungen, sondern von unserem Charakter abhängen (spiel- bzw. risikofreudige Leute werden die Herausforderung annehmen, andere nicht). An dieser Situation (Entscheidung nur durch Zufall; Fairness) würde sich auch nichts ändern, wenn sowohl der Spielbudenbesitzer als auch wir selbst jeweils eine faire Münze werfen würden, und z. B. bei zwei *gleichen* Ergebnissen ((*K,K*) oder (*Z,Z*)) wir und bei zwei *ungleichen* Ergebnissen ((*K,Z*) oder (*Z,K*)) der Spielbudenbesitzer einen gewissen Betrag (den „Einsatz", z. B. 1) gewinnen würde.

## 2 Optimale Entscheidungen bei Matrixspielen

*Beispiel 1*: Die Spieler *A* und *B* haben je eine Münze in der Hand; sie werfen die Münze nicht, sondern sie *wählen* bei ihrer eigenen Münze *Kopf* oder *Zahl*, und zwar ohne daß ein Spieler die Wahl des jeweils anderen kennt (geheime Wahl). Nun präsentieren sie einander ihr Ergebnis und die Gewinnverteilung sei dieselbe wie oben (bei gleichen Münzenseiten gewinnt *A*, bei ungleichen *B*).

Hier ist das Ergebnis nicht vom Zufall bestimmt, sondern von der willkürlichen Wahl der einzelnen Spieler. Die Spielergebnisse können in diesem Fall leicht und übersichtlich in einer Art Matrix [2]) bzw. Tabelle zusammengefaßt werden, wobei wir vereinbaren wollen, solche Tabellen jeweils vom Spieler *A* aus zu betrachten (d. h. positive Zahlen bedeuten Gewinne für *A* und negative Zahlen bedeuten Verluste für *A*). In Tabelle 1 ist die Auszahlungsmatrix für unser Spiel angegeben.

| | *B* wählt *K* | *B* wählt *Z* |
|---|---|---|
| *A* wählt *K* | 1 | –1 |
| *A* wählt *Z* | –1 | 1 |

**Tabelle 1:** Auszahlungsmatrix für Spieler *A* bei Beispiel 1

Wir wollen uns in dieser Arbeit auf die einfachste Art solcher Spiele beschränken; wir werden (im wesentlichen) nur solche betrachten, bei denen

1. nur zwei Spieler (*A* und *B*) gegeneinander spielen („Zweipersonenspiele"),
2. einer der beiden Spieler (z. B. *A*) nur zwei Wahlmöglichkeiten („Strategien") besitzt und
3. der Gewinn des einen gleichzeitig den Verlust des anderen darstellt. In Summe fließt also kein Kapital aus diesem Zwei-Spieler-System heraus (z. B. an eine Spiel-Bank o. ä.); solche Spiele heißen demnach auch „Nullsummenspiele". Daher genügt es, zur *vollständigen* Beschreibung des Spiels nur *eine* Tabelle (z. B. aus der Sicht des Spielers *A*) anzulegen.

Im obigen Spiel ist offenbar keine Wahl eines Spielers in irgendeinem Sinn „besser" als eine andere, da sich jeder Spieler bei jeder seiner Entscheidungen den gleichen Möglichkeiten gegenüber sieht (1 gewinnen oder 1 verlieren). Wahrscheinlich wird hier keiner von beiden großartige strategische Überlegungen anstellen - z. B. im Hinblick auf *Gewinnmaximierung* oder *Verlustminimierung* -, sondern sie werden (intuitiv) vielleicht denken: „Es kann nicht sehr klug sein, immer bei ein und derselben Strategie zu bleiben, denn der Gegner könnte sich darauf einstellen und mir daher jeweils Verlust bringen; ich würde richtiggehend ausgebeutet werden." Wir kommen später noch einmal

[1]) Bei der Begründung dafür hilft uns die Mathematik.

[2]) Solche Spiele werden daher oft auch als *Matrixspiele* bezeichnet.

auf Beispiel 1 zurück: Es wird sich - wie vielleicht *a priori* zu erwarten ist - herausstellen, daß es für beide am besten ist, die Münzenseiten *K* und *Z* jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dem Gegner zu präsentieren, um auf lange Sicht weder etwas zu verlieren noch etwas zu gewinnen. Nun betrachten wir ein Beispiel, bei dem einfachere Überlegungen in dieser Richtung anzustellen sind.

*Beispiel* 2: Der Spieler *A* habe die Möglichkeit, eine der beiden römischen Zahlen I oder II zu wählen, während Spieler *B* die Möglichkeit haben soll, zwischen den drei Zahlen I, II oder III zu wählen. Wählen z. B. beide die Zahl I, so gewinnt *A* den Betrag 2; die anderen Auszahlungswerte aller möglichen Spielausgänge sind wieder in einer Tabelle zusammengefaßt (siehe Tabelle 2).

| | | *B* wählt I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| *A* wählt | I | 2 | –1 | –2 |
| | II | 1 | 0 | 1 |

**Tabelle 2:** Auszahlungsmatrix für Spieler *A* bei Beispiel 2

Da es sich bei den Eintragungen in der Auszahlungsmatrix um Gewinne für *A* handelt, ist es klar, daß *A* die höchstmöglichen Eintragungen erzielen will, während *B* naturgemäß die niedrigsten anstrebt. Wir nennen deshalb *A* den *Maximumspieler* und *B* den *Minimumspieler*.

Überlegen wir nun zunächst gemeinsam mit Spieler *A*, welche Wahl für ihn die beste ist. Er kann sich z. B. folgendes denken: Wenn ich I wähle, so könnte es sein, daß *B* sich für III entscheidet, was für mich einen Verlust von 2 bedeutete (in der Tabelle – 2). Wähle ich hingegen II, so ist das Schlechteste, was mir passieren kann, daß sich *B* für II entscheidet, und ich weder etwas gewinne noch etwas verliere. Bei der Wahl von II habe ich also eine höhere Sicherheit in dem Sinne, daß ich bei I mehr verlieren könnte. Spieler *A* wird sich daher für II entscheiden, weil dann *der größte denkbare Verlust am kleinsten* ist. Der größte denkbare Verlust ist für *A* jeweils das *Minimum* einer Zeile. Er wird also jene Zeile wählen, bei der dieses Minimum am größten ist. Wir könnten auch statt *größter denkbarer Verlust* den äquivalenten Ausdruck *kleinster denkbarer Gewinn* verwenden (negativer Gewinn bedeutet ja Verlust). Dann entspricht dem Zeilen*minimum* wirklich ein Gewinn*minimum* und nicht ein Verlust*maximum*, was rein von den verwendeten Begriffen her kein „Umdenken" notwendig macht.

Nun versetzen wir uns in die Lage von *B* und überlegen abermals gemeinsam mit ihm in einer völlig analogen Weise, nämlich danach trachtend, den größtmöglichen Verlust zu minimieren, also die höchste Sicherheit zu haben: Der *größtmögliche* Verlust bedeutet diesmal (aus der Sicht von *B*) das *Maximum* einer Spalte. *B* wird also jene Wahl treffen (Spalte wählen), bei der das Spalten*maximum* am *kleinsten* ist. Die Spaltenmaxima von I, II bzw. III sind 2, 0 bzw. 1, d. h. der Spieler *B* wird ebenfalls II wählen; diese Wahl garantiert ihm analog eine höhere Sicherheit in dem Sinn, daß jede andere Wahl einen größeren Verlust mit sich bringen könnte.

