MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Die Mathematik zur Blütezeit des Islams inklusive Schulbuchvergleich"

verfasst von / submitted by

Susann Nitzsche M.A., BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2024 / Vienna 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 500 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) UF Bewegung und Sport UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	Dr. Franz Embacher, Privatdoz.

Inhaltsverzeichnis

Abstract

The paper at hand examines the significance and influence of math and its scholars during the Islamic Golden Age on the field of contemporary math, focusing on school mathematics. Today, the influence of ancient Greek philosophers and mathematicians is well know, whereas the achievements and accomplishments of Muslim and Arabic scholars in general have been neglected.

First, the paper provides a short overview on the history of math. The focus is on how Arabian and Muslim math has been influenced by other cultures. Consequently, a major part of this paper will be the achievements and accomplishments of Islamic and Arabic scholars.
The second part examines how far the Islamic and Arabic influence is presented in school books. For this purpose, two Austrian school books from the edition „Mathematik verstehen“ and „Thema Mathematik“ were used.

Both analyzed book series make reference to the Arabic, as well as the Muslim influence. In this context, the Arabic-Indian numbers need to be mentioned. Moreover, words like Algebra and Algorithm found their way into the school books, one of them, i.e. „Thema Mathematik“ even brings up the Muslim-Persian mathematician Al-Hwarizmi. Thus, Arabic achievements for the science of math are introduced, however, in some cases certain accomplishments of Arabian and Muslim Mathematicians are missing.

Since school books are limited in space and teachers not only follow the structure of their teaching material, they should add commentaries and more information on Islamic and Arabic maths themselves. Therefore, it is obvious that school books lack reference to the origin and history of mathematical theories.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, den Einfluss und den Stellenwert der Mathematik zur Zeit der Hochblüte des Islam bzw. der arabischen Gelehrten auf die zeitgenössische Mathematik, insbesondere auf die Schulmathematik, zu eruieren. Der Einfluss der antiken griechischen Philosophen und Mathematiker ist meist bekannt, die Errungenschaften und Leistungen der muslimischen und arabischen Gelehrten im Allgemeinen weniger.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst ein kurzer Querschnitt durch die Geschichte der Mathematik dargestellt. Der Fokus liegt hierbei darauf, wie die Mathematik der Araber bzw. der Muslime durch andere Kulturen beeinflusst wurde. Den Errungenschaften und Leistungen der muslimischen und arabischen Gelehrten auf dem Gebiet der Mathematik wird ein größerer Platz eingeräumt und bildet den Kern des ersten Teils der Arbeit.

Danach wurde im zweiten Teil der Arbeit untersucht, inwiefern der islamische bzw. arabische Einfluss in den Schulbüchern erwähnt wird. Hierzu werden die beiden in österreichischen Schulen verwendeten Schulbuchreihen „Mathematik verstehen“ und „Thema Mathematik“ untersucht.

In den beiden untersuchten Schulbuchreihen wird durchaus auf den arabischen bzw. muslimischen Einfluss Bezug genommen. Hier sind insbesondere die arabisch-indischen Zahlen zu nennen. Auch die Wörter Algebra und Algorithmus werden genannt, im Buch „Thema Mathematik“ wird auch der dahinterstehende Al-Hwarizmi erwähnt. Arabische Leistungen werden also genannt, an manchen Stellen fehlen allerdings Errungenschaften der arabischen und muslimischen Mathematiker.

Nachdem die Schulbücher aber nur einen begrenzten Platz zur Verfügung haben – und schließlich auch die Lehrkräfte sich nicht nur nach den Schulbüchern richten und weitere Kommentare hinzufügen können, ist es durchaus verständlich, dass nicht an jeder möglichen Stelle, wo es sich anbieten würde, ein Verweis auf die islamische bzw. arabische Mathematik eingefügt wurde.

1. Einleitung

Die Mathematik in den Ländern des Islams wird vereinfacht auch als Mathematik der Araber bezeichnet oder es wird auch von der arabischen Mathematik gesprochen, obgleich viele der Mathematiker Juden, Perser u.a. waren.[1] Sie umfasst die Mathematik des alten Zweistromlandes, die damalige Mathematik der Inder und vor allem die Mathematik der Griechen.[2] Franka Brückler benutzt in einem Kapitel auch den Ausdruck „Mathematik der mittelalterlichen moslemischen Länder“. Damit meint sie die Beeinflussung auch von den Griechen und Indern.[3]

Die zeitgenössische Mathematik, wie wir sie kennen, insbesondere die Schulmathematik, ist ganz wesentlich von den Griechen beeinflusst. Die Unterstufe zeichnet dabei viele der Ideen und Konzepte der Griechen nach. Die Beschäftigung mit Dreiecken und das Zeichnen mit Zirkel und Lineal sind hier paradigmatisch zu erwähnen. Dabei tragen viele Sätze oder Errungenschaften auch die Namen europäischer Mathematiker wie etwa der „Satz des Pythagoras“, der allerdings schon weit vor Pythagoras bekannt war, oder etwa der Satz des Euklid. Auch die Axiomatisierung, die Präzisierung der Mathematik und die strenge Beweisführung gehen unter anderem auf Euklid, aber generell auf griechische Mathematiker zurück.

Mathematiker der Neuzeit kennt man ebenso, wobei hier beispielsweise Gauß (Gaußsche Zahlenebene, Gaußsche Glockenkurve, Gaußsche Summenformel etc.) erwähnt werden kann, aber auch Newton und Leibniz mit ihren Beiträgen zur Differential- und Integralrechnung.

Weniger bekannt ist zumeist, dass die Errungenschaften und Leistungen der Griechen wohl zu einem Großteil verloren gegangen wären, hätten nicht die arabischen Mathematiker deren Werke studiert, übersetzt, verbessert und weiterentwickelt. Zeugen dafür sind beispielsweise die beiden Begriffe „Algorithmus“ und „Algebra“. Al-Hwarizmi ist dabei der Namensgeber des Algorithmus. Das Wort Algebra ist ebenso auf Al-Hwarizmi zurückzuführen. Er nannte seine Methode zum Lösen von Gleichungen „al-gabr“, was so viel wie „Ergänzen“ bedeutet. In seinem Fall heißt das,

[1] (Gericke 2003, 196)
[2] (C.J.Scriba 2010, 160)
[3] (Brückler 2017, 15)

dass er auf beiden Seiten der Gleichung gleiche Terme addiert, um so aus einer Gleichung mit einer Differenz eine Gleichung mit einer Summe zu erzeugen. Dabei übernahmen die arabischen Gelehrten Methoden von anderen Kulturen wie etwa den Indern. Hier sind die arabischen Spuren im Namen also noch vorhanden und sind für uns weiterhin sichtbar.
Die arabischen Mathematiker haben aber nicht nur die Mathematik anderer weiterentwickelt und verbessert, sondern sie haben auch selbst mathematisch geforscht, wie am Beispiel von al-Karagi zu sehen ist, der als erstes ein arithmetisches Dreieck beschrieben hat, welches heute unter dem Namen „pascalsches Dreieck“ bekannt ist.[4]
Die Bedeutung der arabischen Mathematiker ist der Allgemeinheit aber wohl nicht so bewusst. Die Frage lautet nun auch, inwiefern dies in den Schulbüchern abgebildet ist und ob eine eurozentrische Sichtweise vorherrscht.

Das zweite Kapitel der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit den historischen Grundlagen, insbesondere den Völkern und Kulturkreisen, die für die Entwicklung der heutigen Mathematik prägend waren. Dies waren einerseits die Ägypter, andererseits die Babylonier bzw. Mathematiker aus Mesopotamien und wie bereits erwähnt die Griechen und die Inder.

Die islamische Mathematik wird im dritten Kapitel näher beleuchtet. Hierbei wird auf die Beiträge zur Arithmetik, zur Algebra, zur Geometrie, zur Trigonometrie und zur Zahlentheorie eingegangen.

Im vierten Kapitel werden zwei Schulbuchreihen untersucht. Dabei handelt es sich um die komplette Reihe von „Mathematik verstehen“ von Malle et al. und die komplette Reihe „Thema Mathematik“ von Dorfmayr et al.

Das fünfte Kapitel gibt nochmal eine Zusammenfassung bzw. einen weiteren Ausblick.

[4] (Wußing 2008, 246)

2. Grundlagen

In diesem Kapitel geht es um mathematische und auch geschichtliche Vorinformationen, welche auf das Hauptthema hinführen sollen. Mathematisch werden die vier Völker näher betrachtet, welche eine enge Verbindung zur arabischen Mathematik haben. Außerdem wird kurz dargestellt, wann welche mathematischen Errungenschaften während der Blütezeit des Islams entstanden sind und wie die Quellen weitergereicht wurden respektive wie sich das Wissen damals angeeignet wurde.

2.1 Historisches - Die Blütezeit des Islams

In der Literatur wird die Blütezeit des Islams auch häufig „goldenes Zeitalter des Islams“ genannt. Dies ist auf die islamische Expansion zurückzuführen und wird nachfolgend kurz erläutert.

Nach christlicher Zeitrechnung floh Mohammad ibn Abdallah (* 570 n. Chr.) im Jahr 622 n. Chr. vor seinen Gegnern aus seiner Heimatstadt Mekka. Er ging fort, da die Lehre von dem „einen Gott“ durch die Offenbarungen des Erzengels Gabriel in Mekka keinen Anklang fand. Die Hidschra (arabisch Flucht) wurde ein bedeutendes geschichtliches Ereignis und trieb den „Hochgelobten“ nach Yathrib (heute Medina), welches ca. 200 Meilen weiter nördlich auf der arabischen Halbinsel lag. Aufgrund dieser Auswanderung legte der Kalif Omar dies als Beginn des islamischen Mondkalenders fest, womit der erste Tag auf Freitag, den 16. Juli 622, datiert wurde.[5, 6]

Mohammad wurde in Yathrib von drei jüdischen Stämmen unterstützt und eroberte Mekka nach acht Jahren zurück.[7] Er ließ ein würfelförmiges Gebäude mit schwarzen eingemauerten Meteoriten erbauen, die Kaaba, welches zum geistigen Zentrum des Islams wurde.[8] Der Prophet Mohammad starb zwei Jahre später im Jahr 632 n. Chr.

[5] (Berggren 1986, 1)
[6] (Juschkewitsch 1964, 175)
[7] (Herrmann 2016, 139)
[8] (Wußing 2008, 222)

Die islamische Herrschaft dehnte sich schon zu diesem Zeitpunkt gänzlich über die arabische Halbinsel aus. Mohammad hatte vor seinem Tod keinen Nachfolger ernannt, daher wurden nacheinander vier Kalifen als neue politische Anführer unter den zuverlässigen Verwandten und Anhängern ernannt.[9] Im Verlauf dieser Herrschaft konnten durch die kampfkräftig aufgestellte Armee einige Gebiete außerhalb von Arabien erobert werden. Da die benachbarten Reiche Persien und Byzanz sich gegenseitig durch Kriege entkräftet haben, konnten weitere Eroberungen eingeholt werden:[10, 11]

- Syrien und Palästina (636 n. Chr.)
- Ägypten (zwischen 639 und 642 n. Chr.)
- Persien (644 n. Chr.)

In einer zweiten Eroberungswelle wurden 664 n. Chr. Kabul und 674 Buchara und Samarkand besiegt.[12] Als neue Hauptstadt wurde Bagdad ernannt und unter der Herrschaft von Harun ar-Raschīd (*763, † 809) und seinen Söhnen erlebte Bagdad einen Aufschwung.[13]

Nachdem die Küstengebiete Nordafrikas erobert wurden, rückten die arabischen Heere 711 unter der Leitung von Tariq ibn Ziyad (* um 670, † 720) nach Europa vor und durchkreuzten die iberische Halbinsel, welche dann 719 komplett erobert wurde. Das weitere Vordringen nach Europa wurde erst 732 in der Schlacht bei Tours und Poitiers von den Franken gestoppt. Die chinesischen Grenzen konnten nicht überwunden werden, da die vielen Vormärsche Kraft gekostet haben.[14]

Abd ar-Rahman I. (* 731, † 788) war der Einzige, der dem Blutbad der Abbasiden entkommen war. Er flüchtete nach Westen auf die iberische Halbinsel, besetzte 755 Cordoba und gründete das Emirat von Cordoba. Dieses wurde 929 unter Abd ar-Rahman den III. (* 889, † 961) zum Kalifat, welches etwa 100 Jahre lang existierte. Schon 788 wurde unter ar-Rahman I. die Moschee von Cordoba erbaut, die als Mittelpunkt für Gelehrte dienten sollte. Ein zweiter Ort für Gelehrte und ihre

[9] (Herrmann 2016, 139-141)
[10] (Burton 2011, 238)
[11] (Gericke 2003, 196)
[12] (C.J.Scriba 2010, 160)
[13] (Wußing 2008, 223)
[14] (Juschkewitsch 1964, 176)

Übersetzungstätigkeiten wurde in Toledo errichtet. Nach der Eroberung von Toledo wurden die Muslime nach und nach wieder zurückgedrängt, bis sie schließlich 1492 komplett aus Spanien verdrängt wurden.

Im Osten konnten ab 1299 weitere Länder, wie Bulgarien, Albanien und Ungarn, durch die Osmanen erobert werden. Ein weiteres Vordringen wurde 1683 in der Schlacht um Wien gegen die zusammengelegten Armeen von Sachsen, Bayern, Lothringen und Polen verhindert.[15]

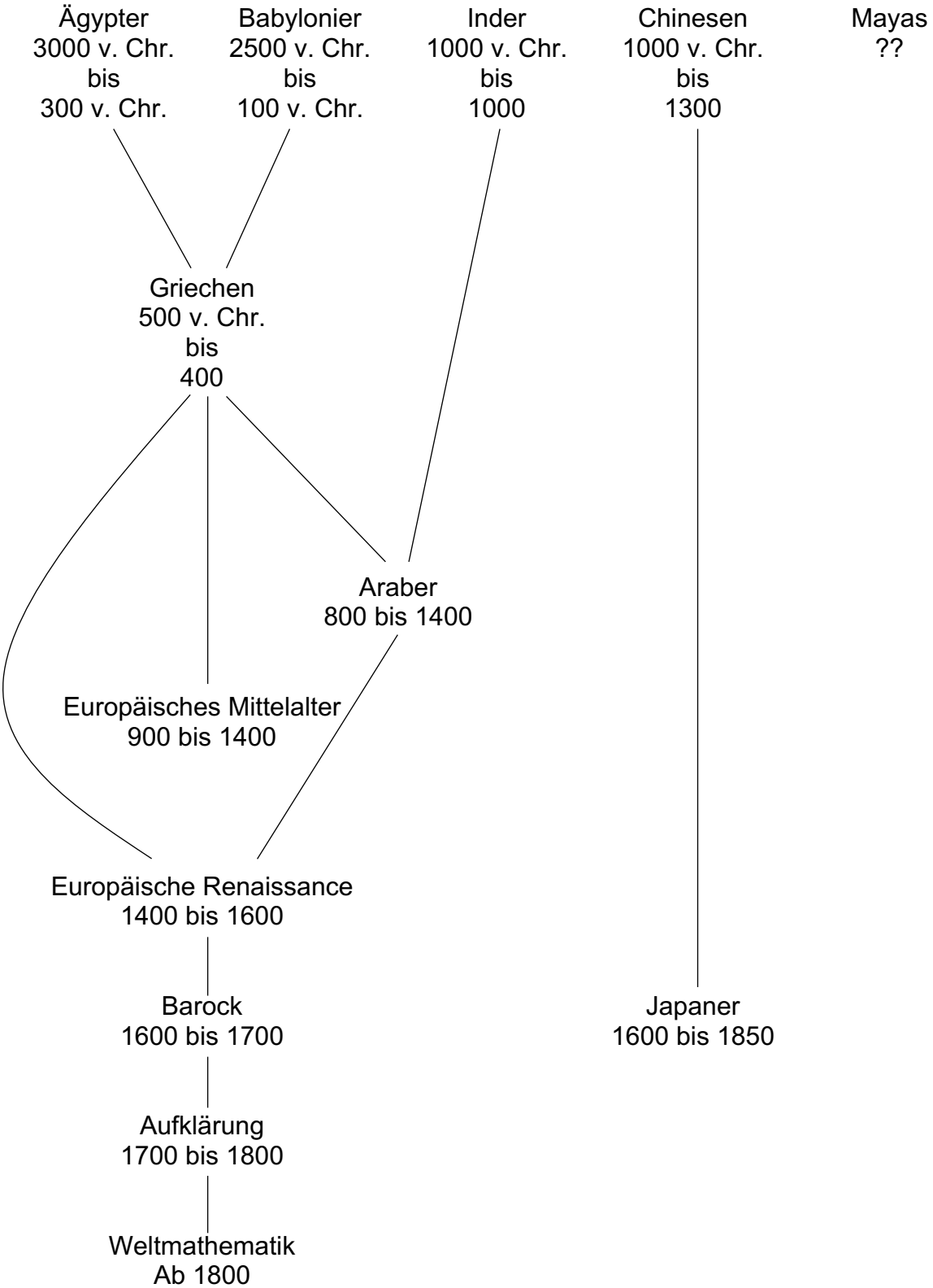
2.2 Mathematische Leistungen anderer Völker

Bevor die Mathematik des Islams näher betrachtet wird, sollte klar sein, wie die verschiedenen Kulturkreise miteinander in Verbindung stehen bzw. wann sie jeweils ihre größte Bedeutung hatten. Viele Kulturkreise beschäftigten sich mehr oder weniger mit mathematischen Inhalten und meist sind diese auch eher aus praktischen Gründen entstanden. Jede Kultur hat ihr Wissen durch eigene Schriftzeichen festgehalten und konnte es so innerhalb der eigenen Kultur, aber sogar auch zwischen den Kulturkreisen weitergeben. Dies geschah zum einen über direkten Kontakt oder zum anderen auch erst Jahrhunderte später durch die Beschäftigung mit den Schriften anderer Kulturkreise.