**Bemerkung:** Die Überlegungen, die hier zu einem optimalen Ergebnis führen, heißen in naheliegender Weise *Mini-Max-Strategien*.

Wir können hier also leicht zu *optimalen* Verhaltensweisen der einzelnen Spieler gelangen; keiner von ihnen hätte ja Grund seine Entscheidung für II zu bereuen: Selbst wenn sie nämlich die Entscheidung des Gegners vor ihrer eigenen Entscheidung gewußt hätten, so hätte sich jeder von ihnen trotzdem für II entschieden. Es ist nicht schwer zu durchschauen, warum die Überlegungen hier so leicht zu einem optimalen Ergebnis geführt haben: Dies liegt an der Konstellation der Auszahlungstabelle, nämlich an der Tatsache, daß hier eine Zahl existiert, welche die kleinste ihrer Zeile und gleichzeitig die größte ihrer Spalte ist (die Eintragung 0 in der zweiten Zeile und zweiten Spalte). In einem Matrixschema ist es allgemein leicht zu überprüfen, ob eine solche Eintragung existiert - und zwar nicht nur bei einer $2 \times m$-Matrix, sondern allgemein bei einer $n \times m$ - Matrix: Wir markieren einfach alle *Zeilenminima* und alle *Spaltenmaxima* (indem wir sie z. B. neben die jeweiligen Zeilen bzw. unter die jeweiligen Spalten schreiben) und überprüfen, ob das *größte Zeilenminimum* gleich dem *kleinsten Spaltenmaximum* ist. Ist dies der Fall, so haben wir damit gleichzeitig die optimalen Wahlen („Strategien") für beide Spieler gefunden.

**Bemerkung:** Diese beiden optimalen Strategien zusammen bilden die *Lösung des Spiels*. Der Ort einer solchen speziellen Eintragung heißt *Sattelpunkt* und die Zahl selbst an dieser Stelle heißt *Wert des Spiels*.

Wir können also in diesem Fall auch Spiele untersuchen, bei denen jeder Spieler mehr als zwei Wahlmöglichkeiten zur Verfügung hat, wie etwa bei einem Spiel mit der Auszahlungsmatrix von Tabelle 3.

| | | B I | II | III | IV | V | Zeilen-minimum |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | 0 | 1 | 1 | $\boxed{0}$ | 0 | $\boxed{0}$ |
| A | II | –2 | 2 | 4 | –1 | –5 | –5 |
| | III | 2 | –3 | 2 | –2 | 2 | –3 |
| Spalten-maximum | | 2 | 2 | 4 | $\boxed{0}$ | 2 | |

**Tabelle 3:** Auszahlungsmatrix eines Spiels mit „Sattelpunkt"

Es ist hier leicht zu erkennen, daß sich in der ersten Zeile und vierten Spalte ein *Sattelpunkt* mit dem Wert 0 befindet. Wählt Spieler *A* die Strategie I, so wird ihm garantiert, daß er mindestens 0 gewinnt (also sicher nichts verliert); wählt Spieler *B* Strategie IV, so wird ihm garantiert, daß er höchstens 0 verliert. Jede andere Wahl eines beteiligten Spielers könnte für diesen einen höheren möglichen Verlust bedeuten, weshalb jedem zu raten wäre, sich der jeweils optimalen Strategie zu bedienen (I für *A* bzw. IV für *B*).

In anderen Fällen eines Matrixspieles (ohne Sattelpunkt) kann ebenfalls immer eine *optimale* Lösung gefunden werden, und zwar auch nach einem *Minimax-Prinzip* (siehe unten) - dies besagt ein Kernsatz der Spieltheorie. Wenn dabei ein Spieler nur zwei Wahlmöglichkeiten hat, so ist das Finden dieser optimalen Lösung besonders einfach, weshalb wir uns im folgenden auf solche Fälle beschränken wollen.

*Beispiel 3*: Ein Spiel zwischen den Spielern sei - wie gewohnt - durch eine Auszahlungsmatrix (Tabelle 4) gegeben. Welchen Rat könnte man den einzelnen Spielern geben?

Wir sehen, daß hier das größte Zeilenminimum –1 und das kleinste Spaltenmaximum 2 beträgt, also kein Sattelpunkt vorliegt. Überlegen wir zunächst was passieren würde, wenn die Spieler analog zu oben dächten (Minimierung des größtmöglichen Verlustes) und jene Strategie wählten, bei der die schon an-

| | | $B$ I | II | Zeilen-minimum |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | I | 4 | $-1$ | $\boxed{-1}$ |
| | II | $-2$ | 2 | $-2$ |
| Spalten-maximum | | 4 | $\boxed{2}$ | |

**Tabelle 4:** Auszahlungsmatrix eines Spiels ohne Sattelpunkt

gesprochene Sicherheit am größten ist. Spieler $A$ müßte dann die Strategie I wählen und Spieler $B$ die Strategie II - es ergäbe sich $-1$, also ein Verlust von $A$. Nun würde sich nach dem Spiel aber $A$ wahrscheinlich ärgern und insoferne ist diese Wahl kaum als *optimal* zu bezeichnen. Spieler $A$ könnte sich z. B. denken: „Wenn ich gewußt hätte, daß sich $B$ für II entscheidet, dann hätte ich selbstverständlich auch II gewählt - ich hätte damit 2 gewonnen!" Bei einer Wiederholung des Spiels würde er wahrscheinlich II wählen, wenn er damit rechnet, daß $B$ bei II bleibt. Und er darf berechtigt darauf hoffen, denn Spieler $B$ kann mit seiner Wahl ja zufrieden sein; dieser wäre bei seiner Entscheidung für II geblieben, selbst wenn er gewußt hätte, daß $A$ Strategie I wählt (er hätte sonst ja 4 verloren). In einem zweiten Durchgang würde sich $A$ also wahrscheinlich für II entscheiden, was $B$ dazu bewegen würde, sich in einem dritten Durchgang doch für I zu entscheiden usw. - es käme nie zu einem stabilen Punkt, bei dem jeder mit seiner Entscheidung zufrieden sein könnte.

Wir sehen, daß bei diesem Beispiel (auf Dauer) keine Strategie der Spieler optimal sein kann [3]). Die Strategien I und II werden auch „reine" Strategien genannt (im Gegensatz zu den folgenden „gemischten" Strategien), da sie die ursprünglichen (reinen) Wahlmöglichkeiten darstellen. Nun erhebt sich jedoch die Frage, ob es nicht doch Überlegungen bzw. in einem gewissen Sinn *optimale* Entscheidungen gibt, die den einzelnen Spielern ihre Sicherheit im Sinne der Minimierung des größtmöglichen Verlustes gibt (insbesondere auf längere Sicht, wenn viele Spieldurchgänge absolviert werden).