Wie in Tabelle 1 zu erkennen ist, wird die Mathematik der Araber durch die Inder und der Griechen beeinflusst, wobei die Griechen von den beiden ältesten Kulturen des Altertums, Ägypten und Babylonien (Mesopotamien), geprägt wurden.[16, 17]

[15] (Herrmann 2016, 142)
[16] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 1)
[17] (H. Kaiser 1984, 9)

Tabelle 1: Historische Entwicklungslinien der Mathematik (H. Kaiser 1984, 9)



2.2.1 Ägypten

Die Periode der ägyptischen Mathematik begann ca. 3000 v. Chr. bis 300 v. Chr. Das Zahlensystem war dezimal, wobei es noch kein Positionssystem gab. Jede Zehnerpotenz wurde durch eine eigene Hieroglyphe dargestellt. Die Zahlen selbst ergaben sich durch Aneinanderreihung der Hieroglyphen. In folgenden Abbildung 1 sind die Hieroglyphen bis 100 und ein passendes Zahlenbeispiel mit dem Wert von 185 dargestellt.[18, 19]

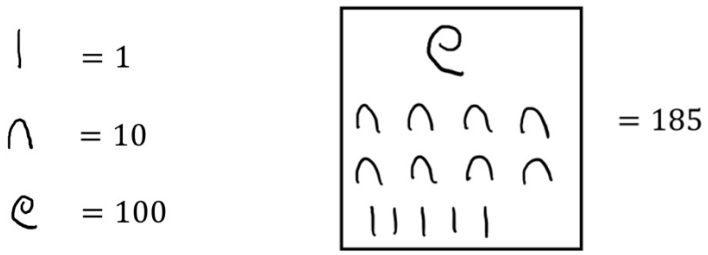


Abbildung 1: Das ägyptische Zahlensystem mit Beispielen nach (Katz, et al. 2007, 13)

Des Weiteren arbeiteten sie schon mit Brüchen, jedoch benutzten sie nur Stammbrüche und den Bruch $\frac{2}{3}$. Diesem besonderen Bruch wurde ein eigenes Symbol gewidmet.[20] Jegliche andere Brüche wurden aus Summen von Stammbrüchen und des oben genannten Bruches gebildet.[21] Ein Beispiel dafür ist $\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Die vier Grundrechenarten bauten auf der Addition auf. Die Multiplikation war eine wiederholte Verdoppelung mit anschließender Addition. Neben der Grundfläche und der Mantelfläche einer Pyramide war es eine Glanzleistung der Ägypter sich das Volumen eines Pyramidenstumpfes auszurechnen.[22] Außerdem konnten sie Flächen von Rechtecken, Trapezen und Dreiecken mit richtigen Formeln berechnen.[23] Auf dem bekannten Papyrus Rhind, ein gut gegliedertes Lehrbuch der Mathematik und eine der wichtigsten Quellen der ägyptischen Mathematik, ist auch zu erkennen, dass die Ägypter beachtlich nahe ($\frac{256}{81} \approx 3{,}16$) an den genauen Wert von Pi gekommen sind.[24]

---

[18] (Katz, et al. 2007, 13)
[19] (Wußing 2008, 114ff.)
[20] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 4)
[21] (H. Kaiser 1984, 11)
[22] (Wußing 2008, 119)
[23] (H. Kaiser 1984, 11)
[24] (Katz, et al. 2007, 31)

Bei den Pyramidenbauten fällt auf, dass sich bei den Verhältnissen zwischen verschiedenen Pyramidenmaßen ein exakter Wert von Pi ergibt.[25] Die Erklärung, warum dieses Seitenverhältnis sehr genau Pi approximiert, ist wissenschaftlich umstritten. Es gibt verschiedene Erklärungsversuche, die bei Eckhardt zusammengefasst sind. Es kann aber auch bloßer Zufall sein. Der Astrophysiker Corenlis de Jager hat 1996 ein holländisches Damenfahrrad genau vermessen. Aus den unterschiedlichsten Abmessungen konnte er verschiedenste physikalische Konstanten, wie etwa die Gravitationskonstante, die Lichtgeschwindigkeit oder die Feinstrukturkonstante ermitteln.[26] Gibt es also eine genügend große Anzahl an Messgrößen, so kann durch geschickte Rechenoperationen eine Vielzahl an Ergebnissen erzeugt werden.

2.2.2 Babylonien (Mesopotamien)

Im Zweistromland zwischen Euphrat und Tigris entwickelte sich auch etwa 3000 v. Chr. eine aufstrebende Kultur, Babylonien. Aus dieser Zeit konnten ca. 300 Tontafeln mit mathematischen Inhalten sichergestellt werden. Die Babylonier kombinierten das Dezimal- mit dem Sexagesimalsystem in einem erstmalig genutzten Positionssystem mit der Basis 60. Die Zahlen von 1 bis 59 wurden nur mittels zweier Zeichen (Keil = 1 = /; Winkelhaken = 10 = <) geschrieben. Ab 60 begann die Zählung von vorn, wobei der erste Keil den Wert von 60 hatte und links vor den Zehnern stand).[27]

Beispiele für die Darstellung der Zahlen durch Winkelhaken und Keil nach (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 2):

$$34 = <<<^{//}_{//}$$

$$11 = </$$

$$92 = /<<<//$$

$$71 = /</$$

[25] (Gericke 1992, 48)
[26] (Eckhardt 2022, 14-21)
[27] (H. Kaiser 1984, 11)

Da die Babylonier die Null noch nicht kannten, konnten sie leere Positionen nicht kenntlich machen.[28] Die Techniken zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren waren in der damaligen Zeit schon sehr weit entwickelt. Die ersten drei genannten Grundrechenarten wurden ähnlich im Sexagesimalsystem angewendet, wie wir es heutzutage im Dezimalsystem anwenden. Das Dividieren wurde durch Multiplizieren mit dem Kehrwert des Divisors durchgeführt.[29] 60 hat viele Teiler (2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30) und somit war es für die Babylonier leichter, als beispielsweise für die Ägypter, Brüche zu beschreiben.[30]

Die Babylonier benutzen schon einen Algorithmus für das Ziehen von Quadratwurzeln. Außerdem konnten sie Textaufgaben lösen, welche auf lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten zurückzuführen waren. Sie nutzten dazu Tafeln mit einer großen Anzahl an Tabellen mit Quadraten, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln, Reziproken, wie auch Tafeln mit Potenzen einer bestimmten Basis.[31] Für damalige Verhältnisse war ihre Leistung zur Berechnung der Wurzel aus 2 herausragend. Dieser Wert wich nur ein Prozent vom richtigen Wert ab.[32] Die Babylonier konnten quadratische Gleichungen lösen, somit war es für sie auch notwendig, Quadratwurzeln zu berechnen.

In der Geometrie hingegen war die Annäherung für Pi mit dem Wert von drei nicht so genau wie der Wert der Ägypter. Dennoch erreichten die Babylonier einiges auf dem Gebiet der Geometrie. Sie konnten die Flächeninhalte von regelmäßigen Figuren berechnen, arbeiteten aber auch mit Näherungsverfahren, um Kreise und Kreisteile genau bestimmen zu können. Sie konstruierten Winkel und hatten Kenntnis über den Satz von Thales. Sie wussten auch über den Satz des Pythagoras (bekam erst später seinen Namen) bescheid und konnten diesen auch anwenden.[33, 34]

---

[28] (Popp 1987, 17-18)
[29] (H. Kaiser 1984, 11)
[30] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 1-2)
[31] (H. Kaiser 1984, 11-12)
[32] (Popp 1987, 18)
[33] (Popp 1987, 19)
[34] (H. Kaiser 1984, 11-12)

Es kann abschließend gesagt werden, dass die Babylonier schon sehr vieles gewusst haben, jedoch haben sie ihre mathematischen Inhalte weder begründet, noch bewiesen.

Im Vergleich zu den Ägyptern war das mathematische Wissen der Babylonier umfangreicher. Die babylonische Mathematik war begrifflich noch nicht so aufgebaut, wie sie heutzutage bekannt ist, da die begriffliche Mathematik erst langsam von den Griechen entwickelt wurde.

Die Griechen haben von den Babyloniern einiges an Wissen übernehmen können. Was genau alles übernommen wurde, ist zum Teil nicht genau bekannt, aber belegbar ist, dass sowohl Thales als auch Pythagoras sich eine Weile in Babylonien aufgehalten haben.[35]

2.2.3 Griechenland

600 Jahre v. Chr. bildete sich in Griechenland wissenschaftliches Denken und Arbeiten aus. Einige griechische Philosophen entwickelten eigene mathematische Denkweisen, welche für die nachfolgende Mathematik sehr prägend waren. Die Epoche der griechischen Mathematik kann in vier Zeitabschnitte unterteilt werden, welche im Anschluss kurz erläutert werden.
Die erste Epoche, Ionische Periode, startete ca. 600 v. Chr. und endete 400 v. Chr. Thales von Milet (*624/623 v. Chr., † zwischen 548 und 544 v. Chr) muss als erstes genannt werden, denn wie schon oben erwähnt wurde, hat er vieles der Babylonier angenommen und weiterentwickelt. Er gilt als Begründer der Naturphilosophie, Geometrie und Astronomie. In seinem wichtigsten Satz (Satz von Thales) geht es darum, dass alle Winkel am Halbkreisbogen rechte Winkel sind. Weitere mathematische Errungenschaften sind Thales noch zuzuordnen:[36, 37]

- Die Entwicklung des Winkelbegriffs
- Der Durchmesser eines Kreises halbiert den Kreis
- In einem gleichschenkeligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß
- Die Scheitelwinkel sind gleich groß, wenn sich zwei Geraden schneiden

[35] (H. Kaiser 1984, 12).
[36] (H. Kaiser 1984, 13ff)
[37] (Popp 1987, 20ff)

- Kongruenz von zwei Dreiecken, die in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen

Ebenfalls zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang Pythagoras von Samos (* ca. 570 v. Chr., † ca. 510 v. Chr. Er war Gründer einer religiös-philosophischen Bewegung, bei der er und seine Anhänger wichtige Arbeiten hinterließen. Neben dem Satz des Pythagoras, bei dem die Summe der Flächen der Kathetenquadrate gleich der Fläche des Hypotenusenquadrats sind, gibt es weitere mathematische Errungenschaften, die auf Pythagoras und seine Anhänger zurückgehen:[38]

- Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks
- Systematisierung von Winkeln, Parallelen und Dreiecken
- Beschäftigung mit der Zahlentheorie z.B. Dreieckszahlen
- Begriffe, wie „vollkommene“ und „befreundete“ Zahl sind auf sie zurückzuführen
- Berechnung der pythagoreischen Zahlentripel
- Wissen über Proportionen
- Quadratzahlen entstehen durch Summation der ungeraden Zahlen[39]
  z.B. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 * 5 = 25$
- Feststellung der Irrationalität[40] von $\sqrt{2}$

In der ionischen Periode könnten noch viele weitere Griechen mit ihren Leistungen genannt werden. Da dies aber nur ein kurzer Exkurs sein soll, werden hier zwei weitere Mathematiker erwähnt: Zum ersten Hippokrates von Chios (* etwa 470 v. Chr., † etwa 410 v. Chr), der der Lösung zur Würfelverdoppelung durch die Einschiebung zweier mittlerer Proportionalen sehr nahekam. Außerdem beschäftigte er sich mit der Quadratur des Kreises durch die Quadrierung der Möndchen, welche auch oft in Schulbüchern zu finden ist. Ersteres wird aber auch anderen Mathematikern zugeschrieben.[41] Zudem ist er für die Abhandlung der Elemente der Mathematik bekannt. Dieses Werk ist zwar abhandengekommen, war jedoch eine wichtige Grundlage für Euklids „Elemente“.[42] Zum zweiten ist Theodoros von Kyrene (* zwischen 475 und 460 v. Chr., † etwa 399 v. Chr) zu erwähnen, der Quadrate mit den

[38] (Herrmann 2014, 26ff.)
[39](Popp 1987, 22-23)
[40] (H. Kaiser 1984, 16)
[41] (Herrmann 2014, 51ff.)
[42] (Walz 2017, 416)

Flächeninhalten drei bis siebzehn (ohne vier, neun, sechszehn) konstruierte und durch die Längen der Diagonalen und der Seiten der Quadrate die Irrationalität dieser Zahlen gezeigt hat.[43]

Die zweite Epoche, betitelt mit athenischer Periode, erstreckt sich etwa von 450 bzw. 400 v. Chr. und dauerte ein wenig mehr als 100 Jahre an.
Der griechische Gelehrte Aristoteles (* 384 v. Chr., † 322 v. Chr.) verfasste Schriften zur Aussagenlogik und zur Geometrie.
Folgende Punkte geben einen kleinen Einblick in die geometrischen Themen von Aristoteles: [44]

- Kongruente Sehnen schließen kongruente Umfangswinkel in einem Kreis ein.
- Die Innenwinkelsumme in einem Dreieck ist gleich groß wie zwei Rechte.
- Die Kongruenz der Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken.

Ein weiterer relevanter Mathematiker (aber auch Arzt und Astronom) der athenischen Periode war Eudoxos von Knidos (* zwischen 407 und 404 v. Chr, † zwischen 345 und 338 v. Chr.). Er brachte eine ausführliche Theorie der Proportionen hervor.[45] Folgende Sätze und noch andere Errungenschaften gehen auf ihn zurück und wurden später bei Euklid wiedergefunden:[46]

- Die Fläche des Kreises verhält sich wie die Quadrate der Radien.
- Das Volumen einer Kugel verhält sich wie die Kuben der Radien.
- Das Volumen einer Pyramide ist ein Drittel des Prismas, welches die gleiche Höhe und die gleiche Grundfläche besitzt.
- Das Volumen eines Kegels ist ein Drittel des Zylinders, welcher die gleiche Höhe und die gleiche Grundfläche besitzt.

Die dritte Epoche, welche etwa 300 v. Chr. begann und wieder etwa 100 Jahre andauert, ist die Alexandrinische Periode. Euklid von Alexandria (Eukleides; lebte rund um 300 v. Chr.) fasste das ganze mathematische Wissen (Hauptwerk „Elemente“; Insgesamt 13 Bände) dieser Zeit zusammen und leitete damit das Ende der athenischen Periode ein. Gleichzeitig war es aber der Beginn zum Weiterentwickeln.

[43] (Herrmann 2014, 90)
[44] (Herrmann 2014, 82)
[45] (H. Kaiser 1984, 16)
[46] (Herrmann 2014, 88)

Sein Verdienst lag darin, dass er seine Werke so gut methodisch und didaktisch zusammenfasste, dass es für die Nachwelt sehr gewinnbringend war. Einige Begriffe wurden sogar nach ihm benannt.[47] Außerdem war er der erste Wissenschaftler, der eine axiomatische Struktur, in seinem Fall die Axiomatisierung der Geometrie, geschaffen hat.[48] In seinem Geometriewerk legt er zu Beginn nachfolgende Grundelemente fest:[49, 50]

- Ein Punkt hat keine Teile
- Eine Linie ist eine Länge, die keine Breite besitzt
- Zwei Parallelen sind zwei Linien in der gleichen Ebene, die sich niemals treffen werden
- Eine Fläche besteht aus Länge und Breite

Euklid gilt, wie bereits erwähnt, als Vater der axiomatischen Methode, obgleich er mutmaßlich nicht der Erste war, der eine axiomatische Struktur der Geometrie geschaffen hat. Des Weiteren führt er Axiome an, die nicht bewiesen werden konnten, wie z.B. dass das Ganze größer als der Teil ist.[51]

Am Anfang des ersten Buches der Elemente werden drei Begrifflichkeiten erklärt, die heute als „Definitionen“, „Axiome“ und „Postulate“ bekannt sind. Nachfolgende Beispiele dienen zum Nachvollziehen:

1) Definitionen: Auf der einen Seite beschreibt er intuitive Sachverhalte wie „Ein Punkt ist das, was keine Teile hat.“ oder „Die Enden einer Linie sind Punkte“. Auf der anderen Seite befinden sich auch Definitionen im allgemeinen Sinne, wie z.B. die Kreisdefinition inklusive seines Mittelpunktes.
2) Postulate: Sein erstes Postulat heißt: „Gefordert soll sein, dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann.“ Die Aufzählung wird mit dem fünften Postulat über das Vorkommen eines Schnittpunkts von zwei nicht parallelen Linien beendet.

[47] (H. Kaiser 1984, 17-18)
[48] (Falkenberg 1996, 65)
[49] (Popp 1987, 26)
[50] (Herrmann 2014, 104)
[51] (Deiser 2021)

3) Allgemeine Einsichten/Axiome: Als Beispiel wird hier noch einmal das schon oben aufgeführte Axiom aufgeführt, dass das Ganze größer ist als der Teil.[52]

Eine kleine Auswahl von bewiesenen Sätzen die in seinen Werken vorkommen werden nachfolgend aufgeführt.[53]

- Konstruktion einer Winkelhalbierenden
- Halbieren einer Strecke
- Wenn eine Gerade zwei parallele Geraden schneidet, dann sind die sich daraus ergebenen Wechselwinkel kongruent.

Archimedes (* 287 v. Chr., † 212 v. Chr.) glänzte nicht nur in der Physik und als Ingenieur, sondern auch in der Mathematik. Archimedes griff das Problem der Irrationalität der Zahlen von Pythagoras (oder einem seiner Schüler) auf, dass bei einem Quadrat das Verhältnis zwischen Diagonallänge und Seitenlänge nicht immer als Bruch von zwei natürlichen Zahlen beschrieben werden kann.[54]
Er beschäftigte sich auch mit Schwerpunkten von Figuren und konstruierte ein regelmäßiges Siebeneck. Er gab Formeln mit Beweisen für Flächen, Oberflächen und Volumen für Kugeln und Zylinder an. Auch das Volumen von Drehellipsoiden bzw. Flächen von Ellipsen und Spiralen konnte er angeben.[55] [56] Er wollte zudem noch das Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser angeben. Dafür dachte er sich ein 96-Eck für seine Berechnungen. Er fand dann heraus, dass der Umfang des Kreises dreimal so groß ist, wie der Durchmesser, aber jedoch ein wenig größer, zwar weniger als $\frac{1}{7}$ des Durchmessers, aber wiederum mehr als $\frac{10}{71}$. Somit lag er mit seinem Zwischenwert von $3\frac{10}{71} \approx 3{,}1408 < \pi < 3\frac{1}{7} \approx 3{,}142857$ ziemlich dicht an π. Somit kann ihm die Weiterentwicklung zur Berechnung des Kreises zugeschrieben werden.[57]

Die letzte Epoche ist die Spätzeit, welche etwa 150 v. Chr. begann und bis 300 n. Chr. ging. In diese Zeit gehören der Astronom und Mathematiker Claudius Ptolemäus (* etwa 100 n. Chr., † etwa 170 n. Chr.), der Arithmetiker Diophantos von Alexandria (*

[52] (Deiser 2021)
[53] (Herrmann 2014, 105ff.)
[54] (Popp 1987, 25,26)
[55] (Herrmann 2014, 174)
[56] (H. Kaiser 1984, 18ff)
[57] (Popp 1987, 31)

zwischen 200 und 214, † zwischen 284 und 298) und Heron von Alexandria (* 10, † 70).

Ptolemäus Werk „Die große Zusammenstellung“ war für 1500 Jahre die wichtigste Abhandlung über das astronomische Weltbild, auch wenn es letzten Endes das falsche geozentrische Weltbild beinhaltete.[58] In seinem Werk befand sich eine Sehnentafel, welche ein Vorgänger unserer Tabellen für die Trigonometrie war. Für den Zentriwinkel $\alpha = \angle AMB$ sei $s(\alpha)$ die Länge der dazugehörigen Sehne (Abbildung 2).