Da die *reinen* Strategien nicht optimal sein können, wird es zunächst naheliegen, diese in einem noch zu bestimmenden Verhältnis zu *mischen*. Was soll aber *mischen* heißen? Wenn wir uns z. B. für eine Mischung 1:1 entscheiden und diese so anwenden, daß wir streng abwechselnd Strategie I und II wählen, so wird dies der Gegner ziemlich rasch durchschauen und sich darauf einstellen. Es muß also für den Gegner undurchsichtig bleiben, welche Entscheidung wir im einzelnen Treffen, und dies kann z. B. durch einen geheimen Zufallsmechanismus geschehen. Entscheidet sich also z. B. Spieler $A$ für ein Mischverhältnis von 1:1, so könnte er z. B. jedesmal einen (geheimen) Münzwurf für sich entscheiden lassen, ob er nun I oder II wählt, so daß kein regelmäßiges (und für $B$ vorhersehbares) Entscheidungsmuster entstünde. Auch für jede andere gewünschte Mischung der reinen Strategien läßt sich ein Zufallsmechanismus [4]) vorstellen, der mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für seine Ergebnisse dem Spieler seine Entscheidung für I oder II abnimmt (und zwar prinzipiell nicht vorhersehbar - von keinem der Spieler).

[3]) D. h. weder „*immer* I" noch „*immer* II" können zu einem optimalen Ergebnis führen, da sich der jeweils andere Spieler darauf einstellen und seinerseits entsprechend reagieren („kontern") könnte.

[4]) Die konkrete Konstruktion der einzelnen Zufallsmechanismen sei hier nicht unser Thema!

Wir untersuchen nun das Spiel, wenn sich Spieler $A$ mit Wahrscheinlichkeit $p$ für I und daher mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ für II entscheidet; die analogen Wahrscheinlichkeiten der Wahlen des Spielers $B$ seien $q$ bzw. $1-q$. Da jetzt Wahrscheinlichkeiten ins Spiel gekommen sind, werden nun sämtliche Überlegungen nicht mehr für *tatsächliche* Gewinne bzw. Verluste anzustellen sein, sondern nur mehr noch für *erwartete*. Erwartungswerte von Gewinnen bzw. Verlusten werden daher im folgenden eine große Rolle spielen.

Kann nun dem Spieler $A$ analog zu den obigen *reinen* Mini-Max-Strategien ein Rat gegeben werden, wie er $p$ wählen soll, damit sein *größter erwarteter Verlust möglichst klein* bzw. anders formuliert sein *kleinster erwarteter Gewinn möglichst groß* wird? Gibt es eine optimale Lösung durch *gemischte* Mini-Max-Strategien? Wir können zunächst den Erwartungswert $E[G]$ des Gewinnes für $A$ bestimmen, wenn wir für den Spieler $B$ eine fixe Wahl voraussetzen, z. B. I. Dieser Erwartungswert ist dann offenbar eine Funktion von $p$; die Schreibweise $E[G(\mathrm{p,I})]$ soll ausdrücken, daß beim betrachteten Erwartungswert der Spieler $B$ die Strategie I wählt und er von $p$ abhängig ist. Wir erhalten dafür (siehe Tabelle 4):

$$(1)\quad E[G(p,\mathrm{I})] = 4 \cdot p + (-2) \cdot (1-p) = 6p - 2$$

Wenn der Spieler $B$ sich hingegen für II entscheidet, so beträgt der erwartete Gewinn des Spielers $A$

$$(2)\quad E[G(p,\mathrm{II})] = (-1) \cdot p + 2 \cdot (1-p) = 2 - 3p.$$

Nun weiß jedoch $A$ nicht, ob sein Gegner $B$ die Strategie I oder II wählen wird und auch nicht mit welcher Wahrscheinlichkeit $q$ der Spieler diese Wahl trifft. Er kann sich nur darauf verlassen, daß $B$ sicher bemüht sein wird, die Wahrscheinlichkeit $q$ so zu wählen, daß der erwartete Gewinn von $A$ minimiert wird. Der Erwartungswert $E[G]$ ist i. a. natürlich nicht nur von $p$, sondern selbstverständlich auch von $q$ abhängig (die obigen Erwartungswerte wurden ja unter der Voraussetzung berechnet, daß sich $B$ entweder für I oder für II entscheidet) - wir bezeichnen im folgenden den Erwartungswert $E[G(p,q)]$ des Gewinnes für $A$ der Kürze und Übersicht halber mit $E(p,q)$ oder einfach mit $E$. Wir erhalten dafür anhand Tabelle 4 bzw. durch die Gleichungen (1) bzw. (2) den Funktionsterm

$$(3)\quad E := E[G(p,q)] = (6p-2) \cdot q + (2-3p) \cdot (1-q),$$

den wir jedoch nur der Vollständigkeit halber angeben - er ist für das Weitere gar nicht wichtig! $A$ weiß also, daß $B$ das Minimum $\min\limits_q E$ anstrebt, so daß er selbst danach trachten wird, diesen minimalen erwarteten Gewinn möglichst groß werden zu lassen, d. h. er wird versuchen, durch seine Wahl von $p$ das Maximum des kleinsten erwarteten Gewinnes

$$\max_p (\min_q E) =: V_1$$

zu erreichen. Das für $A$ in diesem Sinn optimale $p$ kann nun graphisch überraschend einfach ermittelt werden. In Fig. 1 sind die zwei Graphen (Geraden) dargestellt, die den Gleichungen (1) und (2) entsprechen - es handelt sich dabei ja um affin-lineare Funktionen. Die Gerade I: $E(p) = 6p - 2$ stellt die Gewinnerwar tung für $A$ dar, wenn $B$ sich für I entscheidet, die Gerade II: $E(p) = 2 - 3p$ stellt diese für den Fall dar, daß $B$ die Strategie II wählt.

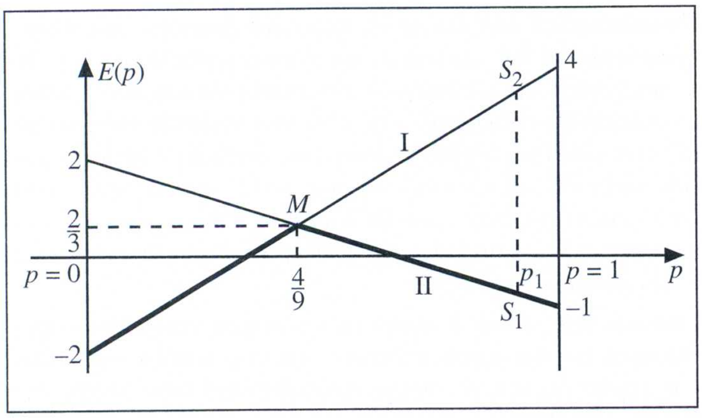


Fig. 1: Graphische Darstellung der Gewinnerwartung in Abhängigkeit von $p$

Sei nun $p = p_1$ ein beliebiger Wert zwischen 0 und 1. Jede solche (feste) Stelle $p_1$ entspricht einer speziellen Wahl von $A$, und bei jedem $p = p_1$ kann in Fig. 1 abgelesen werden, in welchem Bereich sich die Gewinnerwartung für $A$ bewegen wird (abhängig von $B$ bzw. dessen Wahl-Wahrscheinlichkeit $q$). Betrachten wir zunächst z. B. die beiden Randpunkte $p = 0$ und $p = 1$. Bei $p = 0$ (linker Rand in Fig. 1; $A$ wählt also immer II) bewegt sich die Gewinnerwartung zwischen –2 und 2. Bei $p = 1$ (rechter Rand in Fig. 1; $A$ wählt immer I) bewegt sich die Gewinnerwartung zwischen –1 und 4.

Genau dieselben Überlegungen könnten wir nun für jeden Wert $p_1$ zwischen 0 und 1 anstellen, der erwartete Gewinn wird jeweils zwischen beiden Ordinatenwerten von $S_1$ und $S_2$ liegen. Etwas stärker ist in Fig. 1 jener Streckenzug eingezeichnet, der die jeweilige kleinste Gewinnerwartung repräsentiert. Da $A$ bestrebt ist, diese kleinstmögliche Gewinnerwartung zu maximieren, wird er sich für jenes $p$ entscheiden, das beim Schnittpunkt $M$ der beiden Geraden liegt. Eine leichte Rechnung zeigt, daß dieses $p_{\text{opt}}$ hier $\frac{4}{9}$ beträgt. Die dadurch gesicherte Gewinnerwartung beträgt $V_1 = \frac{2}{3}$.

Dieser Wert $p_{\text{opt}} = \frac{4}{9}$ hat nicht nur die Eigenschaft, daß er die kleinstmögliche Gewinnerwartung möglichst groß werden läßt, sondern noch eine andere ganz wichtige, die auch aus Fig. 1 unmittelbar abgelesen werden kann: Bei diesem Wert kann die Gewinnerwartung (Ordinatenwert zwischen den beiden eingezeichneten Geraden) gar nicht mehr schwanken, sie ist *unabhängig* davon, ob $B$ immer I, immer II oder irgendeine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung ($q$ bzw. $1 - q$) wählt. Diese Wahl von $p_{\text{opt}}$ bzw. $1 - p_{\text{opt}}$ heißt auch optimale gemischte Mini-Max-Strategie.

**Bemerkung:** Insofern ist das Spiel eigentlich nicht als „fair“ zu bezeichnen, da sich $B$ überhaupt nicht gegen die Tatsache wehren kann, im Mittel $\frac{2}{3}$ an $A$ zu verlieren, wenn dieser $p = \frac{4}{9}$ wählt. Dies bedeutet: Wenn $B$ wüßte, daß $A$ mit der gerade bestimmten optimalen Strategie spielt, dann brauchte er überhaupt keine Überlegungen mehr anzustellen, da er mit keiner einzigen Strategie an der Gewinnerwartung von $A$ etwas ändern könnte. Da er aber sich dessen nicht sicher sein kann, überlegt er lieber selbst, ob es auch für ihn eine optimale Strategie gibt - um keinen „bösen Überraschungen“ ausgesetzt werden zu können.

Versetzen wir uns nun in die Lage von $B$. Er weiß, daß sein Gegenspieler $A$ bestrebt sein wird, die Gewinnerwartung $E$ zu maximieren. Analog wird er seinen Wert für $q$ so wählen, daß dieses von $A$ angestrebte Maximum $\max\limits_p E$ einen nur möglichst kleinen Wert annehmen kann. Es gilt für ihn also durch seine Wahl von $q$ das Minimum

(5) $\min\limits_q (\max\limits_p E) =: V_2$

anzustreben, wodurch er sicherstellt, daß sein größter erwarteter Verlust den Wert $V_2$ nicht übersteigt. Die Auswahl des optimalen Wertes $q_{\text{opt}}$ kann wieder nach dem gleichen Prinzip erfolgen. Wenn sich $A$ ständig für I entscheidet, so erhalten wir für die Gewinnerwartung von $A$

(6) $E(\text{I},q) = 4 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q) = 5q - 1.$

Wenn der Spieler $A$ hingegen immer II wählt, so ergibt sich

(7) $E(\text{II},q) = (-2) \cdot q + 2 \cdot (1 - q) = 2 - 4q.$

Anhand der graphischen Darstellung dieser Gleichungen (siehe Fig. 2) kann nun analog der Wert für $q_{\text{opt}}$ ermittelt werden. Die jeweils *größte* Gewinnerwartung für $A$, die $B$ ja *minimieren* will, ist wieder etwas stärker ausgeführt, und für jeden festen Wert $q_1$ ist wieder abzulesen, daß der erwartete Gewinn zwischen den Ordinatenwerten von $S_1$ und $S_2$ liegen wird.

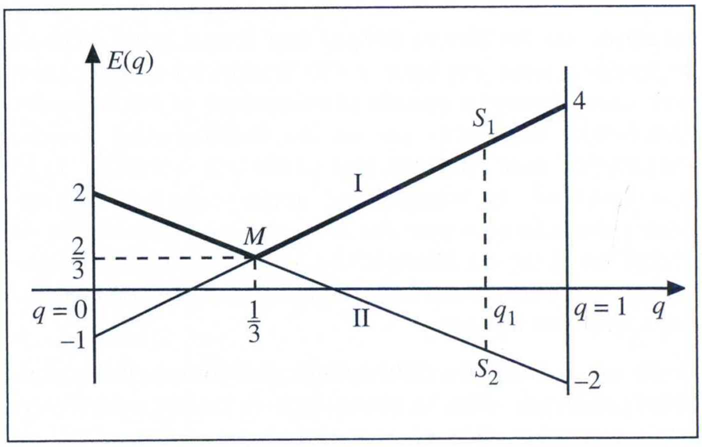


Fig. 2: Graphische Darstellung der Gewinnerwartung in Abhängigkeit von $q$

Beim Schnittpunkt $M$ der beiden Geraden ist offenbar die jeweils größte Gewinnerwartung (abhängig von $p$) am kleinsten, und wir erhalten aus $5q - 1 = 2 - 4q$ unmittelbar $q_{\text{opt}} = \frac{1}{3}$. Diese Wahl von $q$ bedeutet nun analog, daß dann der erwartete Gewinn für $A$ den Wert $V_2 = 5 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 2 - 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ nicht übersteigt. Mehr noch, er beträgt sogar genau $\frac{2}{3}$ und zwar wiederum unabhängig davon, welche Strategie der Spieler $A$ wählt. Jeder Spieler kann also aus eigener Kraft dafür sorgen, daß die Gewinnerwartung für $A$ den Wert $\frac{2}{3}$ weder über- noch unterschreitet. Wenn nur einer der beiden mit seiner optimalen gemischten Mini-Max-Strategie spielt, so ist die Stabilität der Gewinnerwartung bei $\frac{2}{3}$ schon garantiert; da aber keiner vom anderen weiß, ob dieser wirklich mit der optimalen Strategie spielt, werden beide lieber selbst mit der optimalen Strategie spielen, um sozusagen dem anderen „den Wind aus den Segeln zu nehmen“ (seine Entscheidung hat ja dann keinen Einfluß mehr auf den erwarteten Gewinn).

**Bemerkungen:**

- Es ist hier übrigens kein Zufall, daß

$$(8) \quad \max_p(\min_q E) = \min_q(\max_p E) \quad \text{bzw.} \quad V_1 = V_2$$

gilt. Ein Hauptsatz der Spieltheorie garantiert dies zumindest für die in Rede stehenden Matrixspiele. Ein elementarer Beweis (Strahlensatz) für den Fall von $2 \times 2$-Spielen findet sich am Schluß des Aufsatzes - dieser ist sicher auch für den Schulunterricht geeignet. Dieser Wert wird analog zu den Sattelpunktspielen *Wert des Spiels* genannt.