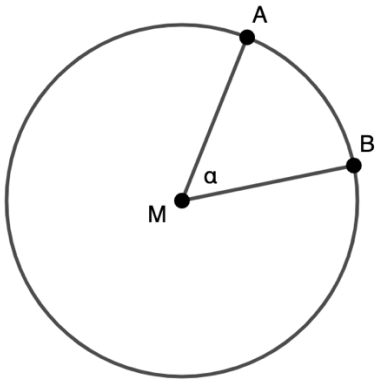


Abbildung 2: Einheitskreis mit Sehne nach (Schuppar 1999, 61)

Auf dieser Tafel konnten Winkel von 0° bis 180° in Halbgradesschritten abgelesen werden. Wie genau er dabei arbeitete, ist daran zu erkennen, dass die Sehnenlänge dem 0,0174537-fachen Wert der Radiuslänge gleichkommt und eine Fehlerabweichung von 0,007% vorliegt.[59]

Der Arithmetiker Diophantos gilt als Begründer der Algebra.[60] Er schrieb das aus 13 Bänden umfassende Werk „Arithmetica“. Dieses noch erhaltene Werk ist zugleich das älteste, in dem Buchstaben und Symbole verwendet wurde. Diophantos war der Erste, der Zahlen nicht durch Strecken, sondern durch Symbole darlegte. Auch für viel genutzte Rechenoperationen, Unbekannte und für das Gleichheitszeichen nutzte er Symbole. Er behandelte Gleichungen mit freien Parametern und verwendete verschiedene Lösungswege für die jeweiligen Gleichungstypen. Seine mathematische

[58] (Popp 1987, 36ff.)
[59] (Schuppar 1999, 61 - 63)
[60] (Nestle 2020, 125)

Schreibweise war für die Griechen zu dieser Zeit sehr fortschrittlich und etwas Neues.[61, 62]

Heron von Alexandria bewies als erster die „Heronsche Flächenformel“ für Dreiecke, obwohl erwähnt werden muss, dass diese schon bei Archimedes vorgekommen war.

Trotz dieser wichtigen Errungenschaften wird diese letzte Periode von Walter Popp (1987) als Niedergang der griechischen Mathematik beschrieben, da durch die Übernahme des Mittelmeerraumes durch die Römer und aufgrund deren Denkweisen die Weiterentwicklung von Wissenschaften nicht vorangetrieben wurde. Somit wurde nicht mehr viel geforscht, sondern beschränkte sich eher auf das Kommentieren bestehender Werke. Die mathematischen Kenntnisse, welche einen praktischen Nutzen für die Menschen hatte, wurden über den ausgedehnten Handel weiterhin verbreitet.[63]

2.2.4 Indien

Als letzte Kultur, die den Arabern mathematische Informationen weitergegeben hat, ist Indien zu erwähnen. Die Quellen über die mathematischen Inhalte gehen auf etwa 800 v. Chr. zurück. Die Inder rechneten schon mit der Zahl Null und mit den negativen Zahlen (Zahl mit Punkt darüber). Die negativen Zahlen wurden von den Arabern nicht übernommen und wurden somit auch nicht ins Abendland überliefert. Es dauerte noch Jahrhunderte, bis sich Kulturen wieder damit befassten. Sie kannten schon Klammerrechnungen (nach dem Distributivgesetz) und sie hatten Bezeichnungen für Unbekannte. Es ist eindeutig der Einfluss von Diophantos zu erkennen, der sich von der Geometrie verabschiedete und seine Gleichungen rein arithmetisch darstellte.[64, 65]

In der Geometrie beschäftigten sie sich mit Flächeninhalten von geradlinig beschränkten Flächen (z.B. Sie versuchten ein Rechteck in ein flächenmäßig gleichgroßes Quadrat zu verwandeln), mit dem Satz des Pythagoras, dem Annähern des Wertes von Diagonalen (z.B. $\sqrt{2}$), aber auch Annäherungsversuche zur

[61] (H. Kaiser 1984, 20-22)
[62] (Popp 1987, 37-38)
[63] (Popp 1987, 36-37)
[64] (Popp 1987, 40-41)
[65] (Gericke 1992, 195)

Bestimmung der Oberfläche und dem Volumen von Kugeln wurden gemacht. Der indische Mathematiker Aryabhata (*476, †550) gab den Wert für Pi sehr genau an, wodurch die Kreisflächenberechnung annähernd korrekt war. Im Gegensatz dazu war das Kugelvolumen sehr fehlerbehaftet.[66, 67]

Aryabhata schrieb ein Werk über die Erkenntnisse der Inder, welches als Formelsammlung aufzufassen ist. Diese enthielt Sinustafeln, aber auch – modern ausgedrückt - trigonometrische Verhältnisse von Kosinus, Sinus und Sinus versus (Differenz zwischen Kosinus und Radius). Die Elemente der Trigonometrie kamen über die Araber dann ins Abendland.[68]

Den bedeutendsten Beitrag zur Kulturgeschichte lieferten die Inder aufgrund des dezimalen Positionssystems. Die Entstehung des dekadischen Stellenwertsystems war von vielen Veränderungen geprägt.
Wie in der Abbildung 3 zu erkennen ist, gab es 300 v. Chr. schon genaue Zeichen für die Ziffern von 1 bis 9, jedoch war es noch kein Positionssystem.

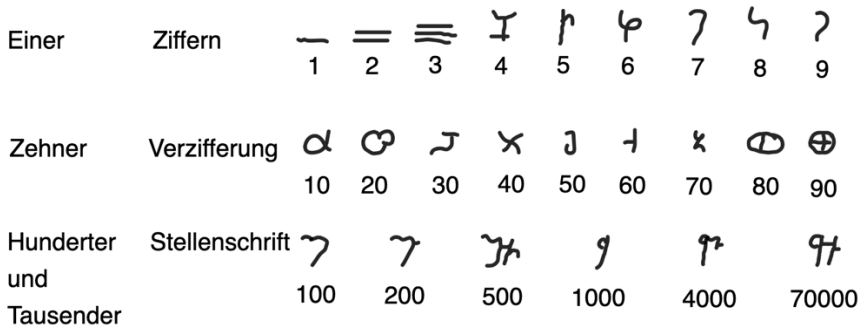


Abbildung 3: Indische Brahmi-Ziffern nach (Wußing 2008, 98)

Die voll entwickelte Form tauchte erstmalig im Jahr 595 auf. Die Null soll erst 200 Jahre später hinzugekommen sein.[69]

2.3 Aneignung des Wissens und der Quellen

Die arabische Sprache war eine wichtige Grundlage beim Erwerb von Wissen im Islam. Diese Sprache umfasste Gebiete zwischen dem vorderen Orient, dem Norden Afrikas

[66] (Wußing 2008, 95)
[67] (Herrmann 2016, 67)
[68] (Wußing 2008, 95)
[69] (Juschkewitsch 1964, 102ff.)

bis hin zu Spanien. Durch die akribischen Übersetzungstätigkeiten zwischen dem 9. und 12. Jahrhundert lagen mehr Schriften im arabischen vor als jemals zuvor in einer anderen Sprache. Neben den Arabern leisteten auch die Perser und Syrer ihren Beitrag dazu.[70]

In der ersten Welle der Wissensaneignung wurden vorhandene mathematische, astronomische und philosophische Schriften von den Kulturen Persiens, Indiens, Byzanz und der griechisch-hellenistischen Antike gesammelt. Abgesandte wurden weggeschickt, um weitere Schriften aufspüren und diese auch gleich zu kaufen.[71, 72]

Der Aufstieg der islamischen Kultur im Nahen Osten geht auf die Herrschaft von Harun ar-Raschīd (von 786 bis 809) und seinen Sohn al-Ma‘mūm zurück.[73] Bagdad wuchs zu einem geistigen und auch kommerziellen Zentrum heran.[74] Weiters stiegen die arabisch-maurischen Emirate und Kalifate in Spanien zu wichtigen Zentren auf. Bagdad und Cordoba waren somit Drehscheiben für die Weitergabe von Wissen. Vor allem die Gründung des Bayt al-Hikma (Haus der Weisheit) in Bagdad, das gleichzeitig Bibliothek, Universität und Übersetzungsbüro war, spielte dabei eine fundamentale Rolle. Die Kernaufgabe der Intellektuellen in Bagdad war es, die verfügbaren Schriften in die arabische Sprache zu übertragen. Die Übersetzenden agierten dabei in Gruppen, wobei ihnen ein Kopist half und sie auch von einem Experten überwacht wurden.[75] Gegen Ende des 8. Jahrhunderts übersetzte al-Hajjaj ibn Matar (* 786, † 833) das Werk von Euklid von Alexandria, welches daraufhin nochmals mehrfach verbessert wurde und von Thabit ibn Qurra perfektioniert wurde. Außerdem besserte er die fehlerhaften Übersetzungen des archimedischen Werkes über die Kugel und Zylinder aus und aufgrund seiner Arbeit lag das Buch dann ab dem 10. Jahrhundert in arabischer Sprache vor.[76] Der sprachbegabte Thabit ibn Qurra lieferte nicht nur außerordentlich gute Übersetzungen, sondern er war auch auf mathematischem Gebiet talentiert und konnte viele Erkenntnisse ausbauen.[77] Aber auch die Banū-Mūsā-Brüder bzw. Ishāq ibn Hunain (*830, † 910) und dessen Sohn Hunain ibn Ishāq

[70] (Herrmann 2016, 143)
[71] (Wußing 2008, 230ff.)
[72] (H.-W. Alten 2014, 163)
[73] (Herrmann 2016, 143)
[74] (Berggren 1986, 2)
[75] (Herrmann 2016, 143,144)
[76] (Berggren 1986, 111)
[77] (Berggren 1986, 6)

(* 808, † 873) lieferten wertvolle Übersetzungen.[78] Bis zum 10. Jahrhundert wurden viele Arbeiten der Griechen u.a. von Archimedes, Euklid und Heron übersetzt (Tabelle 2).[79] Dabei wurde nicht nur der Inhalt übernommen, sondern die Art des Beweisens war für die Araber von großer Wichtigkeit und sehr fortschrittlich.[80] Somit ist zu erkennen, dass die Griechen einen immensen Einfluss auf die Mathematik in den islamischen Ländern hatten. Nochmals hervorzuheben ist, dass die Mathematiker des Islams die zahlreichen Schriften nicht nur übersetzten, sondern sich mit diesen auseinandersetzten und auch kommentierten.

Tabelle 2: Arabische Übersetzungen aus dem Griechischen (Berggren 1986, 5)

Verfasser	Titel	Übersetzer	Anmerkungen/Zeit
Euklid	Die Elemente	Al-Hajjaj ibn Matar Ishaq ibn Hunayn Thabit ibn Qurra	Zur Zeit von ar-Raschīd und al-Ma‘mūn Ende 9. Jh.
Euklid	Data	Ishaq ibn Hunayn	
Archimedes	Über Kugel und Zylinder	Ishaq ibn Hunayn Thabit ibn Qurra	Überarbeitung einer Übersetzung aus dem frühen 9. Jh.
Archimedes	Kreismessung	Thabit ibn Qurra	
	Über die Teilung des Kreises in sieben gleiche Teile	Thabit ibn Qurra	Das griechische Original ist nicht auffindbar
Archimedes	Die Lemmata	Thabit ibn Qurra	
Apollonios	Konika	Hilāl al-Himsī Ahmad ibn Mūsa Thabit ibn Qurra	
Diophantos Menelaos	Arithmetika Spärik	Qusta ibn Luqa Hunayn ibn Ishaq	†912 *809

Viele ungeklärte Fragen oder schwierige Inhalte gaben den Arabern Antrieb sich weiter intensiv mit den Thematiken zu beschäftigen.[81] Somit entstand in einer zweiten Welle

[78] (Gericke 2003, 197)
[79] (H.-W. Alten 2014, 163)
[80] (Wußing 2008, 231)S.231
[81] (C.J.Scriba 2010, 161)

durch die vielen wertvollen Anmerkungen zu den erforschten Quellen eine eigene mathematische Kultur. Dabei wurde Zahlentheorie, Arithmetik, Geometrie, Algebra, Näherungsrechnung, Trigonometrie und auch die Einführung der Analysis behandelt. Aufgrund der systematischen Herangehensweise der Griechen versuchten die Intellektuellen die mathematischen Probleme vollkommen darzulegen und auch nach hellenistischer Mathematik diese Sätze auch zu beweisen. In den arabischen Schriften kann der Einfluss der Mathematiker aus Indien und China beobachtet werden, die unzählige und bedeutende Methoden, aber auch Beispiele aus der Praxis niedergeschrieben haben.[82]

Ab dem 13. Jahrhundert kamen die Europäer in den Nahen Osten, um bedeutende, wissenschaftliche Werke zu entdecken und nach Europa zu bringen.[83]

2.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wird ersichtlich, dass die Griechen, Ägypter, Inder und Babylonier schon einiges an mathematischem Wissen mit sich brachten und sehr viel geleistet haben. Aber ohne die arabischen Mathematiker und Übersetzer hätte es die Mathematik aus der Antike nicht ins Abendland geschafft und sehr viele Errungenschaften, vor allem die der Griechen, wäre sonst vielleicht verloren gegangen.[84]

[82] (Wußing 2008, 231)
[83] (Berggren 1986, 4)
[84] (Popp 1987, 129)

3. Islamische Mathematik

In diesem Kapitel wird die Mathematik in den Ländern des Islams bzw. die Mathematik der Araber genauer unter die Lupe genommen. Die Benennung der Epoche ist hier schwierig und nicht eindeutig, weil einerseits nicht alle Mathematiker Muslime waren, andererseits nicht nur Araber in dieser Epoche und in den Gebieten wirkten. So waren viele Mathematiker etwa Juden oder Perser. Gemeinsam ist den Mathematikern jedoch, dass sie zur Blütezeit des Islams in den islamisch geprägten Gebieten lebten und forschten.[85]

Dabei werden die einzelnen Teilgebiete der Mathematik bzw. die bedeutenden arabischen Mathematiker aufgegriffen. Nach einigen mathematischen Abschnitten wird aufzuzeigen versucht, wo das arabische Wissen im Schulkontext eingebaut werden könnte.

Ein paar allgemeine Fakten sollen im Vorhinein aufgelistet werden.

- Die Araber hatten großes Interesse an den effektiven babylonischen Rechenverfahren.[86]
- Wie auch die Inder beschäftigten sich die arabischen Mathematiker eher mit der Arithmetik, Algebra und Trigonometrie.
- Das Rechnen mit den indischen Ziffern war eine der wichtigsten Voraussetzungen für den Fortschritt der Arithmetik und der Algebra.
- Die Araber arbeiten mit einem festen Zirkel.
- Sie übernahmen die negativen Zahlen der Inder nicht und dies ist als Rückschritt zu sehen.[87]
- Viele Gleichungen wurden nicht mit Symbolen beschrieben, sondern mit Worten.[88]

[85] (Gericke 2003, 196)
[86] (Mainzer 1980, 79)
[87] (Gericke 1992, 198)
[88] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 80)

3.1 Arithmetik

3.1.1 Dezimalsystem

Die Araber hatten ihre eigenen Zahlensysteme. Sie benutzten eine alphabetische Zahlschrift, bei der die Buchstaben ihres Alphabets als Ziffer benutzt wurde. Bis zum 10. Jahrhundert rechnete ein Großteil der Menschen, vor allem auf Märkten, mit den Fingern.[89, 90]

Die ersten Menschen, die die Zahlen dann so schrieben, wie wir es kennen, waren die arabischen Mathematiker ab dem 9 Jahrhundert. Rückblickend ist zu erkennen, dass die Arithmetik das Erbe ist, welches uns die muslimischen Mathematiker hinterlassen haben, auch wenn schon einige Jahrhunderte davor es die Mathematiker aus Indien waren, die solch ein Zahlensystem mit sich brachten.[91] Das indische Dezimalsystem kam Mitte des 7. Jahrhundert in den Westen. Der syrische Bischof Severus Sebocht äußerte sich positiv darüber und 773 wurde ein indisches Werk nach Bagdad gebracht, in dem es Anhaltspunkte auf das indisch-dezimale Stellenwertsystem gab.[92]

Die zwei nachfolgenden beschriebenen Merkmale kamen, wie schon gesagt, zum ersten Mal bei den Indern vor. Sie benutzten das zifferngestützte, dezimale Stellenwertsystem. Die Babylonier und die Ägypter nutzten eine bestimmte Menge an Strichen, um den Wert einer Zahl anzugeben.[93] Die Inder hingegen nahmen für neun Zahlen auch neun unterschiedliche Ziffern. Dezimal drückt aus, dass als Basis die Zahl zehn verwendet wird. Somit heißt das heutzutage verwendete Zahlensystem nicht ohne Grund indo-arabisch.

Die beiden oben bereits erwähnten Merkmale finden sich im heutigen System noch:

1. Durch wenige Striche konnten die Zahlen von eins bis neun durch die neun Ziffern gebildet werden.

[89] (Wußing 2008, 241)
[90] (Brückler 2017, 16)
[91] (Berggren 1986, 31)
[92] (Wußing 2008, 241)S. 241
[93] (H.-W. Alten 2014, 4)

2. Die Ziffer ganz rechts in einer Zahl beschreibt die Einer, links daneben die Zehner, wieder links daneben die Hunderter usw. und die Null dient dazu, zu zeigen, wo eine Stelle keinen Wert hat.[94]

Exkurs zur Null:
Die Historiker haben unterschiedliche Meinungen zur Herkunft der Null. Auch in der Literatur sind verschiedene Angaben vorzufinden.
Im Positionssystem der Babylonier (539 bis 330 v. Chr.) wurde noch kein Zeichen gesetzt, sondern die Zahlen auseinandergerückt, also eine Lücke gelassen, damit durch die fehlende Stelle die Null dargestellt wird. Auch die Chinesen haben bis ins 8. Jahrhundert, wie die Babylonier, lediglich eine Lücke verwendet. Ab dem Jahr 718 benutzten sie einen Punkt. Eine Null als Zeichen eines Kreises erschien zum ersten Mal im Jahre 870 in der Gwalior-Inschrift.[95] Die Inder haben die Null „sunya“ genannt, was so viel wie Leere oder auch Nichts bedeutete.[96]
Welche Eigenschaften die Null hatte, wurde von den Indern Sridhara und Aryabhata II beschrieben. Die Ziffern, einschließlich der Null, setzte sich ab dem 12. Jahrhundert in Europa durch.

Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi, einer der bedeutendsten Mathematiker des Islam, war derjenige, der die wichtigste Quelle in seinem Werk „Algoritmi de numero Indorum“ über die Kenntnis des Rechnens mit den indischen Ziffern für Europa lieferte.[97, 98, 99]

Dieses genannte Werk begann mit den Worten „Dixit algorizmi“ und bedeutet übersetzt „Al-Hwarizmi sagt“.[100] Der Terminus „Algorithmus“ kommt ursprünglich von algorizmi bzw. algoritmi, welches die lateinische Variante des Mathematikers al-Hwarizmi war.[101]

[94] (Berggren 1986, 31)
[95] (H.-W. Alten 2014, 29; 124;134)
[96] (Wußing 2008, 99)
[97] (Gericke 2003, 197)
[98] (Burton 2011, 238)
[99] (H.-W. Alten 2014, 166)
[100] (John N. Crossley 1990, 107)
[101] (Brückler 2017, 17)

3.1.2 Dezimalbrüche

Die Inder und die islamischen Mathematiker schrieben die Brüche schon in einer vergleichsweisen modernen Form, wie wir sie kennen: Zähler über Nenner. Ansätze zu einem Dezimalbruch wurden nachweislich schon in China benutzt, wo das Erscheinen der Dezimalbrüche mit der Entwicklung des Dezimalsystems in Verbindung stand.[102, 103]

Bevor Dezimalbrüche verwendet wurden, befassten sich die islamischen Mathematiker mit sexagesimalen Brüchen, falls ein nichtganzzahliger Anteil einer Division bestimmt werden sollte.

Al-Hwarizmis Buch über die Addition und Subtraktion gemäß der indischen Rechnung nutzten viele islamische Mathematiker als Hilfsmittel für ihr eigenes Schaffen. Innerhalb von 100 Jahren führte dieses Buch zur Erfindung der Dezimalbrüche im Nahen Osten.[104]
Ahmad al-Uqlidisi rechnete schon ca. 950 n. Chr. mit Dezimalbrüchen. Er erhielt seinen Namen (arabisch „Uqlidis“ = Euklid) dadurch, dass er Kopien von Euklids handgeschriebenen Werken erstellte. Er ist zu nennen, wenn es darum geht, wer als Erstes dezimale Brüche, inklusive dem Dezimalpunkt, benutzte und damit auch der Erste war, der die Zahlen so schrieb, wie sie uns heutzutage bekannt sind. Somit wird davon ausgegangen, dass das Wissen um die Dezimalbrüche auf die Araber zurückgeht, da in den historischen Quellen nichts anderes zu finden ist.[105]

Weiteres ist al-Kaschi zu nennen. Er schrieb methodisch über das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen und Dezimalbrüchen. Da in China Dezimalbrüche schon bekannt waren, ist nicht ganz klar, ob al-Kaschi davon Kenntnis hatte. Er glaubte aber der Entdecker der Dezimalbrüche zu sein und da er so ausführlich darüber in seinem Buch „Schlüssel zur Arithmetik“ geschrieben hat, wird er oft als Erfinder gehandhabt.[106, 107]

---

[102] (J. Tropfke 1980, 106ff.)
[103] (Juschkewitsch und Rosenfeld 1960, 81ff.)
[104] (Berggren 1986, 8)
[105] (Berggren 1986, 38ff.)
[106] (Brückler 2017, 17)
[107] (Wußing 2008, 244)S. 244

3.2 Algebra

Bei vielen mathematischen Problemstellungen muss mit unbekannten Größen gearbeitet werden.

Schon 1800 v. Chr. haben die Babylonier quadratische Gleichungen gelöst. Statt einer Gleichung mit Symbolen benutzten sie Worte, um die Rechenschritte zu beschreiben, wie z.B. „Zu einer Fläche addiere ich sechsmal die Seitenlänge des Quadrates hinzu und erhalte 27“. Heutzutage würde man dies mit $x^2 + 6x = 27$ aufschreiben. Auch Heron und Diophantos benutzten solche numerischen Verfahren weiter, vor allem, wenn es mehr als eine unbekannte Größe zu finden galt.[108]

Die arabischen Mathematiker nahmen die Arbeiten ihrer Vorgänger auf, kommentierten sie und führten sie fort.

Die Algebra erhielt ihren Namen daher, dass die Mathematiker einen eigenen Weg fanden, Lösungswege zur Bestimmung von geometrischen oder numerischen Unbekannten zu finden. Der Name selbst kommt vom arabischen Wort al-jabr, welches der erste große Mathematiker des Islams, Al-Hwarizmi, in seinem bekannten Text „al-Kitab al -muhtasar fi hisab al-gabr wa-l-muqabala“ benutzte. Er wird auch als Vater der Algebra bezeichnet. Das Wort „al-jabr“ bedeutet so viel wie „an seinen Platz zurücksetzen“ oder „wiederherstellen“ und „al-muqabala“ heißt so viel wie „Ausgleichen“.[109, 110] Beim Übersetzen seiner Werke ins Lateinische wurde auch der Name Al-Hwarizmi ins Lateinische übertragen. Dabei kommt im Buch „Algoritmi de numero Indorum“ die Phrase „Dixit Algorismi“ vor, was „Al-Hwarizmi hat gesagt“ bzw. „Algorismi hat gesagt“ bedeutet.[111] Al-Hwarizimi brachte mit diesem Werk die Kenntnis des Rechnens mit den indischen Ziffern nach Europa.[112, 113, 114]

---

[108] (Berggren 1986, 109)
[109] (Berggren 1986, 112)
[110] (Brückler 2017, 104)
[111] (John N. Crossley 1990, 107)
[112] (Gericke 2003, 197)
[113] (Burton 2011, 238)
[114] (H.-W. Alten 2014, 166)

Aufgrund al-Hwarizmis Werk feiert die klassische Algebra ihren Durchbruch oder auch ihre „Geburtsstunde“ in der Blütezeit des Islams, welches in diesem großen Kapitel widergespiegelt werden soll.[115]

Tabelle 3 soll einen kleinen Überblick über die wesentlichen algebraischen Inhalte der islamischen Mathematiker geben.

Tabelle 3: Algebraische Inhalte der islamischen Mathematiker (H.-W. Alten 2014, 202)

Jahr-hundert	Arabischer Mathematiker	Algebraische Inhalte
8.		Die indischen Ziffern wurden übernommen
8. – 10.		Griechische, indische und persischer Werke wurden übersetzt. Davor gab es keine eigene mathematische Entwicklung.
8. – 9.	Al-Hwarizmi	Er schrieb das Werk „Rechnen mit indischen Ziffern“ und ein Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen, worin er das Lösen von Gleichungen zweiten Grades mit geometrischen Beweisen beschreibt.
9. – 10.	Abu Kamil	Er erweiterte quadratische Gleichungen auf rationale und irrationale Koeffizienten. Er benutzte dazu geometrische Beweise, wobei er Euklids Elemente anwendete. „Das Buch der Seltenheit der Rechenkunst“ beinhaltet die sogenannten Vogelaufgaben.
10. – 11.	Al-Karagi	Er entwickelte die Algebra als eigenständiges Fachgebiet, indem er geometrische Beweise schrittweise durchführte. Al-Samawal nahm diese Arbeitsweise auf und entwickelte diese weiter.
11.	Omar Chayyām	Mittels Kegelschnitten löste er geometrisch alle Typen von Gleichungen 3. Grades.
12. – 13.	Sharaf ad-Din at-Tusi	Er entwickelte die geometrischen Lösungen der Gleichungen 3. Grades von Omar Chayyām weiter und gab numerische Lösungen von allgemeinen kubischen Gleichungen an.
13.	Nasīr ad-Dīn at-Tūsī	Er berechnete Wurzeln mittels Horner-Schema und mittels des binomischen Lehrsatzes.
15.	Al-Kaschi	Er entwickelte ein ausgefeiltes Iterationsverfahren.

[115] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 80)

3.2.1 Al-Hwarizmi

Der Namensgeber der Algebra wurde etwa 780 in Choresmien geboren und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker. Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi war einer der ersten, der im Haus der Weisheit in Bagdad tätig wurde. Das Haus der Weisheit war das intellektuelle Zentrum, es fungierte als Bibliothek, Universität und Übersetzungsbüro. Dort hatte er Zugang zu den mathematischen Übersetzungen der Griechen, aber auch die der Inder. Sein in der Einleitung bereits genanntes Werk, umfasst drei Teile. Eines davon behandelt das Auflösen von Gleichungen ersten und zweiten Grades mit konkreten Zahlen als Koeffizienten. Al-Hwarizmi unterscheidet drei Zahlentypen:

1. „dirham“ sind einfache Zahlen
2. „gidhr“ entspricht Wurzel oder „sai“ entspricht Ding, welches die gesuchte Größe ist
3. „Mal“, welches so viel wie Quadrat, Geldbetrag oder Eigentum heißt.[116]

Zu Beginn seines Werkes führt er folgende sechs lineare bzw. quadratische Gleichungstypen an (hier in heutiger Schreibweise), wobei die Koeffizienten a, b und c positiv sind, da keine negativen Zahlen zugelassen sind, genauso wenig wie die Null:[117]

I. Die Quadrate sind gleich den Wurzeln: $ax^2 = bx$
II. Die Quadrate sind gleich einer Zahl: $ax^2 = c$
III. Die Wurzeln sind gleich einer Zahl: $ax = c$
IV. Die Quadrate zusammen mit Wurzeln sind gleich eine Zahl: $ax^2 + bx = c$
V. Die Quadrate zusammen mit Zahlen sind gleich den Wurzeln: $ax^2 + c = bx$
VI. Die Wurzeln zusammen mit Zahlen sind gleich den Quadraten: $bx + c = ax^2$

Damit jede andere Gleichung in eine der sechs oben angeführten Normalformen gebracht werden kann, benutzt al-Hwarizmi sein „al-jabr“ bzw. sein „al-muqabala“. Außerdem muss der höchste Koeffizient der quadratischen Gleichung gleich 1 sein. Ein Beispiel von Wußing (2008) zeigt solch eine Umformung:[118]

[116] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 80-81)
[117] (H. Kaiser 1984, 107)
[118] (Wußing 2008, 239) S. 239

Ausgegangen wird von folgender Gleichung:

$x^2 + (10 - x)^2 = 58$ bzw. $2x^2 + 100 - 20x = 58$

Beim ersten Mal „al-jabr“ wird der negative Term beseitigt und erhält $2x^2 + 100 - 20x + 20x = 58 + 20x$, welches zusammengefasst $2x^2 + 100 = 20x + 58$ ist. Beim zweiten Mal „al-jabr“ wird es zu $2x^2 + 100 - 58 = 20x + 58 - 58$ und durch al-muqabala ergibt sich $2x^2 + 42 = 20x$. Zum Schluss wird durch zwei dividiert und erreicht so die gewünschte Normalform von $x^2 + 21 = 10x$.

Es handelt sich hierbei um Äquivalenzumformungen, die heutzutage aus der Mathematik nicht mehr wegzudenken sind. Die obige Gleichung kann somit bereits in der Unterstufe bis zur Normalform umgeformt werden. In der Oberstufe wird dies in ähnlicher Form praktiziert, obgleich meist auf die Form $x^2 + px + q = 0$ umgeformt wird, um in weiterer Folge die kleine Lösungsformel anzuwenden.

Eine Möglichkeit ist zudem, bei der Einführung der Äquivalenzumformungen im Unterricht auch dieses Beispiel anzuführen und mit den Schülerinnen und Schülern die einzelnen Schritte nachzuvollziehen. Vielleicht wirkt dieses Beispiel beeindruckend, wenn man darauf hinweist, dass derartige Umformungen bereits vor mehr als tausend Jahren bekannt waren und angewendet wurden, allerdings in dieser Form eben nicht im europäischen, sondern im arabischen bzw. muslimisch geprägten Raum. Dies eignet sich aber wohl erst nach einer grundlegenden Beschäftigung mit den Äquivalenzumformungen, zudem müssen die Binomischen Formeln sitzen (siehe erste Umformung).

Al-Hwarizmi nennt diese Umformungen wie bereits erwähnt al-jabr, dies wird in den später aufkommenden Büchern weiterverwendet und tritt im 14. Jahrhundert in Europa als Algebra auf und definiert damit das Auflösen von Gleichungen.[119]

Im Anschluss an die sechs Gleichungen zeigt al-Hwarizmi, wie diese gelöst werden.

Folgendes Beispiel der Gleichung $x^2 + 10x = 39$ soll zum Verständnis dienen:[120]

[119] (Juschkewitsch 1964, 205, 206)
[120] (Popp 1987, 129-130)

Text	Erklärung nach heutiger Form
1) Zu Beginn wird die Hälfte der Wurzeln genommen → $\frac{1}{2} von\ 10 = 5$	Bildung von $\frac{p}{2}$.
2) Multipliziere das Erhaltene mit sich selbst → $5 \cdot 5 = 25$	Berechnung von $\left(\frac{p}{2}\right)^2$.
3) Addiere 39 dazu → $25 - (-39) = 64$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
4) Ziehe die Quadratwurzel von 64 und dies ergibt 8	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
5) Ziehe die Hälfte der Wurzeln ab → $8 - 5 = 3$ und 3 ist die Wurzel aus dem Quadrat, welches gesucht war.	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2} = x$

Die zweite Lösung -13 wird so klarerweise nicht erhalten. Wenngleich zur Zeit al-Hwarizmis das Lösen von Gleichungen nur verbal beschrieben wurde, ist eindeutig zu erkennen, dass bei der „Übersetzung“ in eine moderne Notation hier genauso vorgegangen wird, wie heutzutage quadratische Gleichungen mit der kleinen Lösungsformel gelöst werden – mit der Einschränkung, dass al-Hwarizmi die Gleichungen auf die Form $x^2 + px = q$ brachte (wobei p und q nur positive Werte annehmen konnten), heutzutage aber von der Form $x^2 + px + q = 0$ ausgegangen wird. Im schulischen Kontext können p und q natürlich nicht nur positive Werte annehmen, sondern auch negativ oder Null sein.

Die verbale Lösung, also al-Hwarizmis Ansatz, kann ebenso als Ausgangspunkt für den Schulunterricht dienen. Sind die Schülerinnen und Schüler bereits mit dem Lösen von quadratischen Gleichungen vertraut, kann versucht werden, die verbale Beschreibung in die moderne Notation zu übersetzen bzw. auch probiert werden, den Lösungsansatz zu verstehen.

Popp (1987) beschreibt al-Hwarizmis geometrische Lösungsmethode für den vierten Gleichungstyp, wobei nochmals erwähnt werden muss, dass p und q positiv sind.[121]

[121] (Popp 1987, 130,131)

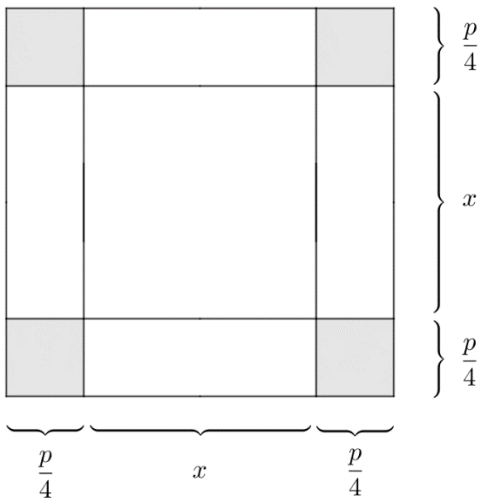


Abbildung 4: Geometrischer Beweis (eigene Darstellung)

Ausgangspunkt ist dabei ein Quadrat mit der Seitenlänge x, wobei an den Seiten jeweils vier Rechtecke angefügt werden, die als zweite Seitenlänge jeweils $\frac{p}{4}$ aufweisen (siehe obige Abbildung 4). Werden außen noch die vier Quadrate ergänzt, ergibt sich ein größeres Quadrat mit der Seitenlänge $x + 2 \cdot \frac{p}{4} = x + \frac{p}{2}$. Somit gilt für den Flächeninhalt A des Quadrats $A = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$.

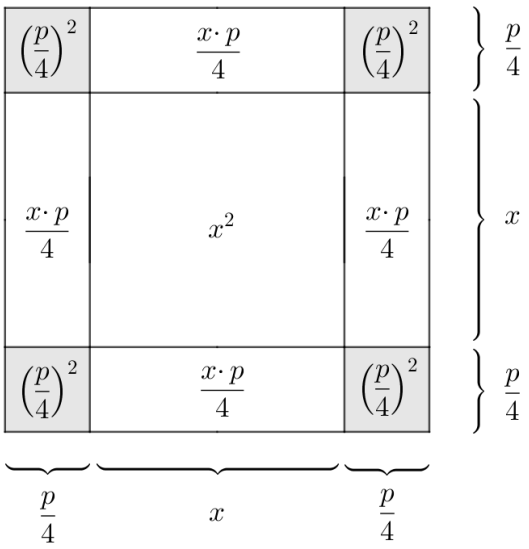


Abbildung 5: Geometrischer Beweis (eigene Darstellung)

Andererseits kann der Flächeninhalt des größeren Quadrats auch durch Zerlegen in Teilflächen bestimmt werden. Es ergibt sich somit:

$$A = x^2 + 4 \cdot \frac{xp}{4} + 4 \cdot \frac{p^2}{16} = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Nachdem $x^2 + px = q$ gilt, lässt sich somit $x^2 + px$ durch q ersetzen und es ergibt sich:

$$A = x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$$

Nachdem beide Ausdrücke dieselbe Fläche beschreiben, kann diese gleichsetzt werden und erhält:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4}$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

$$x = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2}$$

Somit ergibt sich die Lösung der Gleichung. Hierbei gilt zu beachten, dass p und q auf positive Werte beschränkt sind und somit die Fälle $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$ und $x^2 + q = px$ alle einzeln betrachtet werden müssen. Dennoch war es möglich, alle in der Praxis vorkommenden quadratischen Gleichungen zu lösen.

Aufgrund der positiven Koeffizienten war das Lösen der Gleichungen IV bis VI mühsam, aber machbar. Über 600 Jahre wurden zu diesem Thema keine weiteren Fortschritte gemacht.[122]

Eine weitere Lösung soll für den Gleichungstyp V am Beispiel $x^2 + 21 = 10x$ gezeigt werden:[123]

[122] (Popp 1987, 131)
[123] (Juschkewitsch 1964, 207)

Text	Erklärung nach heutiger Form
1) Anzahl der Wurzeln wird halbiert → $10:2=5$	Bildung von $\frac{p}{2}$.
2) Multipliziere das Erhaltene mit sich selbst → $5 \cdot 5 = 25$	Berechnung von $\left(\frac{p}{2}\right)^2$.
3) Ziehe 21 ab → $25 - 21 = 4$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
4) Ziehe die Quadratwurzel aus dem Ergebnis von 3) → $\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
5) Ziehe 2 von der Hälfte der Wurzeln ab → $5 - 2 = 3$ bzw. addiere 2 zu der Hälfte der Wurzeln → $5 + 2 = 7$	$\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Es ist sehr interessant, dass al-Hwarizmi beide Lösungen gefunden hat. Er erhielt seine Lösungen über den geometrischen Weg.