- In [7] (S. 240ff) ist ein ähnliches Spiel als „Beispiel für moderne anwendbare Mathematik" zu finden; es heißt dort: „Das Resultat kann man als einen Beitrag zum Weltfrieden deuten: Kennen zwei Supermächte die Möglichkeiten des Gegners [...] und die jeweiligen Gewinne oder Verluste, also das 'Auszahlungsschema', und traut jeder dem anderen zu, daß er die optimale Strategie auszurechnen vermag, so können sie sich auch ohne 'heißen' Krieg auf das Ergebnis einigen ..." (S. 244).
- Wird das beschriebene Verfahren auf Beispiel 1 angewendet, so ergibt sich als optimale Lösung $p_{\text{opt}} = q_{\text{opt}} = \frac{1}{2}$ bzw. $V_1 = V_2 = 0$.

Wenn beide Spieler z. B. drei reine Strategien zur Verfügung haben, so gibt es auch ein ähnliches graphisches Verfahren zur Lösung - es müssen „nur" Ebenen im Raum statt Geraden in der Ebene gezeichnet werden [5]); wir wollen jedoch nicht näher darauf eingehen und betrachten statt dessen im folgenden ein Beispiel, bei dem der Spieler $A$ zwei reine Strategien und der Spieler $B$ fünf reine Strategien hat. Wenn nämlich nur einer der beiden mehr als zwei reine Strategien hat, so verkompliziert sich das Lösungsverfahren kaum, insbesondere findet man mit analogen ebenen Darstellungen das Auslangen!

*Beispiel 4*: Wir wollen nun jenes Spiel betrachten, dessen Auszahlungsmatrix in Tabelle 5 wiedergegeben ist. Dabei fällt vielleicht auf, daß keine einzige negative Eintragung vorliegt (Spieler $B$ könnte also nie etwas gewinnen). Dazu ist zu sagen, daß es sich hier nicht um ein Spiel eines Spielbudenbesitzers handeln kann (niemand würde darauf einsteigen), sondern z. B. um eine gegebene Situation, aus der die „Spieler" nicht aussteigen, sondern nur versuchen können, das Beste daraus zu machen. [Oder die Eintragungen sind das Resultat einer Erhöhung jeder Zahl um z. B. 3, mit dem Ziel, negative Zahlen zu vermeiden, so daß die ursprüngliche erste Zeile vielleicht 4, –1, –3, 2, –2 gelautet hat; solche „Transformationen" wären klarerweise erlaubt.]

| | | B | | | | | Zeilen-minimum |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III | IV | V | |
| A | I | 7 | 2 | 0 | 5 | 1 | 0 |
| | II | 2 | 4 | 7 | 4 | 5 | $\boxed{2}$ |
| Spalten-maximum | | 7 | $\boxed{4}$ | 7 | 5 | 5 | |

**Tabelle 5:** Auszahlungsmatrix bei Beispiel 4

Sei wieder $A$ der Maximumspieler, der danach trachtet, seinen Minimalgewinn zu maximieren. Wir machen zur Lösung wieder eine Skizze wie Fig. 3. Da $B$ jetzt nicht nur zwei, sondern fünf reine Strategien zur Auswahl hat, müssen wir auch fünf Geraden (Strecken) in die Skizze einzeichnen (i. e. Funktionsgraphen für die Gewinnerwartung). Dafür brauchen die einzelnen Geradengleichungen (wie oben z. B. Gleichungen (1) und (2)) gar nicht explizit bestimmt zu werden: Wenn $B$ z. B. die Strategie I wählt, so hat die Gewinnerwartung bei $p = 0$ (d. h. $A$ wählt sicher II) den Wert 2, während sie bei $p = 1$ (d. h. $A$ wählt sicher I) 7 beträgt (siehe Tabelle 5). D. h. wir können die Strecke ganz einfach erhalten, indem wir den Punkt (0|2) mit dem Punkt (1|7) verbinden. Analog verfahren wir mit den anderen vier Möglichkeiten der reinen Strategien von $B$ und erhalten so die in Fig. 3 eingezeichneten fünf Funktionsgraphen der Gewinnerwartung (Strecken). Der jeweils kleinste erwartete Gewinn, den $A$ zu maximieren sucht, ist wieder etwas stärker ausgeführt. Für jedes feste $p$ kann nun das Intervall abgelesen werden, in dem die Gewinnerwartung (abhängig von der Strategie des Spielers $B$) liegen wird. Für den eingezeichneten Wert $p_1$ wird die Gewinnerwartung zwischen den Ordinatenwerten der Punkte $S_3$ und $S_1$ liegen.

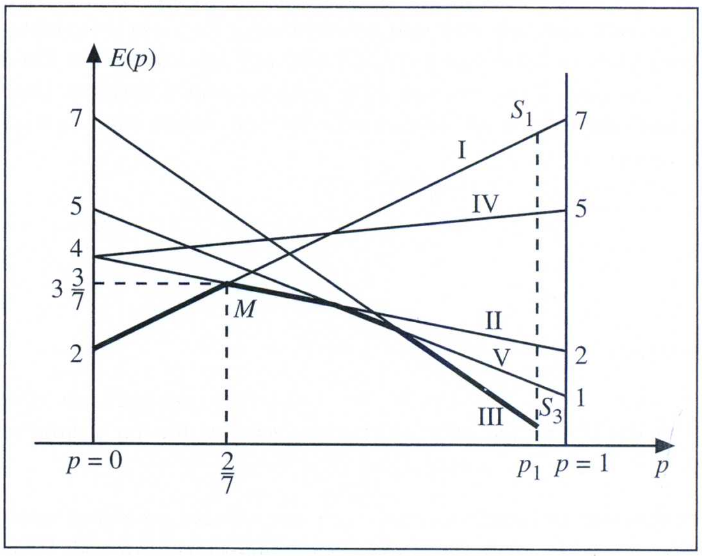


Fig. 3: Graphische Darstellung der Gewinnerwartung in Abhängigkeit von $p$

Wir sehen, daß die minimale Gewinnerwartung (für $A$) im Punkt $M$ am größten ist, dieser ist der Schnittpunkt der Geraden I und II. Es genügt also, die Gleichung dieser beiden Geraden explizit zu bestimmen, um deren Schnittpunkt zu errechnen. Wir erhalten hierfür I : $E(p) = 5p + 2$ bzw. II: $E(p) = 4 - 2p$ und deren Schnitt liefert $p = \frac{2}{7}$. Wenn also Spieler $A$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{7}$ die Strategie I und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{7}$ sich für II entscheidet, dann sichert er sich eine Mindestgewinnerwartung - wie leicht nachzurechnen ist - von $V_1 = 3\frac{3}{7}$. Es besteht hier allerdings zum obigen Fall, bei dem beide Spieler nur über zwei reine Strategien verfügten, ein wesentlicher Unterschied: Wenn der Spieler $A$ mit seiner optimalen gemischten Mini-Max-Strategie spielt ($p = \frac{2}{7}$), dann ist hier der erwartete Gewinn nicht mehr unbedingt *gleich* $V_1$, sondern wirklich größer oder gleich $V_1$, der erwartete Gewinn kann sehr wohl noch schwanken (hier bis zum Ordinatenwert der Gerade III, der hier genau 5 beträgt) und ist nicht unabhängig von der Strategie des Spielers $B$ (hier also: $V_1 = 3\frac{3}{7} \le E \le 5$).