Al-Hwarizmi beschäftigt sich auch mit dem Zerlegen der Zahl 10 in zwei Summanden, wobei zusätzlich noch bestimmte Voraussetzungen erfüllt sein müssen. Dabei entstanden auch oftmals quadratische Gleichungen, wie z.B. „die Zahl 10 wird in zwei Summanden zerlegt, so dass ihr vierfaches Produkt gleich dem Quadrat des einen Summanden ist“. Dabei kam er auf die Gleichung $4x(10-x) = x^2$ mit dem Ergebnis für $x = 8$ und daraus folgt, dass der zweite Summand 2 ist.[124]

Rückblickend sollte al-Hwarizmi nicht nur als Forscher, sondern auch als „Verbinder“ der vielen Errungenschaften angesehen werden. Seine Werke waren und sind durch die lateinischen Übersetzungen noch immer von immenser Bedeutung auf dem Gebiet der Algebra in Europa.[125]

[124] (Herrmann 2016, 156,157)
[125] (Wußing 2008, 244)

3.2.2 Abu Kamil

Sein vollständiger Name lautet Abu Kamil Shuja ibn Aslam ibn Muhammad al-Hasib al Misri. Er lebte ca. 850 bis 930. Der letzte Teil seines Namens, Al-Hasib al Misri, heißt so viel wie „ägyptische Rechner".[126] Er geht auf die Algebra von al-Hwarizmi ein, dies ist u.a. an der Ähnlichkeit des Titels (Kitab al-gabr wa-l-muqabala von Abu Kamil) seines Werkes erkennbar. Es wird sogar gesagt, dass er al-Hwarizmis Algebra überbietet.[127]

Abu Kamil befasst sich im Werk „Das Buch der Seltenheit der Rechenkunst" mit unbestimmten linearen Gleichungen, sogenannte Vogelaufgaben. Solche Aufgaben gab es schon in China und Indien. Dieses Werk besteht aus sechs Aufgaben inklusive Lösungen, welche immer schwieriger werden und er zeigt, dass solche Aufgaben keine, eine oder mehrere Lösungen haben können.
Grundsätzlich geht es in seinen Aufgaben um das Kaufen von 100 Vögel für 100 Drachmen. In seiner ersten Aufgabe kosten 20 Sperlinge zusammen eine Drachme, eine Ente 5 Drachmen und ein Huhn kostet genau eine Drachme. Und er geht der Frage nach, wieviel Vögel er von jeder Art bekommt. Wenn die Anzahl der Enten x und die Anzahl der Sperlinge y sind, dann ist $100 - x - y$ gleich die Anzahl der Hühner und es ergeben sich nach heutiger Schreibweise folgende zwei Gleichungen:

$$x + y + z = 100$$

$$5x + \frac{1}{20}y + z = 100$$

Durch Elimination der Unbekannten z folgt: $100 - x - y = 100 - 5x - \frac{1}{20}y$.

Dadurch ergibt sich: $4x = \frac{19}{20}y$ oder $y = 4x + \frac{4}{19}x$.

Diese erste Aufgabe hat nur eine Lösung. Für 100 Drachmen bekommt er 19 Enten, 80 Sperlinge und ein Huhn.[128]

Derartige Aufgaben finden auch Eingang in die Schulmathematik. Bei obigem Beispiel handelt es sich um das Lösen von Gleichungssystemen mit drei Variablen, ein Zusammenhang mit der dreidimensionalen Vektorrechnung (dem Durchschnitt zweier

[126] (Juschkewitsch 1964, 220)
[127] (Wußing 2008, 245)
[128] (Naini 1982, 101)

Ebenen) besteht natürlich ebenso. Nachdem sich eine Variable sofort eliminieren lässt (hier beispielsweise $z =$ Anzahl der Hühner), kann das dadurch entstehende Gleichungssystem auch geometrisch als das Schneiden zweier Geraden interpretiert werden. Zwei Geraden können bekannterweise keinen, einen oder unendlich viele gemeinsame Punkte (Schnittpunkte) besitzen. Somit gibt es ähnlich gelagerte Aufgaben sowohl in der Unter- als auch in der Oberstufe. Im schulischen Kontext werden derartige Aufgaben algebraisch und auch geometrisch gelöst.

Seine nächsten drei Aufgaben haben auch mehr Lösungen (Aufgabe 2 hat 6 Lösungen; Aufgabe 3 hat 98 Lösungen; Aufgabe 4 hat 304 Lösungen), seine fünfte Aufgabe hat gar keine und die letzte Aufgabe, welche quasi die Krönung des Werkes ist, hat sogar 2676 Lösungen.[129]

Diese Lösungsmethode ist nicht ganz so besonders wie die der Inder, jedoch um einiges leichter zu verstehen. Außerdem ist nicht sicher, ob er überhaupt die indische Variante kannte. Die Aufgabenstellungen ähneln sich zwar, jedoch stimmen die Lösungswege nicht überein.[130] Leonhard Euler (* 1707, † 1783) hat das Vogelproblem in seinem Werk „Vollständige Anleitung zur Algebra“ 1770 aufgegriffen.[131]

Wie auch al-Hwarizmi beginnt Abu Kamil sein Buch „Kitab al-gabr wa-l-muqabala“ mit drei Arten (Wurzeln, Quadrate und gewöhnliche Zahlen) von Größen. Er ergänzt diese drei Größen mit höheren Potenzen der Variablen (Kubus, Quadrat Quadrat, Quadrat Quadrates Dinges, Kubus Kubus, keine siebente Potenz, Quadrat Quadrat Quadrat Quadrat). Dabei ist eine Ähnlichkeit der Exponentenbildung wie bei Diophantos zu erkennen, jedoch bezeichnete der Grieche die fünfte Potenz als Quadratokubus. Gegenüber al-Hwarizmi, der nur mit einer Unbekannten arbeitet, geht Abu Kamil durch die Verwendung von mehreren Unbekannten einen Schritt weiter.[132] Außerdem benutzt er Hilfsvariablen, um leichter an die Lösung der Aufgabe zu kommen.[133]

Beim Beweis von seinen Regeln weicht er von al-Hwarizmi ab und nimmt auf das zweite Buch „Geometrische Algebra“ von Euklids Elementen Bezug (hier insbesondere

[129] (H.-W. Alten 2014, 174)
[130] (Naini 1982, 104)
[131] (H.-W. Alten 2014, 175)
[132] (Juschkewitsch 1964, 221)
[133] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 83)

die Lehrsätze 4 und 5), um so eine Methode zum Berechnen von x^2 der quadratischen Gleichungen 4, 5 und 6 anzugeben.

Wenn der Koeffizient der größten Potenz 1 ist, ergeben sich folgende Lösungen:[134]

$$x^2 = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}$$

$$x^2 = \frac{p^2}{2} - q \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 - p^2 q}$$

$$x^2 = \frac{p^2}{2} + q + \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}$$

Des Weiteren sind viele Regeln zu algebraischen Umformungen, wie z.B. $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b = a$, $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}$ oder $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$ in seinem Werk zu finden.

Er schreibt außerdem, dass $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$ gleich ist und nimmt als Zahlenbeispiel: $\sqrt{18} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 + 8 \pm 2\sqrt{144}}$ und erhält die Lösungen $\sqrt{50}$ und $\sqrt{2}$.[135]

Außerdem benutzte Abu Kamil für Probleme geometrischer Natur ausschließlich algebraische Gleichungen. Aus diesem Grund wird von einem Umbruch in der Geometrie gesprochen. Folgendes Beispiel, bei welchem die Koeffizienten und Wurzeln irrational sind, dient zum Veranschaulichen beider Punkte:

In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe seiner Höhe und die des Flächeninhaltes 10. Wie lang ist die Höhe?“

In heutiger Schreibweise ermittelt er die Höhe h derart:[136]

Der Flächeninhalt ist $\frac{h^2}{\sqrt{3}}$.

Daher erhalten wir $\frac{h^2}{\sqrt{3}} + h = 10$ und dann $h^2 + h\sqrt{3} = \sqrt{300}$.

Es ergibt sich $h = -\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{300}}$ daraus.

[134] (Juschkewitsch und Rosenfeld 1960, 111)
[135] (Juschkewitsch 1964, 223-224)
[136] (H.-W. Alten 2014, 180-182)

Abu Kamil, der kontinuierlich die mathematischen Inhalte der Babylonier und Ägypter und al-Hwarizmis Algebra aufgriff, hat viel für die Entwicklung der Mathematik beigetragen. Sein Werk wurde später von Leonardo Fibonacci (* 1170, † 1240) aufgegriffen und kam so auch nach Europa.[137, 138]

3.2.3 Al-Karagi

Ein direkter Nachfolger von Diophantos, al-Hwarizmi und Abu Kamil war der aus Bagdad stammende Abu Bakr Muhammad ibn al-Hassan al-Karagi.[139] Das Geburtsdatum ist nicht bekannt und auch beim Sterbejahr gibt es sehr ungenaue Angaben, die zwischen 1019 und 1029 liegen. Aufgrund der algebraischen Werke von den drei oben genannten Mathematikern und der immer fortschreitenden Loslösung von den geometrischen Beweisen schaffte es al-Karagi, die Algebra als selbstständigen mathematischen Teilbereich anzusehen, welche das Ziel verfolgt, unbekannte durch bekannte Größen zu bestimmen. Dieser Zusammenhang wird daher als Arithmetisierung der Algebra verstanden.[140]

Er beschreibt, dass zu jeder Potenz x^n der Kehrwert $\frac{1}{x^n}$ gehört und dass es jedes Mal 1 ergibt, wenn die Potenz mit dem dazugehörigen Kehrwert multipliziert wird.[141]

Auch wenn er ohne Symbole arbeitete, konnte er Sachverhalte wie z.B. $x^n x^m = x^{n+m}$, wobei n und m beliebig groß und beide positiv oder negativ sein konnten, angeben. Er gibt außerdem an, dass Potenzen eine Kette von Proportionen sind. In heutiger Form würde z.B. $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = \frac{x^2}{x^3} = \cdots$ oder $\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} : \frac{1}{x^4} = \cdots$ geschrieben werden.[142]

Zudem beschrieb er auch folgende Gesetzmäßigkeiten:[143]

$$\frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^{m+n}} \qquad \frac{1}{x^m} \cdot x^n = \frac{x^n}{x^m}$$

[137] (Brückler 2017, 107)
[138] (Wußing 2008, 245)
[139] (Naini 1982, 104)
[140] (Wußing 2008, 243-245)
[141] (Berggren 1986, 124)
[142] (Juschkewitsch 1964, 230)
[143] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 85)

Er nutzt Operationen der Arithmetik für Monome und betrachtet die Summen, Differenzen und Produkte zusammengesetzter Monome, also Polynome.[144] In der Division beschreibt er das Dividieren von Polynomen durch ein Monom z.B. $(10x^2 + 10x^3) : 5x = 2x + 2x^2$.[145]

Al-Karagi kannte folgende Regel, wenn a und b positiv sind: $a - (-b) = a + b$, jedoch fand er die Regel $-a - (-b) = -(a - b)$ nicht heraus. Somit könnte es ein kleiner Trost für die Schülerinnen und Schüler sein, dass selbst ein so genialer Mathematiker es nicht schaffte, dieses Vorzeichenproblem zu lösen.[146]

Der Übergang von den natürlichen zu den ganzen Zahlen ist für Schülerinnen und Schüler oftmals ebenso mit Problemen verbunden, insbesondere was das Rechnen mit ganzen Zahlen betrifft. In den Schulbüchern finden sich hier unterschiedliche Zugänge, wie ein intuitives Grundverständnis der ganzen Zahlen aufgebaut werden soll. Meist wird auf das bereits vorhandene Wissen über die Temperaturskala oder auf Geldbeträge zurückgegriffen, wo für Schülerinnen und Schüler negative Zahlen intuitiv auftauchen und auf einer Zahlengerade korrekt eingeordnet werden können.

Den Problemen, die sich aus dem Rechnen mit ganzen Zahlen ergeben, widmet sich beispielsweise auch das Schulbuch Mathematik verstehen 3. Hier werden paradigmatisch die Aussagen zweier wohl fiktiver Schüler als Ausgangspunkt genommen. Eine der beiden Aufgaben lautet: Gustav (fiktiver Name aus dem Schulbuch) meint, dass $(+2) + (-5) = (-3)$ doch leichter mit $2 - 5 = -3$ angeschrieben werden kann. Die Frage an die Schülerinnen und Schüler besteht darin zu erkennen, ob Gustav Recht hat und worin der Unterschied liegt.[147]

Das erwähnte Positiv-Negativ-Spiel soll hierbei den Unterschied zwischen Rechen- und Vorzeichen verdeutlichen beziehungsweise erläutern, warum „Minus Minus“ eben „Plus“ ist. Das ist für Schülerinnen und Schüler nicht immer gleich einleuchtend.

---

[144] (Brückler 2017, 108)
[145] (H.-W. Alten 2014, 183)
[146] (Berggren 1986, 124)
[147] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al., Mathematik verstehen 3 2016, 32)

Weiters bildet Al-Karagie in seinem Werk „al-Fahri“ die Summen von einigen endlichen Reihen. Ein geschickter Beweis davon, dass $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$ ist, wird anschließend demonstriert:[148]

Die Seite des Quadrates ABCD sei $1 + 2 + \cdots + n$, wobei al-Karagi $n = 10$ setzte. In diesem Quadrat wird ein Gnomom $B'BCDD'C'$ (in der Abbildung 6 schraffiert) gebildet, wobei die Strecke $BB' = n$ ist. Für die Fläche des Gnomons entsteht:

$$2n(1 + 2 + \cdots + n) - n^2 = 2n\frac{n(n+1)}{2} - n^2 = n^3$$

Nun wird das nächstkleinere Quadrat AB’C’D‘ und das Gnomon B‘‘B’C’D’D‘‘C‘‘ betrachtet. In diesem Fall gilt für $B'B'' = n - 1$ und der Inhalt der Fläche des Gnomons beträgt $(n-1)^3$. Wenn diese Methode weitergeführt wird, dann wird ein Quadrat mit der Seite 1 erzeugt. Folglich ist das Quadrat ABCD in n-fache Gnomone und in das Quadrat $1^2 = 1^3$ zerlegt. Somit gilt: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

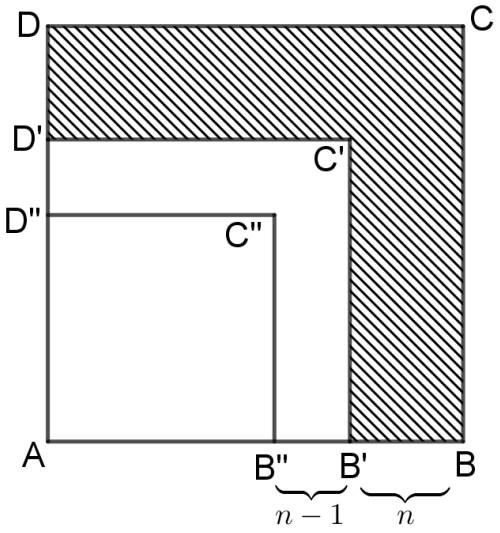


Abbildung 6: Skizze für Beweis nach (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 86)

Somit war al-Karagi ein Vorreiter, der einen Induktionsbeweis beim oben gezeigten Theorem von Nikomachos von Gerasa (*etwa 60 n. Chr., † etwa 120 n. Chr.) durchführte.[149]

[148] (Juschkewitsch 1964, 230-231)
[149] (Herrmann 2016, 207)

Induktionsbeweise finden sich in Schulbüchern grundsätzlich wenige bis keine, insbesondere auch deswegen, weil Folgen und Reihen mittlerweile nicht mehr zum Stoff der standardisierten Reifeprüfung zählen, allerdings im Lehrplan stehen. Somit müssen sie behandelt werden, der Fokus wird aber erfahrungsgemäß nicht darauf liegen. In der Unterstufe werden Teilbarkeitsregeln behandelt, auch dort finden sich normalerweise keine Induktionsbeweise. Beweise, die mit Flächeninhalten – wie oben demonstriert – argumentieren, findet man bereits in Euklids Elementen. Darüber hinaus kann in der Schule der Lehrsatz des Pythagoras mittels Flächenvergleich bewiesen werden. Zudem werden gern die Summen unendlicher Reihen geometrisch bewiesen, wie etwa die Summe von $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$ (siehe auch Abbildung 7).

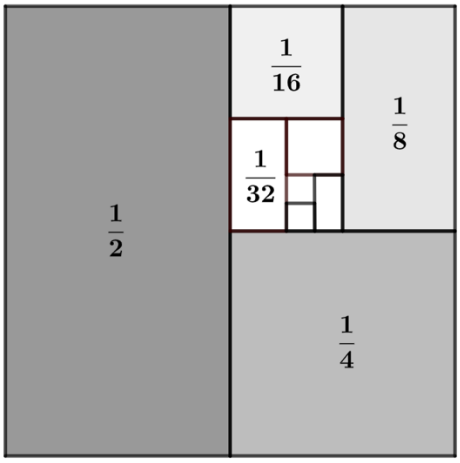


Abbildung 7: Geometrischer Beweis von unendlichen Summen nach (Malle, Koth, et al. 2018, 156)

Den Grenzwert dieser unendlichen Reihe können Schülerinnen und Schüler auch intuitiv anschaulich erfahren, wenn sie sich eine Pizza vorstellen, wobei sie täglich jeweils die Hälfte der noch vorhandenen Pizza verspeisen. Am ersten Tag wird somit die Hälfte der Pizza gegessen, am zweiten die Hälfte der Hälfte (ein Viertel), am dritten Tag ein Achtel etc. Setzt man dies unendlich fort, ist es wohl intuitiv klar, dass am „Ende“ die Pizza ganz verschwunden ist, man aber mit Sicherheit keine neue zu essen begonnen hat (wenn man den „Spielregeln“ und nicht dem Hungergefühl folgt).

Möglich ist auch, beispielsweise Extremwertaufgaben (diese werden mittlerweile meist Optimierungsaufgaben genannt) auch oder nur geometrisch zu lösen. Denkbar ist auch ein geometrischer Beweis der mittels Differentialrechnung ermittelten Lösung. Nachdem die Extremwertaufgaben aber ebenso bei der Standardisierten Reifeprüfung

nicht zum Zug kommen, werden sie wohl nicht mehr so lange im Unterricht behandelt. Sie dienen aber wohl auch als Ausgangspunkt für komplexere Aufgaben bei Schularbeiten oder eignen sich für die mündliche Reifeprüfung.