Nun versetzen wir uns wieder in die Lage des Spielers $B$, für den man scheinbar jetzt nicht mehr so leicht zu einer optimalen Lösung kommt, da er nicht nur zwei, sondern fünf reine Strategien besitzt - und fünfdimensionale graphische Darstellungen sind

[5]) Wenn beide mehr als drei Strategien zur Auswahl haben, müssen rechnerische Verfahren der *Linearen Optimierung* angewendet werden.

eben nicht mehr gut möglich. Der schon erwähnte Hauptsatz der Spieltheorie sichert zunächst wenigstens die Existenz einer optimalen Lösung für $B$ mit der gleichen optimalen Gewinnerwartung $V_2 = V_1 = 3\frac{3}{7}$. Wir wissen nur noch nicht, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $B$ die Strategien I bis V wählen soll, um zu sichern, daß der Maximalgewinn von $A$ (= Maximalverlust von $B$) den Wert des Spieles, nämlich $3\frac{3}{7}$ nicht überschreitet. Werfen wir noch einen Blick auf Fig. 3. Wenn $A$ mit seiner optimalen Strategie $p = \frac{2}{7}$ spielt - und $B$ muß wohl damit rechnen - , wird *nur im Schnittpunkt* $M$ selbst (und *nicht* schon automatisch bei $p = \frac{2}{7}$, unabhängig von $B$) die Gewinnerwartung (für $A$) von $3\frac{3}{7}$ nicht überschritten. $B$ muß also auch selber Überlegungen anstellen, um den erwarteten Verlust wirklich durch $3\frac{3}{7}$ zu beschränken. Der Punkt $M$ ist Schnittpunkt der beiden Strecken I und II, was bedeutet, daß $B$ im optimalen Fall nur eine Mischung der beiden Strategien I und II verwenden darf. Die Fig. 3 hilft uns also, jene reinen Strategien von $B$ zu entdecken, die er überhaupt verwenden darf, und dies sind im Normalfall nur zwei - wie hier. Das gegebene Spiel reduziert sich also auf ein einfacheres Matrix-Spiel, bei dem beide nur zwei reine Strategien besitzen. Die Auszahlungstabelle für das vereinfachte Spiel lautet dann so wie in Tabelle 6.

| | | *B* I | II |
|---|---|---|---|
| A | I | 7 | 2 |
| | II | 2 | 4 |

**Tabelle 6:** Auszahlungsmatrix des reduzierten Spiels

Dieses Spiel läßt sich analog zum vorherigen nun auch aus der Sicht von $B$ optimal lösen; es ergeben sich hier für ihn ebenfalls die gleichen Werte wie für $A$, nämlich $\frac{2}{7}$ bzw. $\frac{5}{7}$.

**Bemerkung:** Es könnte auch passieren, daß es **keine eindeutige** optimale Lösung ($p = p_{opt}$) für $A$ gibt, sondern ein ganzes Intervall. Dies wäre in Beispiel 4 bzw. Fig. 3 dann der Fall, wenn die Gerade II zwar durch $M$, aber parallel zur $p$-Achse verliefe. In Spalte II der Tabelle 6 müßte dafür zweimal der Wert $3\frac{3}{7}$ stehen. $B$ müßte dann immer die reine Strategie II wählen bzw. für $A$ wäre jedes $p$ mit $\frac{2}{7} \le p \le \frac{11}{28}$ (wie man leicht nachrechnet - Schnitt dieser Parallelen mit V) eine optimale Lösung.

Wenn durch den optimalen Punkt $M$ in Fig. 3 mehr als zwei Strecken gingen - das Spiel ließe sich ja dann nicht eindeutig auf zwei Möglichkeiten für $B$ reduzieren -, so kann mit Hilfe einer einfachen Zusatzüberlegung aber trotzdem *eine* optimale Lösung für $B$ gefunden werden (vgl. die Bemerkung am Ende des Beitrages auf S. 107).

In manchen Situationen kann jedoch die Bestimmung der optimalen Strategie nur *eines* Spielers für die Beantwortung eines Problems ohnehin reichen - wie z. B. in folgender „Spielsituation“:

*Beispiel 5* (vgl. [4], S. 96): Ein Arzt möge unter zwei Medikamenten $M_1$ und $M_2$ eines auswählen können, um eine Krankheit zu behandeln, von der bekannt ist, daß genau einer von zwei möglichen Erregern $E_1$ und $E_2$ die Krankheitsursache ist. Aufgrund statistischer Untersuchungen der Arzneimittelfirma seien die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Heilung eines Patienten durch die einzelnen Medikamente sehr genau bekannt, wenn ein bestimmter Erreger vorliegt (siehe Tabelle 7). Welches Medikament soll der Arzt verschreiben, wenn er keine Informationen über die Krankheitsursache (= Erreger) hat?

| | $E_1$ | $E_2$ |
|---|---|---|
| $M_1$ | 0,6 | 0,4 |
| $M_2$ | 0,3 | 0,9 |

**Tabelle 7:** „Auszahlungsmatrix“ des Spiels Arzt - Natur

Das Problem kann als „Zweipersonen-Spiel“ zwischen Arzt und Natur aufgefaßt werden: Die Natur wählt (geheim) eine der beiden Ursachen und der Arzt wählt eines der beiden Medikamente. Die „Auszahlungen“ seien hier nicht Gewinne, sondern Heilungswahrscheinlichkeiten. Die Tabelle 7 gibt z. B. an, daß das Medikament $M_1$ bei Vorliegen des Erregers $E_1$ in 60% der Fälle erfolgreich wirkt. Analog sind die anderen bedingten Wahrscheinlichkeiten zu interpretieren.

Wäre dem Arzt die Krankheitsursache bekannt, so wäre es wohl keine besonders hohe Kunst, die richtige (optimale) Wahl der Medikamente zu treffen (bei $E_1$ würde er wohl $M_1$ und bei $E_2$ das Medikament $M_2$ wählen). Wir wollen jedoch eine optimale Entscheidung des Arztes auch dann finden, wenn er *gar nichts* über die zwei möglichen Ursachen weiß [6]). Der Arzt (der Maximum-Spieler) will offenbar möglichst große Eintragungen in der „Gewinnmatrix“ erreichen; er will naturgemäß das Risiko minimieren, d. h. seine Einsatzwahrscheinlichkeiten für die Medikamente so wählen, daß die jeweils kleinstmögliche Heilungs-Chance möglichst groß wird. Für diese Heilungs-Chance kann er dann garantieren. Durch das einfache graphische Lösungsverfahren erhalten wir hier $p_{opt} = \frac{3}{4}$ bzw. $V_1 = 0{,}525$ (= „Wert des Spiels“). Wenn also der Arzt in 75 % aller Krankheitsfälle, in denen er nichts über die Ursache weiß, das Medikament $M_1$ verschreibt und in 25% das Medikament $M_2$, dann verhält er sich optimal in dem Sinne, daß bei jeder anderen Wahl von $p$ seine Erfolgsaussichten, für die er *garantieren* kann, geringer wären (das Minimum der Heilungs-Chance ist hier eben maximal). Der Arzt müßte also - so befremdend dies auch klingen mag - einen *Zufallsmechanismus* über den Medikamenteneinsatz entscheiden lassen, der mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ ein bestimmtes Ergebnis liefert, bzw. mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ dieses eben nicht liefert [7]).