3.2.4 Al-Samawal

Al-Samawal ibn Yahya al-Maghribi, welcher etwa 1130 bis 1180 lebte, befasste sich schon in jungen Jahren mit den Werken von Euklid und einigen arabischen Mathematikern, wie Abu Kamil und al-Karagi. Er schrieb schon mit 19 Jahren ein Buch mit dem Titel „Einleuchtendes Buch über die Arithmetik“, in welchem er die Resultate seiner Vorgänger aufgriff und zum Teil verbesserte. Er war der erste arabische Mathematiker, der methodisch mit negativen Zahlen rechnete, wobei diese negativen Zahlen nicht auf größere positive Zahlen angewendet und subtrahiert wurden. Zum Beispiel formulierte er: $-(-ax^n) = ax^n$ oder $-ax^n - (bx^n) = -(a+b)x^n$.[150]
Er definierte auch, dass $x^0 = 1$ ist und erweiterte somit die allgemeinen Potenzrechenregeln, ohne dabei die Exponenten einzugrenzen.[151]
Des Weiteren hat er das Gesetz für Potenzen $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ ohne Ausnahmen erweitert. Er entwickelte eine Multiplikationstafel für dieses Rechengesetz, um das mühsame Rechnen zu erleichtern.[152] Die Originaltafel wurde in arabischer Sprache geschrieben, die Tabelle 4 zeigt eine Mischung aus heutiger und damaliger Schreibweise. Es sind zwei kleine Unterschiede zu erkennen: Der erste Unterschied ist, dass die natürlichen Zahlen in der Tabelle 4 rechts stehen und in der Originaltafel links stehen. Der zweite Unterschied wird beim genauen Betrachten des Kehrwertes ersichtlich. Zum Beispiel wird der Kehrwert von 2^4 mit $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ in der Übersetzung gezeigt. In der „Originaltabelle“ wird dieser Kehrwert aber mit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$ dargestellt. Es ist der gleiche Wert, aber bei der Recherche ist der Verfasserin der vorliegenden Arbeit dieser kleine Unterschied aufgefallen. Gemeinsam haben beide Tabellen, dass in der zweiten Zeile die „Hochzahl“ steht. m für mal („hoch 2“) und k für ka’b (hoch 3). Die Abkürzung „mmk“ würde „mal mal ka’b“ bedeuten und damit ist x^7 gemeint. Das t steht für Kehrwert, also im Fall „tmmk“ wäre das x^{-7}.

[150] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 87)
[151] (Wußing 2008, 246)246
[152] (Berggren 1986, 125-126)

Tabelle 4:Multiplikationstafel für Potenzen (Berggren 1986, 126)

tkkk	tmkk	tmmk	tkk	tmk	tmm	tk	tm	td	Einheit	d	m	k	mm	mk	kk	mmk	mkk	kkk
$\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$\frac{1}{27}\frac{1}{27}\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}\frac{1}{27}\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}\frac{1}{9}\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19.683

Das Rechnen mit dieser Tafel erfolgte folgendermaßen: Wenn z.B. das Ding 2 ist, dann ist der Kehrwert von mal ka'b gleich $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}$. Wird x^m mit x^n multipliziert, dann müssen wir bei positiven n die Anzahl an Schritte nach rechts gehen und wenn n negativ ist, diese Anzahl an Schritten nach links gehen. Zwei Beispiele sollen zur Verdeutlichung dienen:

$2^3 \cdot 2^4$ → von „k“ 4 Schritte nach rechts auf „mmk“ → 128

$3^2 \cdot 3^{-6}$ → von „m“ 6 Schritte nach links auf „tmm“ → $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$.

Da die Mathematik der Araber bis dato immer noch rein verbal dargestellt wurde, waren diese Multiplikationstafeln ein Fortschritt in Richtung des Arbeitens mit Symbolen.[153]

Al-Samawal erzielte auch Fortschritte in der Division. Im Gegensatz zu al-Karagi, der durch Monome dividierte, nahm er sich die Division durch Polynome vor. Ein Beispiel soll die Division von $20x^2 + 30x$ durch $6x^2 + 12$ darstellen. Er erweitert die Division auf negative Exponenten und zeigt somit eine Reihenentwicklung, welches sich im Ergebnis

$$3\frac{1}{3} + 5\left(\frac{1}{x}\right) - 6\frac{2}{3\left(\frac{1}{x^2}\right)} - 10\left(\frac{1}{x^3}\right) + 13\frac{1}{3\left(\frac{1}{x^4}\right)} + 20\left(\frac{1}{x^5}\right) - 26\frac{2}{3\left(\frac{1}{x^6}\right)} - 40\left(\frac{1}{x^7}\right) + \cdots =$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^{-n}$ zeigt.[154]

Eine weitere Divisionsaufgabe von Polynomen beschreibt Berggren (1986) in seinem Buch:[155]

[153] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 88)
[154] (H.-W. Alten 2014, 184)
[155] (Berggren 1986, 127ff.)

$20kk + 2mk + 58mm + 75k + 125m + 96d + 94\ Einheiten + 140td + 50tm + 90tk + 20tmm$ dividiert durch $2k + 5d + 5\ Einheiten + 10td$

In heutiger Schreibweise würde es folgendermaßen aussehen:
$20x^6 + 2x^5 + 58x^4 + 75x^3 + 125x^2 + 96x + 94 + 140x^{-1} + 50x^{-2} + 90x^{-3} + 20x^{-4}$ dividiert durch $2x^3 + 5x + 5 + 10x^{-1}$.

Er berechnet seine Polynomdivision auf Staubtafeln. Wenn eine leere Ordnung auftritt, dann setzt er an diese Stelle eine Null. Solch eine Division ist in der Tabelle 5 zu sehen. Heutzutage werden schriftliche Polynomdivisionen ähnlich durchgeführt. Der Unterschied ist, dass wir den Divisor nicht jeweils in die untere Zeile schreiben.

Tabelle 5: Polynomdivision (Berggren 1986, 128)

kk	mk	mm	k	m	d	Einheit	td	tm	tk	tmm
			10	1	4	10	0	8	2	
20	2	58	75	125	96	94	140	50	90	20
2	0	5	5	10						
	2	8	25	25	96	94	140	50	90	20
	2	0	5	5	10					
		8	20	20	86	94	140	50	90	20
		2	0	5	5	10				
			20	0	66	54	140	50	90	20
			2	0	5	5	10			
					16	4	40	50	90	20
					2	0	5	5	10	
						4	0	10	10	20
						2	0	5	5	10

Es kann nicht genau gesagt werden, welche Wirkung al-Samawal auf die Nachwelt hatte. Belegt wurde zwar, dass al-Kaschi seine Fortschritte aufgriff, aber für das Abendland schien er keinen Einfluss gehabt zu haben.[156]

3.2.5 Omar Chayyām

Nicht nur im Bereich der Mathematik, Philosophie und Astronomie war er sehr produktiv, sondern auch als Dichter. Omar Chayyām lebte etwa von 1048 bis 1121/1122, schrieb anscheinend in dieser Zeit etwa 1000 Vierzeiler und ist deswegen

[156] (Wußing 2008, 246)246

weltbekannt geworden.[157, 158] In der Mathematik hingegen beschäftigte er sich viel mit Gleichungen dritten Grades und erzielte Fortschritte in der Algebra.

Mit Gleichungen dieser Art hatte sich schon Archimedes in seinem Werk „Kugel und Zylinder“ beschäftigt. Auch Al-Mahani (* etwa 820, † etwa 880) nahm die Aufgabe von Archimedes auf, die Kugel in einem bestimmten Verhältnis durch eine Ebene zu teilen. Daher kam er auf die kubische Gleichung $x^3 + c^2b = cx^2$.[159] Diese wird heute noch ab und zu als Mahani-Gleichung bezeichnet. Er schaffte es aber nicht, die Lösung dieser Gleichung zu konstruieren.[160]

Weitere arabische Mathematiker griffen die Problemfälle der Griechen wieder auf, z.B. kamen sie bei der Würfelverdoppelung, Dreiteilung des Winkes oder auch beim Konstruieren regulärer Vielecke, die in einem Kreis einbeschrieben sind, immer wieder auf eine kubische Gleichung. Mit Zirkel und Lineal konnten sie diese Probleme aber nicht lösen.

Das Arbeiten mit Zirkel und Lineal nach dem Vorbild der antiken Griechen findet bis heute Eingang in die Unterstufe. Generell bildet die Unterstufe zu großen Teilen das Arbeiten und das Wissen der Griechen ab. Bekannt sind etwa die Konstruktionen von Winkeln, das Ermitteln der Winkelhalbierenden oder den Mittelpunkt einer Strecke nur mit Zirkel und Lineal, jedoch ohne Winkelmesser. Hierbei gilt anzumerken, dass im schulischen Kontext normalerweise nur Winkel konstruiert werden, die Vielfache von 60° (oder die Hälfte oder etwa ein Viertel von 60°) sind. Möglich sind also etwa Konstruktionen von 15°, 30°, 60° oder 75° ohne Zuhilfenahme eines Winkelmessers. Es kann hier sein, dass Schülerinnen und Schüler fragen, ob jeder beliebige Winkel ohne Winkelmesser konstruier ist oder zum Beispiel ein beliebiger Winkel auch in drei Teile geteilt werden kann, ohne einen Winkelmesser zu verwenden. Der ohne Winkelmesser sehr einfach konstruierbare Winkel von 60° ist beispielsweise nur mit Lineal und Zirkel nicht in drei gleich große Winkel zu teilen. Hier lassen sich die altbekannten griechischen Probleme erkennen, nachdem die Griechen dies und ähnliche Aufgabenstellungen zu lösen versuchten und scheiterten. Beweise, dass dies

[157] (Linden 2012, 3)
[158] (Wußing 2008, 247)S.247
[159] (Brückler 2017, 107)
[160] (Linden 2012, 173)

ausschließlich mit Lineal und Zirkel nicht funktionieren kann, wurden hier erst sehr spät erbracht. So steht die Redewendung „Quadratur des Kreises“ auch heute noch für ein unlösbares Problem.

Derartige Fragen von Schülerinnen und Schüler können natürlich als Ausgangspunkt genommen werden, es könnten aber auch proaktiv derartige Fragen oder Überlegungen „provoziert“ werden. Nachdem diese Aufgaben wie die Quadratur des Kreises jahrhundertelang zu lösen versucht wurden, ein Beweis der Unmöglichkeit aber erst sehr spät erbracht wurde, ist zu erkennen, dass manche Aufgabenstellungen einfach wirken mögen, die Beweise aber sehr kompliziert sein können. Für die Undurchführbarkeit der Quadratur des Kreises wird die Transzendenz der Kreiszahl π benötigt, welche erst im 19. Jahrhundert bewiesen werden konnte.[161]

Umgekehrt bedeutet dies, dass π nicht Nullstelle eines ganzrationalen Polynoms sein kann. Analog dazu kann π nicht Lösung einer algebraischen ganzrationalen Gleichung sein. Für die Schulmathematik ist diese Erkenntnis wohl nicht von großer Bedeutung, sie fußt aber schlicht auf der Definition von algebraischen respektive transzendenten Zahlen.

Al-Bīrūnī (*973, †1048) formulierte zwei kubische Gleichungen, um den Zusammenhang bestimmter Winkel zu finden. Bei beiden Gleichungen ist x die Sehne, die bei der ersten Gleichung zu einem Winkel von 20° und bei der zweiten Gleichung von 80° gehört. Damit wollte er Sinustafeln erarbeiten.[162]

1) $x^3 - 3x - 1 = 0$ (für 20°)

2) $x^3 - 3x + 1 = 0$ (für 80°)

Für Omar Chayyām ist Algebra das Auflösen von Gleichungen. Auch er benutzt keine Symbole. Er unterscheidet verschiedene kubische Gleichungen, leitete geometrisch Wurzeln her und zum Schluss stellte er Bedingungen für positive Lösungen auf. Er unterscheidet grundsätzlich 14 Fälle, wobei die Koeffizienten größer Null sind und die Wurzeln nicht Null sein dürfen.

[161] (Michael Merz und Wüthrich 2013, 293)
[162] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 89-90)

Er hat Fälle mit zwei, drei und vier Glieder aufgestellt:

I) Zwei Glieder: $x^3 = a$

II) Drei Glieder:

$$x^3 + ax = b \qquad x^3 + a = bx$$
$$x^3 = ax + b \qquad x^3 + ax^2 = b$$
$$x^3 + a = bx^2 \qquad x^3 = ax^2 + b$$

III) Vier Glieder:

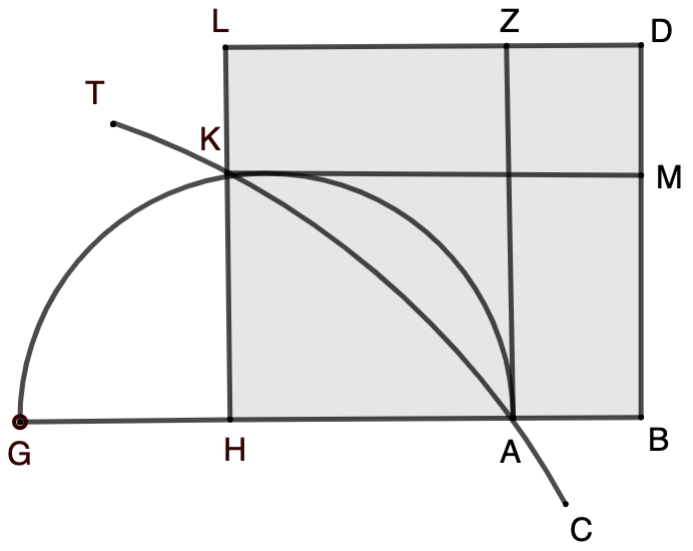
$$x^3 + ax^2 + bx = c \qquad x^3 + bx + c = ax^2$$
$$x^3 = ax^2 + bx + c \qquad x^3 + ax^2 + c = bx$$
$$x^3 + ax^2 = bx + c \qquad x^3 + bx = ax^2 + c$$
$$x^3 + c = ax^2 + bx.$$ [163]

Für alle Fälle gibt Omar Chayyām Konstruktionen zur Lösungsfindung an. Obwohl seine Überprüfungen hinsichtlich der Anzahl der Lösungen sehr gründlich waren, kam es für ihn nicht in Betracht, dass drei positive reelle Lösungen auftreten könnten.

Eine allgemeine Lösung für die viergliedrige Gleichung $x^3 + bx = ax^2 + c$ soll im Anschluss in heutiger Schreibweise gezeigt werden.[164]

Im ersten Schritt wird eine neue Größe $s = c : b$, wobei nach $c = b \cdot s$ umgeformt wird, eingeführt. Durch Einsetzen von c in die Gleichung ergibt sich $x^3 + bx = ax^2 + b \cdot s$. Nach Umformen erhalten wir $bx - bs = ax^2 - x^3$ und durch Herausheben von b und x ergibt sich $b(x - s) = x^2(a - x)$. Nun wird mit $(x - s)$ erweitert und es ergibt sich somit $b(x - s)^2 = x^2(a - x)(x - s)$. Wir wissen, dass durch das Schneiden zweier Kegelschnitte eine Gleichung vierten Grades entsteht. Eine zweite Gleichung für den Halbkreis über AG wird angeführt mit $(a - x)(x - s) = y^2$ (siehe Abbildung 8).

[163] (H.-W. Alten 2014, 185)
[164] (Gericke 1992, 202,203)



$AB = s$

$BH = x$

$BG = a$

$HK = y$

$BD = \sqrt{b}$

Abbildung 8: Skizze zum Herleiten der kubischen Gleichung nach (Gericke 1992, 202)

Durch Einsetzen der Halbkreisgleichung in die erste Gleichung ergibt sich $b(x-s) = x^2y^2$ oder $\sqrt{b}(x-s) = xy$ oder $x(\sqrt{b}-y) = \sqrt{b} \cdot s$ und es entsteht eine Hyperbelgleichung mit den Asymptoten DL und DB. Omar Chayyām beschreibt nicht diesen Gedankengang, sondern er zeigt, wie der Kreis (zweite Gleichung) und die Hyperbelgleichung gezeichnet werden und überprüft damit, ob die Abszissen der Schnittpunkte die Lösungen der ersten Gleichung sind. Er bemerkte leider nicht, dass es zwei zusätzliche Schnittpunkte von Hyperbel und Kreis gäbe.[165]

Einige Überlegungen, die Omar Chayyām nicht bedacht hat, werden von Sharaf ad-Din at-Tusi (* 1135, † 1213) später aufgegriffen. Er konnte ein paar Sonderfälle der kubischen Gleichungen lösen, entwickelte die Thematik auch weiter, jedoch fand er keine systematische Vorgehensweise, um diese Gleichungen zu lösen.[166]

An das Wissen über das geometrische Konstruieren der Wurzeln von Gleichungen wurde im 17. Jahrhundert von vielen Mathematikern, wie z.B. Descartes, angeknüpft.[167]

[165] (Gericke 1992, 202-203)
[166] (Launay 2018)
[167] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 93)

3.2.6 Nasīr ad-Dīn at-Tūsī

Die arabischen Mathematiker, u.a. al-Nasawi (* etwa 1010, † etwa 1075), Abu l-Wafa (* 940, † 998), al-Bīrūnī und Omar Chayyām versuchten $x^n = a$ numerisch zu lösen. Ein Araber, der als erstes ein allgemeines Verfahren zum Wurzelziehen beschreibt, ist Nasīr ad-Dīn at-Tūsī, welcher 1201 in Chorasan geboren wurde und 1274 auf der Reise nach Bagdad verstarb.[168, 169]

In seinem Werk „Sammlung zur Arithmetik mit Hilfe von Brett und Staub“ beschreibt er das Ziehen der sechsten Wurzel aus $244\ 140\ 626$. Er benutzte dafür den binomischen Lehrsatz und das Hornerschema.

Zuerst wird die Zahl, deren Wurzel gezogen werden soll, in Perioden (die Zahl wird nach dem unten genannten Schema aufgeteilt) unterteilt. Die Periodenlänge ist genauso groß, wie der Exponent der Wurzel (in diesem Beispiel 6). Die letzte Periode ist aber kleiner oder gleich dem Exponenten der Wurzel (in diesem Beispiel 3). Dann wird die größtmögliche Zahl gesucht, die von der letzten Periode (hier: 244) abgezogen werden soll. Durch Probieren kommen wir so auf 2^6, da 1^6 zu klein und 3^6 zu groß ist und beim Subtrahieren von 2^6 von 244 erhalten wir 180. $(10a+u)^6 - (10a)^6$ wird mittels binomischer Formel auf folgende Form gebracht:

$$\binom{6}{1}(10a)^5u + \binom{6}{2}(10a)^4u^2 + \binom{6}{3}(10a)^3u^3 + \binom{6}{4}(10a)^2u^4 + \binom{6}{5}(10a)u^5 + \binom{6}{6}u^6$$

Da wir $(10a)^6$ abziehen, fällt das erste Polynom weg. Mithilfe des Hornerschemas werden die Binomialkoeffizienten berechnet und es ergibt sich folgender Form:

$$u^5 + 120u^4 + 6\ 000u^3 + 160\ 000u^2 + 2400\ \ 000u + 19\ 200\ 000$$

Dann setzt at-Tūsī für u die Zahlen 1 bis 6 ein und ermittelt das größte u bis

$$u^5 + 120u^4 + 6\ 000u^3 + 160\ 000u^2 + 2400\ \ 000u + 19\ 200\ 000 \leq$$
$$244\ 140\ 626 - 2^6 \cdot 10^6 = 180\ 140\ 626 \text{ ist.}$$

[168] (Wußing 2008, 250)S.250
[169] (H.-W. Alten 2014, 194)

Er kommt für u auf 5 und damit auf $5 \cdot 36\,028\,125$.
Es folgt daraus, dass $180\,140\,626 - 5 \cdot 36\,028\,125 = 1$ ist und das bedeutet $25^6 + 1 = 244\,140\,626$.

Es ist nicht genau bekannt, ob er Ideen für dieses Verfahren aus dem verloren gegangenen Werk von Omar Chayyām oder von einem chinesischen Astronomen bekommen hat.[170, 171]

3.2.7 Al-Kaschi

Jamshid al-Kaschi war einer der letzten großen arabischen Wissenschaftler zu dieser Zeit. Der Arzt, Astronom und Mathematiker, welcher von 1380 bis 1429 lebte und somit nicht mehr zur Blütezeit des Islams zählt, muss hier dennoch genannt werden.

Das im Anschluss erklärte Verfahren ist das erste Iterationsverfahren zur Bestimmung des Sinus von 1° in der Geschichte der Mathematik. Sein Verfahren ist zweckmäßiger als viele andere Methoden zum näherungsweisen Lösen solcher Gleichungen und steht auch dem Näherungsverfahren von François Viète (* 1540, † 1603) um nichts nach.[172]
Al-Kaschi musste für seine astromischen Tabellen den Sinus von 1° genau berechnen. Er ging vom Sinus von 3° aus und benutzt die Gleichung $\sin 3\gamma = 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma$ zur Dreiteilung eines Winkels, welche er dann folgendermaßen umschrieb:

$$x^3 + \alpha = \beta x \text{ bzw. } x = \frac{\alpha + x^3}{\beta}.$$

In diese kubische Gleichung setzt er für $\alpha = \frac{1}{4}\sin 3°$ und $\beta = \frac{3}{4}$ ein. Mittels dieser Gleichung und seinem Verfahren konnte er durch

$$x_0 := \frac{\alpha}{\beta}, x_1 := \frac{\alpha + {x_0}^3}{\beta}, x_2 := \frac{\alpha + {x_1}^3}{\beta}, \dots, x_n := \frac{\alpha + {x_{n-1}}^3}{\beta}$$

den Sinus von 1° mit $0{,}017452406437283571$ angeben.[173,174]

---

[170] (H.-W. Alten 2014, 194,196)
[171] (Juschkewitsch und Rosenfeld 1960, 103ff.)
[172] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 96-97)
[173] (H.-W. Alten 2014, 200-201)
[174] (Juschkewitsch und Rosenfeld 1960, 122)

3.3 Geometrie

Am Anfang des 9. Jahrhundert waren die einflussreichsten Werke der griechischen Mathematiker (siehe Tabelle 6) übersetzt. Die Araber fassten die Werke zum Teil selbst zusammen und kommentierten diese, sodass für sie das griechische Wissen von Nutzen waren. Auch wenn sie viele Werke übersetzten, führten sie die griechische Geometrie nicht wirklich fort, da sie sich mehr auf Rechenverfahren konzentrierten.

Die folgende Tabelle gibt zu Beginn einen guten Überblick über die wichtigsten geometrischen Inhalte der Araber.

Tabelle 6: geometrische Inhalte dere Araber (C.J.Scriba 2010, 180)

8 – 10. Jh.	Übersetzung der griechischen, indischen und persischen Werke – davor kein eigenes mathematisches Arbeiten
Mitte 9. Jh.	Begann die eigenständige mathematische Entwicklung im Anschluss
Ab 9. Jh.	Geometrische Lösungen von kubischen Gleichungen
Ab 2. Hälfte des 9. Jh.	Banu Musa schrieben ein Buch über die Geometrie: Berechnung des Kreises, Oberfläche und Volumen von Körpern, Dreiteilung eines Winkels etc.; Buch über Kegelschnitte
Ab 2. Hälfte des 9. Jh.	Abu l-Wafa schrieb ein Werk für Handwerker über geometrische Konstruktionen; beschäftigte sich mit regelmäßigen und zwei halbregelmäßigen Körpern
Anfang 11. Jh.	Alhazen beschäftigt sich mit der geometrischen Optik und mit Gleichungen vierten Grades
Ab 9. Jh.	Viele Mathematiker beschäftigten sich mit dem Parallelenproblem
Ab 9. Jh.	Weiterentwicklung der Trigonometrie (Anlehnung an Griechen und Inder)
Vor 983	Al-Quhi konstruierte ein regelmäßiges Siebeneck
13. Jh.	Nasīr ad-Dīn at-Tūsī schrieb ein Werk über sphärische und ebene Trigonometrie
1424	Al-Kaschi berechnete von Pi die ersten 17 Nachkommastellen

Die Mūsā Brüder, welche andere Autoren beim Übersetzen der griechischen Werke förderten, entwickelten selbst einen Drang zur Wissenschaft. Sie schrieben unter anderem auch ein Buch über die Geometrie mit dem Titel: „Das Buch von der Berechnung ebener und sphärischer Figuren“. In den ersten Sätzen geht es um die

Kreisberechnung, wobei das Exhaustionsverfahren der Griechen nicht ganz korrekt angewendet wurde.

Exkurs Exhaustionsverfahren:
Das Verfahren der Exhaustion fand ihren Ursprung in der Antike und beruht möglicherweise auf dem Griechen Eudoxos von Knidos. Er entwickelte eine Methode, um den Inhalt von Flächen krummliniger Figuren und auch das Volumen von krummlinigen Körpern durch „Ausschöpfen“ mittels Quadraten, Dreiecken oder auch Würfeln immer genauer zu bestimmen. Auch bei der Kreiszahl π wurde versucht, einen Kreis durch n-Ecke immer weiter auszuschöpfen, um so immer näher an den genauen Wert der Kreiszahl zu kommen.[175]

In einem ihrer Sätze wird gezeigt, dass das Verhältnis des Durchmessers zum Kreisumfang konstant ist. Im darauffolgenden Satz wird, wie bei Archimedes schon, gezeigt, dass dieses Verhältnis eine Zahl zwischen $3\frac{10}{71} \approx 3{,}141 < \pi < 3\frac{1}{7} \approx 3{,}143$ ist. Sie beweisen auch die Heronsche Flächeninhaltsformel, jedoch auf einem anderen Weg als es Heron in seinem Werk „Metrika“ gemacht hat.[176]

Die Approximation der Kreiszahl Pi durch Umschreiben bzw. Einschreiben von regelmäßigen Polygonen taucht auch in Schulbüchern auf. Naheliegend und einfach zu berechnen ist es mit einem Quadrat, es wird aber auch mit Sechs- oder Achtecken begründet (siehe Abbildung 9). Dadurch wird die Idee skizziert, wie man Pi geometrisch approximieren kann. Im Schulbuch Mathematik verstehen 4 wird diese Idee auch näher beschrieben und bebildert, zudem wird erklärt, dass Archimedes ein 96-Eck wählte, aus Gründen der Nachvollziehbarkeit aber auch ein Sechs- oder Achteck gewählt werden kann.

[175] (Borys 2011, 172)
[176] (Juschkewitsch 1964, 270-271)

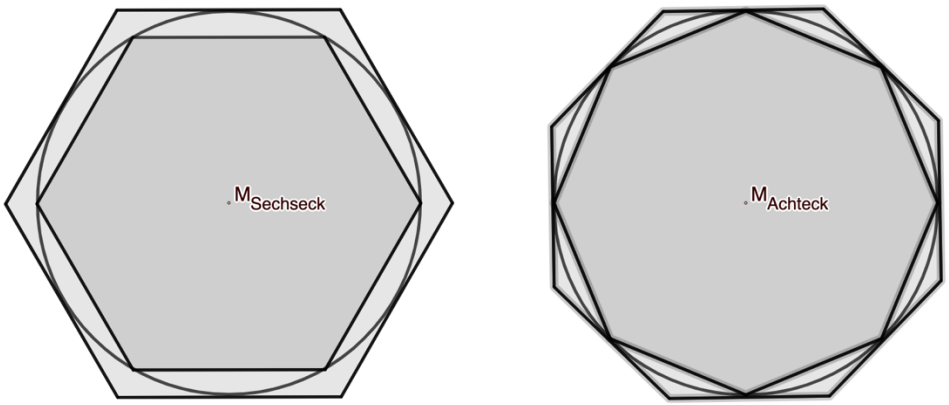


Abbildung 9: Approximation eines Sechs- und Achtecks nach (Malle, Koth, et al. 2020, 161,162)

Intuitiv ist klar, dass die Approximation von Pi besser wird, je mehr Ecken das Polygon besitzt. Somit ergibt sich hier auch ein Zusammenhang mit den Ideen der Analysis: Für sehr großes n entspricht das n-Eck bereits nahezu dem Kreis. Je größer n bei ein- und umgeschriebenen n-Ecken ist, desto besser wird die Approximation bzw. die Einschrankung von Pi. Die einzelne Seitenlänge des n-Ecks wird zudem immer kleiner. Am „Ende“ des Prozesses steht als Grenzwert Pi, der hier aber nicht erreicht wird, das Prozedere wird bei genügend großer Genauigkeit abgebrochen. Die Grundvorstellungen der Analysis kommen hier also auch bereits zum Tragen. Ein experimentelles Annähern (unter Anleitung) an die Zahl Pi steht mittlerweile bei den meisten Schulbüchern zu Beginn der Beschäftigung mit Kreisen.

Mit der Kreiszahl Pi befasste sich auch Al-Hwarizmi. Bei ihm wird deutlich, dass er sich auf die Griechen ($U = d \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right)$ und wahrscheinlich auch auf die Inder ($U = d \cdot \frac{62832}{20000}$) bezieht. Er berechnete den Wert von Pi mit 3,1416.[177] Des Weiteren kommt er der Regel von Heron zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises recht nahe.[178]

Al-Kaschi berechnete etwa 1450 mit der Vielecksmethode von Archimedes den Wert von Pi auf 14 Dezimalstellen genau. In anderen Werken ist auch von 16 Dezimalstellen die Rede. Dabei entscheidet er sich für einen Kreis mit einem Radius von 60 und ein $3 \cdot 2^{28} = 805\,306\,36$-seitiges Polygon. Durch geschicktes Rechnen fand er $2\pi = 6{,}283\,185\,307\,179\,586\,5$. Er war der erste Mensch, der bei Pi mehr als 10 Nachkommastellen berechnet hat. Knapp 150 Jahre später berechnete der deutsche

[177] (Delahaye 1999, 78)
[178] (C.J.Scriba 2010, 165)

Mathematiker Ludolph van Ceulen (* 1540, † 1610) Pi zuerst auf 20, dann sogar auf 32 Nachkommastellen. Wegen dieser Errungenschaft wird Pi gelegentlich Ludolphsche Zahl genannt.[179, 180]

Im Unterricht kann dieser Umstand durchaus thematisiert werden, weil damals ja ohne Taschenrechner oder Computer gerechnet wurde, sondern oftmals schlicht mit Zettel und Stift (Wachstafel bzw. im Sand oder im Staub etc.). Das bedeutet, dass eine größere Genauigkeit mit unglaublichem Rechenaufwand verbunden ist. Wenn, wie oben bereits beschrieben, im Unterricht beispielsweise Pi mit einem Quadrat und anschließend mit einem Sechseck eingeschrankt wird, kann der Rechenaufwand abgeschätzt werden, der bei einer Vielzahl an Ecken auftritt, geschweige denn bei einem 805 306 368-seitigem Polygon.

Ein Schüler der Gebrüder Mūsā, Thabit ibn Qurra, welcher auch zahlreiche griechische Werke (u.a. Archimedes Werk „Sphären und Zylinder“) übersetzte und kommentierte, beschäftigte sich zudem mit der Geometrie. Durch Summieren von eingeschriebenen Trapezen konnte er die Fläche eines Parabelsegments bestimmen. Archimedes nutzte diese Methode zum Beispiel für die Quadratur der Parabel. Nachdem Thabit ibn Qurras Rechnung gleichwertig mit der Bestimmung eines Integrals ist, war er es, der das inifinitesimale Verfahren von Archimedes zurückkehren ließ.[181]

Auch im schulischen Kontext werden krummlinig begrenzte Flächen berechnet. In der AHS ist dies in der letzten Schulstufe der Fall. Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler Ober- und Untersummen kennen und für sie ist es meistens naheliegend, dass bei einer größeren Anzahl von Rechtecken, die die Ober- oder Untersumme bilden, die Genauigkeit der Abschätzung der Fläche steigt. Oftmals kommt auch direkt von Seiten der Schülerinnen und Schüler die Idee, dass zur Steigerung der Genauigkeit auch Trapeze zur Berechnung der Fläche verwenden könnten. Häufig wird erst danach das Integral eingeführt, womit auch die geschichtliche Entwicklung der Integralrechnung nachvollzogen wird.

[179] (Delahaye 1999, 78)
[180] (C.J.Scriba 2010, 172-173)
[181] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 127)

Durch Drehen eines Parabelsegmentes entsteht ein Rotationskörper, bei diesem Thabit ibn Qurra das Volumen berechnen konnte.[182]

Dies wird in der Schule ebenso gehandhabt. Rotationskörper werden manchmal analog zur Flächenbestimmung mittels Ober- und Untersumme zunächst in mehrere Zylinder unterteilt. Alternativ können auch die Volumina von Kegelstümpfen bestimmt werden. Danach wird das Volumen meist exakt mittels Integralrechnung berechnet, in Anlehnung an Leibniz als unendliche Summe von unendlich dünnen Zylindern. Manchmal wird allerdings auf das Prozedere mittels Ober- und Untersumme hier verzichtet und gleich mit dem Integralbegriff gearbeitet.

3.3.1 Parallelenaxiom

Ein weiteres Problem, welches die Mathematiker über 2000 Jahre beschäftige, war das Parallelenaxiom bzw. das Parallelenpostulat von Euklid. Nicht nur die Griechen, sondern auch die arabischen Mathematiker haben kritisch über dieses Postulat nachgedacht.
In Euklids Elementen tritt folgendes Postulat mit der Nummer 5 auf:

> „…und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei rechte sind“ (Übersetzung von C.Thaer)[183]

Die Griechen kritisierten das Parallelenpostulat, bei welchem Euklid definiert, dass sich Geraden, wenn sie ins Unendliche verlängert werden, nicht schneiden. Poseidonios (*etwa 135 v. Chr., † 51 v. Chr.) hingegen würde Geraden, welche immer den gleichen Abstand zueinander haben, als äquidistant bezeichnen und Euklids „parallel“ eher für nicht schneiden verwenden.[184]
Thabit ibn Qurra, Alhazen (* 964, † 1040), Omar Chayyam und al-Tūsī legten die Grundsteine, welche dann später im 19. Jahrhundert zum Konstruieren

[182] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 127)
[183] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 155)
[184] (Gericke 1992, 204ff.)

nichteuklidischer Geometrien führte, da sie die Verknüpfung der Winkelsummen in Drei- und Vierecken und dem Parallelenpostulat feststellten. Thabit ibn Qurra und Alhazen formulierten folgenden Satz: „Wenn zwei Geraden auf einer dritten senkrecht stehen, bliebt ihr Abstand konstant“. Omar Chayyam sagt dazu, dass dieser Satz ein Axiom ist, welcher jeder wissenschaftlich denkende Mensch annehmen wird.[185, 186]

Im schulischen Kontext liegt der Fokus klar auf der euklidischen Geometrie. Das Zeigen auch Aussagen von Schülerinnen und Schülern wie „Im Dreieck ist die Winkelsumme immer 180°“. In der Ebene ist die Aussage korrekt und spiegelt den Erfahrungshorizont der Schülerinnen und Schüler wider. In der nichteuklidischen Geometrie stimmt diese Aussage jedoch nicht: Hier kann aber auf eine Kugel (oder auf einer Orange, einem Apfel) verwiesen werden, auf der drei Punkte eingezeichnet werden. Diese Punkte werden dann auf der Kugeloberfläche zu einem Dreieck verbunden, wobei die Verbindung zwischen zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche die kürzeste Entfernung zwischen diesen Punkten ist und die Oberfläche dabei nicht verlassen wird. Schülerinnen und Schüler erkennen meist selbst, dass die Winkelsumme jetzt nun nicht 180° betragen muss.

3.3.2 Verallgemeinerung des Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras, der schon in der vorgriechischen Zeit bekannt war, wurde nochmal von Thabit ibn Qurra aufgegriffen. Er verfasst die Verallgemeinerung dieses Satzes folgendermaßen:[187, 188, 189]

In einem schiefwinkligen Dreieck ABC werden zwei weitere Punkte D und E so auf der Strecke AB ergänzt, dass die beiden neu entstandenen Dreiecke ADC und EBC zum ursprünglichen Dreieck ABC ähnlich sind (siehe Abbildung 10). Demnach stimmen die Dreiecke in jeweils zwei Winkeln überein und aus den Ähnlichkeiten ergeben sich nachfolgende Verhältnisse:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|} \quad \text{und} \quad \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|EB|}{|BC|}$$

[185] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 127, 155ff)
[186] (Juschkewitsch 1964, 277ff.)
[187] (Herrmann 2016, 209,210)
[188] (Strick 2017, 328-329)
[189] (H. Kaiser 1984, 128)

Durch Umformen ergibt sich dann: $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$ und $|BC|^2 = |AB| \cdot |EB|$
Aus der Addition der beiden Gleichungen folgt der Satz von Thabit ibn Qurra:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB| \cdot (|AD| + |EB|)$$

Wäre der Winkel in C ein rechter Winkel, dann würden die Punkte D und E zusammenfallen und es würde der gebräuchliche Satz des Pythagoras entstehen:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

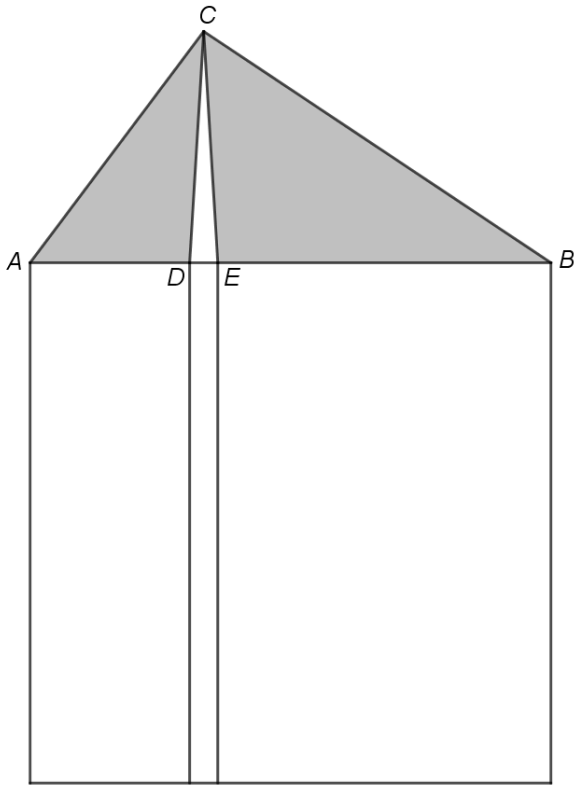


Abbildung 10: Skizze Verallgemeinerung Satz des Pythagoras nach (Strick 2017, 349)

Ein möglicher Anknüpfungspunkt in der Schule bildet der Höhensatz, der in der Unterstufe behandelt wird. Der Beweis des Höhensatzes kann analog über ähnliche Dreiecke erfolgen. Darauf aufbauend kann die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras bewiesen werden.