Da es sich um ein $2 \times 2$-Spiel handelt, stellt der Wert 0,525 hier nicht nur seine minimale Chance dar, sondern genau die (eindeutige) Chance für Heilung, völlig unabhängig davon, mit welchen relativen Häufigkeiten die zwei Erreger als Krankheitsursache auftreten!

Zum Schluß sei noch ein besonders elementarer Beweis des Hauptsatzes der Spieltheorie (hier nur für $2 \times 2$-Matrixspiele)

[6]) Dies ist natürlich *nicht realistisch*, denn wenn die Pharma-Firma schon große statistische Untersuchungen durchführt, dann wird sie wohl z. B. auch untersuchen, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei Vorliegen der Krankheit die eine oder die andere Ursache in Frage kommt. Diese Information würde dem Arzt natürlich wesentlich helfen, denn sie würde ihm die gemischte Strategie seines Gegners - der Natur - bekanntgeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit also von der Natur $E_1$ bzw. $E_2$ als Ursache „gewählt“ wird.

[7]) Auch bei den üblichen und notwendigen Medikamenten-Vergleichstests bestimmt oft der Zufall, ob ein Patient der *Versuchsgruppe* oder der *Vergleichsgruppe* angehören soll, also darüber, mit welcher Methode der einzelne Patient behandelt wird.

angeführt (für einen ähnlichen und einen weiteren siehe z. B. [8]).

**Hauptsatz der Spieltheorie:** Bei jedem Zwei-Personen-Nullsummenspiel (hier: mit jeweils 2 Wahlmöglichkeiten der Spieler) mit einem Auszahlungsschema wie in Tabelle gibt es optimale Werte $p_{\text{opt}}$ und $q_{\text{opt}}$ (im obigen Sinn) und es gilt:

$$V_1 := \max_p(\min_q E(p,q)) = \min_q(\max_p E(p,q)) =: V_2.$$

| | | B I | B II |
|---|---|---|---|
| A | I | *a* | *b* |
| | II | *c* | *d* |

**Tabelle 8:** Allgemeine Auszahlungsmatrix eines 2 × 2-Spiels

*Beweis* des Hauptsatzes [8]): In Fig. 4 ist die Situation in Abhängigkeit von *p* wieder graphisch dargestellt. Zunächst ist klar, daß der Wert $\max_p(\min_q E(p,q)) = V_1$ offenbar als Ordinate des Punktes *M* abzulesen ist. Für die Koordinaten des Punktes *M* ergibt sich übrigens (Schneiden der beiden Geraden)

$$p_{\text{opt}} = \frac{d-c}{(a-c)-(b-d)} \quad \text{und} \quad V_1 = \frac{ad-bc}{(a-c)-(b-d)}.$$

Nun bringen wir den zweiten Spieler *B* ins Spiel und wollen seine Strategien in derselben Fig. darstellen. Er mischt seine Strategien I und II im Verhältnis $q : (1-q)$, d. h. die Strecken *ab* und *cd* werden im Verhältnis $(1-q) : q$ geteilt (Punkte *X* und *Y*). Jede gemischte Strategie von *B* (Wahl von *q*) kann in Fig. 4 durch eine Strecke *XY* dargestellt werden, die durch *M* geht (also im Winkelraum *aMb* bzw. *cMd* liegt, Strahlensatz!).

Jede solche Strecke *XY* (durch die Wahl von *q* bestimmt) stellt die jeweilige Gewinnerwartung für *A* in Abhängigkeit von *p* dar; insbesondere ist z. B. $E(\text{I},q) = X$ (bei $p = 1$) oder $E(\text{II},q) = Y$ (bei $p = 0$). In Fig. 4 ist diese Gewinnerwartung auch für ein spezielles Wertepaar $(\bar{p}, q)$ eingezeichnet. Für $V_2$ folgt nun aus Fig. 4 unmittelbar (die Extrema bei einer geraden Strecke befinden sich - zumindest auch - am Rand!)

$$V_2 = \min_q(\max_p E(p,q)) = \min_q(\max[E(\text{I},q), E(\text{II},q)]) = \min_q(\max[X,Y]) = V_1,$$

da jede Strecke *XY* (im Winkelraum *aMb* bzw. *cMd*) durch den Punkt *M* geht und $V_1$ dessen Ordinate ist. Die für *B* optimale Wahl von *q* ist also jene, die in Fig. 4 durch die strichlierte *waagrechte* Linie dargestellt wird; dann beträgt ja, wie wir auch

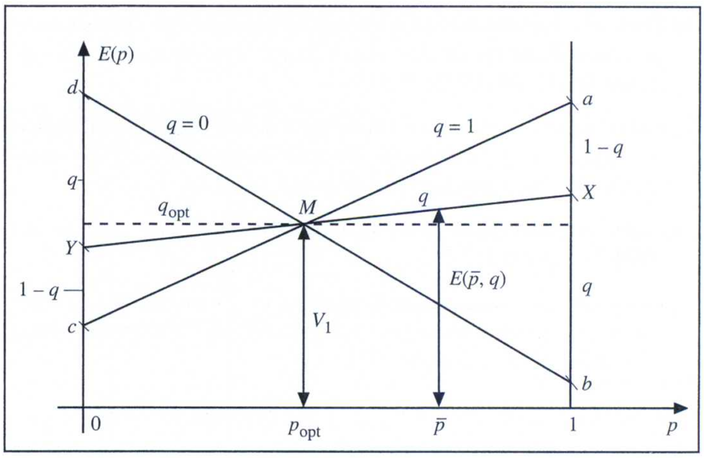


Fig. 4: Graphische Darstellung der Gewinnerwartung in Abhängigkeit von *p*

schon weiter oben bei der Darstellung der Gewinnerwartung in Abhängigkeit von *q* gesehen haben, die Gewinnerwartung immer $V_1$ - unabhängig von der Strategie des Spielers *A* (Wahl von *p*).

Rechnerisch kann $q_{\text{opt}}$ auch dadurch leicht gefunden werden, indem man die beiden *Steigungen* ($a - c$ und $b - d$) so „mischt", daß sich insgesamt Steigung 0 ergibt:

$$(a-c)\cdot q + (b-d)\cdot(1-q) = 0$$
$$\Rightarrow \quad q_{\text{opt}} = \frac{-(b-d)}{(a-c)-(b-d)}.$$

**Bemerkung:** Wir haben gesehen, daß in unserem Fall der Spieler *B* die Wahl von *q* so treffen muß, daß die Gewinnerwartung (bei der Darstellung in Abhängigkeit von *p*) einer waagrechten Strecke entspricht. Darin liegt auch eine Lösungsidee, falls es bei mehreren Wahlmöglichkeiten für *B* der Fall sein sollte, daß durch den optimalen Punkt *M* mehr als zwei Strecken gehen - dies könnte z. B. bei einem Spiel wie in Fig. 3 eintreten. Spieler *B* müßte seine in Frage kommenden Strategien (Steigungen der durch *M* gehenden Strecken) also so mischen, daß er eine Waagrechte (Steigung 0) erhält. Sollten z. B. durch *M* drei Strecken gehen, wobei eine positive Steigung und zwei negative Steigung haben ($k_1 > 0$; $k_2, k_3 < 0$), so kann dies *B* durch Mischen der positiven mit einer der beiden negativen Steigungen erreichen (dies ergäbe schon zwei verschiedene optimale Lösungen), nicht jedoch durch alleiniges Mischen der beiden negativen Steigungen (Strategien). Er könnte natürlich auch alle drei Strategien mit $q_1$, $q_2$ bzw. $q_3$ mischen unter der Bedingung $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ und $q_1k_1 + q_2k_2 + q_3k_3 = 0$ ($0 < q_i < 1$), was unendlich viele weitere optimale Lösungen bedeutete. Sollten die Steigungen aller durch den Schnittpunkt *M* gehenden Strecken dasselbe Vorzeichen haben, so kann *M* ja gar nicht der optimale Punkt sein!

## Literatur

[1] *Bühlmann, H., H. Loeffel* u. *E. Nievergelt*: Entscheidungs- und Spieltheorie. Springer, Berlin 1975.

[2] *Collatz, L.* u. *W. Wetterling*: Optimierungsaufgaben. Springer, Berlin 1966.

[3] *Falke, C.*: Mathematisierung am Beispiel der Spieltheorie. **DdM 7** (3/1979) 224-238.

[4] *Herrmann, E.*: Spieltheorie und lineares Programmieren. Aulis, Köln 1964.

[5] *Humenberger, H.* u. *H.-C. Reichel*: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. B.I., Mannheim 1995.

[8]) Hier soll nicht die Existenz einer optimalen Lösung, sondern nur die Tatsache $V_1 = V_2$ bei einander schneidenden Strecken (Graphen der Gewinnerwartung für *A*) bewiesen werden - der optimale Punkt *M* soll deren Schnittpunkt sein, d. h. eine Strecke habe positive und eine negative Steigung. In diesem Fall (und *nur* in diesem!) gibt es für beide Spieler eine *eindeutige optimale* Lösung in den *gemischten Strategien*. Alle anderen möglichen Fälle, wie die Graphen der beiden Gewinnerwartungen ($E(p,\text{I})$ und $E(p,\text{II})$) zueinander zu liegen kommen könnten (siehe z. B. [6, S. 42]), werden hier nicht berücksichtigt. Sie bedürfen jedoch allesamt keiner völlig neuen Überlegungen - im Gegenteil, sie sind sogar meist einfacher, da die optimale Lösung dann i. a. im Bereich der *reinen Strategien* zu suchen ist.

[6] *Koth, M.*: Spieltheorie: Mathematische Modelle des Wettbewerbs. In: Didaktik-Reihe der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) **20** (1992) 31-51.

[7] *Laugwitz, D.*: Anwendbare Mathematik heute. Aus: Meschkowski, H. (Hrsg., 1972): Grundlagen der modernen Mathematik. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1972, S. 224-252.

[8] *Löffel, H.*: Elementare Beweise für den Hauptsatz der Spieltheorie. **DdM 7** (3/1979) 215-223.

[9] *Manteuffel, K.* u. *D. Stumpe*: Spieltheorie. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte, Band 21/1. BG-Teubner, Leipzig 1979.

[10] *Sadowski, W.*: Theorie und Methoden der Optimierungsrechnung in der Wirtschaft. Die Wirtschaft, Berlin. 1963

[11] *Thomas, L.C.*: Games, Theory and Applications. John Wiley, New York 1984.

[12] *Vajda, S.*: Einführung in die Linearplanung und die Theorie der Spiele. Oldenbourg, München 1961.

**Anschrift des Verfassers:**

*Dr. Hans Humenberger, Institut für Mathematik und Angewandte Statistik, Universität für Bodenkultur, Gregor Mendel-Straße 33, A-1180 Wien*

# Potenzsummen und Gleichungssysteme

**Gerhard Steinbach**

In diesem Beitrag wird gezeigt, wie man mit Hilfe von Gleichungssystemen die Summe der $k$-ten Potenzen

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

berechnen kann. $k$ und $n$ bezeichnen natürliche Zahlen.

## 1 Theoretischer Hintergrund

Betrachtet man die Summenformeln für die Spezialfälle $k = 1$, 2 oder 3, so sieht man, daß sich die Summe der $k$-ten Potenzen stets als Funktionswert $p_{k+1}(n) = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \ldots + a_1 n$ eines Polynoms vom Grade $k+1$ an der Stelle $n$ berechnen läßt, welches durch den Ursprung verläuft. Diese Aussage ist allgemein für jedes $k$ gültig. Es gilt nämlich folgender

**Satz:** $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = k!\,(B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(0))$,

wobei $B_{k+1}$ die *Bernoulli*-Polynome vom Grad $k+1$ sind.

Die *Bernoulli*-Polynome sind wie folgt rekursiv definiert:

$$B_0(x) := 1$$

$$\frac{d}{dx} B_k(x) := B_{k-1}(x) \quad \text{mit} \quad \int_0^1 B_k(x)\,dx = 0 \quad \text{für} \quad k \geq 1$$

Die Theorie kann man z. B. nachlesen in [1]. Wie man Formeln für Potenzsummen mit Hilfe der Integralrechnung im Unterricht anschaulich gewinnen kann, ist in [2] dargestellt.

## 2 Elementare Herleitung der Formeln für $k = 1$, 2 und 3 mit Hilfe linearer Gleichungssysteme

Wir verwenden den folgenden allgemeinen Ansatz:

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \ldots + a_1 n,$$

wobei die rechte Seite mit $p_{k+1}(n)$ abgekürzt wird. Für $p_{k+1}$ gilt offensichtlich

$$p_{k+1}(n+1) - p_{k+1}(n) = (n+1)^k, \text{ also}$$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{k+1} a_i (n+1)^i - \sum_{i=1}^{k+1} a_i n^i = (n+1)^k.$$

Diese Beziehung (∗) führt durch Koeffizientenvergleich auf ein lineares Gleichungssystem mit $k + 1$ Gleichungen, aus denen sich die $a_i$, $1 \leq i \leq k+1$, berechnen lassen (vgl. die folgenden Beispiele). Das Gleichungssystem besitzt Diagonalform.

### 2.1. Formel für $k = 1$

Ansatz: $1 + 2 + \ldots + n = a_2 n^2 + a_1 n$

Wegen (∗) folgt:

$$a_2(n+1)^2 + a_1(n+1) - (a_2 n^2 + a_1 n) = n + 1.$$

Zusammenfassen der linken Seite ergibt

$$2a_2 n + (a_1 + a_2) = n + 1.$$

Koeffizientenvergleich liefert folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & a_2 + a_1 & = & 1 \\ 2. & 2a_2 & = & 1 \end{array}$$

Die Lösung ist $a_2 = \frac{1}{2}$ und $a_1 = \frac{1}{2}$.

Somit gilt $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$.

### 2.2. Formel für $k = 2$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n.$$

Wegen (∗) gilt

$$a_3(n+1)^3 + a_2(n+1)^2 + a_1(n+1) - (a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n) = (n+1)^2.$$