3.3.3 Konstruktion eines Siebenecks

Wie in der obigen Tabelle 6 zu erkennen ist, konnten ab dem 9. Jh. kubische Gleichungen geometrisch gelöst werden. Al-Quhi (* 940, † 1000) löst beim Konstruieren eines Siebenecks implizit eine kubische Gleichung, erwähnt aber nicht die algebraische Bedeutung. Diese Problematik tritt zudem noch bei der Winkeldreiteilung und bei der Würfelverdopplung auf.[190]

Im Folgenden soll die Konstruktion eines Siebenecks nach Al-Quhi näher erläutert werden.[191]

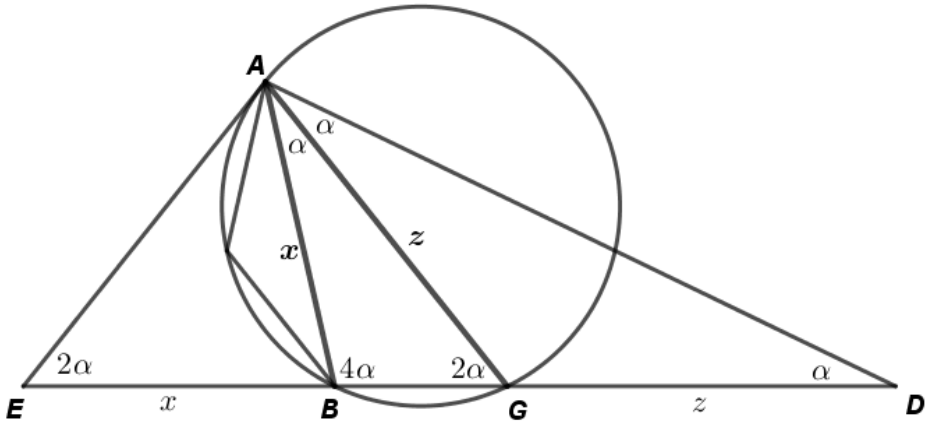


Abbildung 11: Skizze für Konstruktion eines Siebenecks nach (Gericke 1992, 201)

Das Ziel seiner Konstruktion ist, zu der Seitenlänge des Siebenecks den passenden Radius des einschließenden Kreises zu finden. Dafür sucht er das Dreieck, welches in der Abbildung 11 mit den Eckpunkten ABG beschriftet ist. Durch die Seitensymmetralen des Dreiecks kann der Umkreismittelpunkt ermittelt werden und der Kreis kann konstruiert werden. Um das Dreieck genau bestimmen zu können, müssen noch die beiden restlichen Seiten (x und z) hergeleitet werden, wofür der folgende Prozess notwendig ist.

Zur Lösung werden einige Hilfskonstrukte gebildet. Wenn davon ausgegangen wird, dass das Problem schon behoben ist, dann gäbe es einen Kreis, der das Siebeneck einschließt. Die Sehne (BG), welche von Anfang gegeben ist, wird mit s betitelt. Nun

[190] (Gericke 1992, 199ff.)
[191] (Gericke 1992, 200,201)

wird die Seite s verlängert, sodass sie auf beiden Seiten neue Dreiecke (in Abbildung 11 rechts ΔAGD und links ΔAEB) bildet. Dabei ist wichtig, dass es sich um gleichschenklige Dreiecke handelt, wobei die Schenkel die Länge x bzw. z haben. Die Winkel von jeweils zwei Dreiecken (ΔABG und ΔABD bzw. ΔAEG und ΔAEB) sind gleich groß, weshalb die Seiten auch im gleichen Verhältnis zueinanderstehen. Aus dieser Äquivalenz ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$BD : AB = AB : BG$ wird umgeformt zu $AB^2 = BD \cdot BG,$

oder anders beschriftet $x^2 = s \cdot (s + z)$

$EG : AE = AE : EB$ wird umgeformt zu $AE^2 = EG \cdot EB,$

oder anders beschriftet $z^2 = x \cdot (x + s)$

Jede dieser Gleichungen konnte von Al-Quhi als Parabel bzw. als Hyperbel konstruiert werden. Der Schnittpunkt dieser zwei Kurven ergab dann die Lösung für x und z.

Anschließend kann das ΔABG mit den Seiten s, x und z erstellt werden, wodurch der einschließende Kreis definiert wird. Zum Schluss kann die Länge s entlang des Kreises mit dem Zirkel abgeschlagen werden und das Siebeneck ist komplett.

Wird $s = 1$ angenommen, dann ergibt sich algebraisch für die Gleichungen:

$$x^2 = 1 + z \quad \text{und} \quad z^2 = x \cdot (x + 1)$$

Durch das Einsetzverfahren ($z = x^2 - 1$) wird aus der zweiten Gleichung

$$(x^2 - 1)^2 = \big((x + 1) \cdot (x - 1)\big)^2 = x \cdot (x + 1)$$

Dies ist eine Gleichung 4. Grades mit einer Lösung $x = -1$. Da diese Lösung geometrisch nicht möglich ist, kann durch $x + 1$ dividiert werden, sodass eine kubische Gleichung entsteht:

$$x = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)$$

3.3.4 Verdreifachung einer Quadratfläche

Abu l-Wafa, ein arabischer Mathematiker, schrieb ein Buch mit dem Titel „Teil der Geometrie, die ein Handwerker kennen muss“, welches von Konstruktionen regulärer

Vielecke bis zum Zehneck handelt. Alle Polygone, außer dem Sieben- und Neuneck, können mit Lineal und fester Zirkelöffnung erstellt werden. Ein anderer Teil des Buches besteht aus geometrischen Mustern, welche Handwerker beim Erstellen von Mosaiken brauchen.

Bei der Verdreifachung einer Quadratfläche findet Abu l-Wafa eine geschickte Lösung. Er nimmt sich drei Quadrate und zerlegt zwei von ihnen, indem er sie längs der Diagonale halbiert. Im Anschluss werden die vier deckungsgleichen Dreiecke an das nicht halbierte Quadrat ABCD, wie in Abbildung 12, gelegt. Werden die Ecken GHKL miteinander verbunden, entsteht ein Quadrat, welches dreimal so groß ist, wie das ursprüngliche Quadrat ABCD. Die kleinen Dreiecke, welche außerhalb des Quadrates GHKL liegen, sind den fehlenden Dreiecken innerhalb dieses Quadrates flächengleich.[192][193]

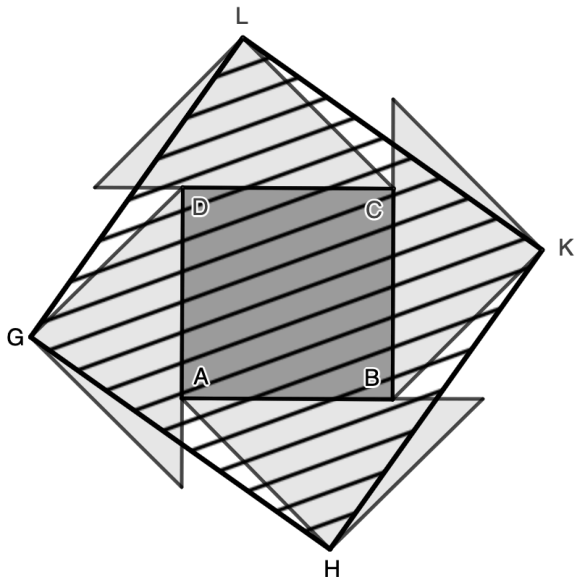


Abbildung 12: Verdreifachung eines Quadrates nach (Herrmann 2016, 180)

Im schulischen Kontext könnte dies beispielsweise wie folgt eingebaut werden: Ein Quadrat habe die Seitenlänge a, somit beträgt sein Flächeninhalt a^2 Flächeneinheiten. Gesucht ist nun die Seitenlänge eines Quadrates, das einen dreimal so großen Flächeninhalt aufweist, also $3a^2$. Die Seitenlänge muss somit $\sqrt{3} \cdot a$ betragen. Das sollte für Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar sein. Dass man diese Aufgabe aber auch geometrisch lösen kann, ist dabei sicher eine neue Erfahrung. Diese

[192] (Peiffer und Dahan-Dalmedico 1994, 128)
[193] (Herrmann 2016, 180)

Möglichkeit ist elegant und auf Baustellen praktikabel, wenn wie beschrieben Mosaike erstellt werden sollten. Aufgaben müssen nicht immer nur algebraisch gelöst werden, sondern können eben auch geometrisch gedeutet und gelöst werden. In weiterer Folge gibt es auch Beweise, die auf geometrischen Überlegungen fußen.

3.4 Trigonometrie

Schon im Papyrus Rhind (Ägypten), etwa 2000 Jahre v. Chr., wurde schon eine Größe verwendet, die dem Kosinus bzw. dem Kotangens ähnlich ist. Parallel dazu beschäftigten sich die Babylonier mit der Astronomie. Die Griechen griffen einige Quellen der Babylonier und der Ägypter auf und machten erwähnenswerte Fortschritte auf diesem Gebiet. Auch die Inder erzielten bemerkenswerte Erkenntnisse. Ob ihre Quellen aber von den Babyloniern oder von den Griechen herstammen, ist nicht genau bekannt. [194]

Die Trigonometrie wurde von den Araber weiterentwickelt, da diese vor allem für die Astronomen und auch hinsichtlich religiöser Hintergründe, von großer Wichtigkeit war.[195] Vor allem sind hier al-Battani (* zwischen 850 und 869, † 929), Nasīr ad-Dīn at-Tūsī und Abu l-Wafa zu nennen, wenn es um die Systematisierung der heutigen Trigonometrie geht. Sie haben bedeutend dazu beigetragen, dass sich dieses mathematische Teilgebiet weiterentwickelt hat und so dann im 14. und 15. Jahrhundert von den europäischen Astronomen wieder aufgenommen wurde, um darauf aufzubauen.[196]

3.4.1 Einführung der sechs trigonometrischen Funktionen

Zwischen dem 8. und 15. Jahrhundert entstanden sehr viele trigonometrische Tafeln, wobei mehr als 100 unterschiedliche Tafeln erhalten geblieben sind. Diese Tafeln mit Tabellen wurden von den Geografen, aber vor allem von den Astronomen benutzt.[197]

[194] (D. J. Tropfke 1923, 1-6)
[195] (Wußing 2008, 258)
[196] (Djksterhuis 1983, 308)
[197] (Juschkewitsch 1964, 308)

Er fing mit dem Übersetzen der indischen „Siddhanta“ an. Sinus wurde mit dem indischen Wort „giwa“ beschrieben und die Araber übersetzen „giwa“ mit „gaib“. Übersetzt heißt es so viel, wie Halsausschnitt eines Busens oder Kleides. Die Europäer übersetzten das Wort mit „Sinus“, welches die Bedeutung des Halsausschnittes behalten hat.[198]

Den Anfang machte al-Hwarizmi. Er verfasste eine Sinustafel mit sämtlichen Erläuterungen. Dann wurde die griechische Sehnentrigonometrie durch die Sinustrigonometrie ins Abseits gebracht. Zu den von den Indern benutzten Funktionen Sinus und Cosinus wurden vier weitere Funktionen hinzugefügt. Um den Schatten der Sonnenuhr zur ermitteln, verwendeten sie den Tangens als Schattenlänge eines an der Wand angebrachten Stabes mit festgesetzter Länge (Abbildung 14) und den Cotangens als Schatten des Schattenzeigers, welcher sich auf einem horizontalen Boden befindet (Abbildung 13).

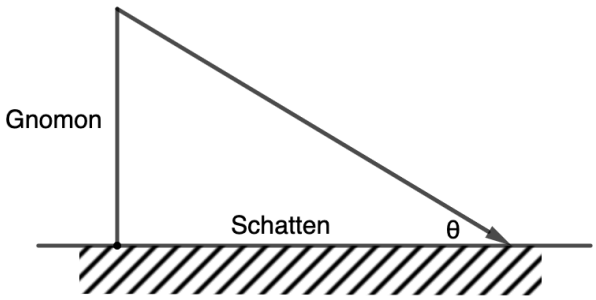


Abbildung 13: Schatten entspricht Tangente (Berggren 1986, 148)

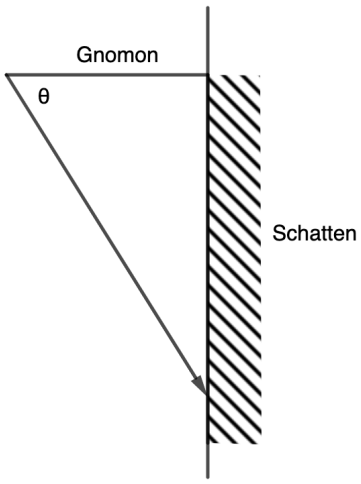


Abbildung 14: Schatten entspricht Kotangente nach (Berggren 1986, 148)

[198] (Juschkewitsch und Rosenfeld 1960, 152)

Ende des 10. Jahrhunderts konnte der Kreisradius als Einheitslänge definiert werden und somit konnten die trigonometrischen Funktionen auch als Streckenverhältnis angegeben werden. Um das Verhältnis zwischen Hypotenuse und der anliegenden bzw. gegenüberliegenden Seite in einem Dreieck anzugeben, wurde Sekans und Kosekans eingeführt.[199, 200]

3.4.2 Beweis des Sinussatzes

Nasīr ad-Dīn at-Tūsī war einer der bedeutendsten arabischen Mathematiker im Bereich der Trigonometrie. Er versuchte auf alle ebenen Dreiecke den Sinussatz anzuwenden.

Im Folgenden wird der Beweis des Sinussatzes nach Nasīr ad-Dīn at-Tūsī erklärt.[201]

Ziel ist es, Dreiecke mit gleichen Winkeln zu konstruieren, deren Seiten die Länge des $sin\ \alpha$ und der betroffenen Seite haben. So können der Wert des Sinus und die Seite zueinander in Relation gesetzt werden.

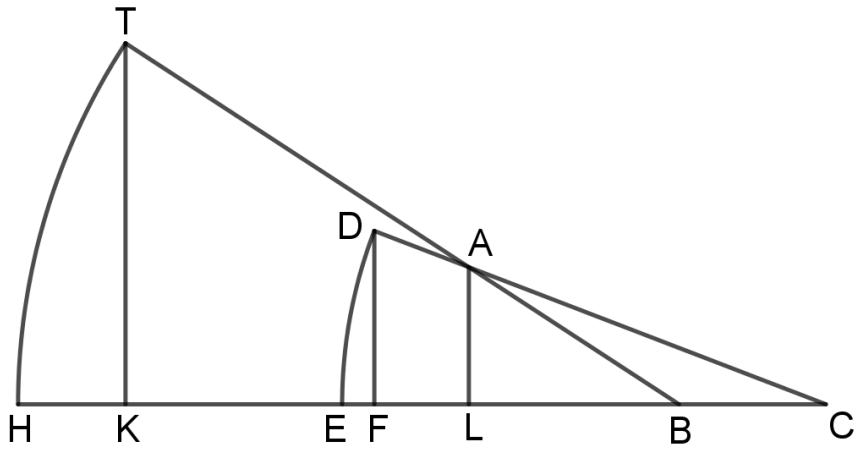


Abbildung 15: Skizze zum Beweis des Sinussatzes nach (Berggren 1986, 154)

Zu Beginn werden die Strecken AC und AB auf 60 Einheiten verlängert (60 Einheiten war der Radius des von at-Tūsī verwendeten „Einheitskreises“. Heute würde auf die Länge 1 verlängert werden.) Nun werden die Lote von T, D und A auf die von BC

[199] (C.J.Scriba 2010, 176)
[200] (Berggren 1986, 149,150)
[201] (Berggren 1986, 153,154)

verlängerte Seite gezogen, wodurch die Punkte K, F und L entstehen. Es gilt somit, dass TK $= \sin B$ und DF $= \sin C$. Wie gewünscht sind die Dreiecke ALB und TKB, sowie die Dreiecke ALC und DFC winkelgleich. Somit ergeben sich folgende Verhältnisse:

$$\frac{AB}{AL} = \frac{TB}{TK} \quad \text{und} \quad \frac{AL}{AC} = \frac{DF}{DC}$$

Werden die Seiten jeweils miteinander multipliziert, entsteht nachfolgende Gleichung:

$$\frac{AB \cdot AL}{AL \cdot AC} = \frac{TB \cdot DF}{TK \cdot DC}$$

Die Längen von DC und TB sind durch unsere Konstruktion = 60 (bzw. = 1), wodurch durch Kürzen das Endprodukt entsteht:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DF}{TK}, \text{ daher gilt: } \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$$

Heutzutage in der Schule wird dieser Satz oft in der Form $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ dargestellt.

3.5 Zahlentheorie

Die arabischen Mathematiker haben sich auch mit der Zahlentheorie auseinandergesetzt. Auch in diesem Teilgebiet der Mathematik wurden die Ergebnisse der Inder und Griechen übersetzt, kommentiert und überarbeitet. Es wurden aber auch neue Erkenntnisse gewonnen.

Al-Samawal, ein Schüler von al-Karagi gab an, dass in einem verschollenen Werk al-Karagis erstmalig ein arithmetisches Dreieck, welches heute unter dem Namen „Pascalsche Dreieck“ bekannt ist, beschrieben worden ist. Er hat in diesem Werk die Binomialkoefizienten bis zum 12. Exponenten angegeben.[202, 203]

[202] (Wußing 2008, 246)
[203] (H.-W. Alten 2014, 182)

Das Pascalsche Dreieck wird auch im Schulunterricht gelehrt, es kommt dabei in der Oberstufe vor. Spannend ist hierbei, dass dieses Dreieck nach Pascal benannt worden ist und nicht nach As-Samawál. Es könnte zumindest im Schulbuch erwähnt werden, dass schon Mathematiker vor Blaise Pascal Kenntnisse über dieses arithmetische Dreieck hatten.

Alhazen beschäftigte sich mit vollkommenen Zahlen. Er führte den Beweis vom Satz von Euklid von geraden vollkommenen Zahlen durch partielle Umkehrung an. Alhazen stellte anscheinend auch als Erster die Behauptung auf, dass gerade vollkommene Zahlen die Form $2^{k-1}(2^k - 1)$ haben, wobei k eine Primzahl ist. Um Kongruenzaufgaben zu lösen, verwendete er damals schon einen Satz, der heute nach John Wilson (*1741, † 1793) benannt ist, welcher besagt, dass eine natürliche Zahl $p \geq 2$ genau dann eine Primzahl ist, wenn $(p-1)! + 1$ durch p teilbar ist.[204]

3.5.1 Befreundete Zahlen

Thabit ibn Qurra, der schon mehrfach in dieser Arbeit genannt wurde, hat sich auch mit der Zahlentheorie, insbesondere mit den befreundeten Zahlen, auseinandergesetzt.
Er war aber auch von den abundanten, defizienten und vollkommenden Zahlen beeindruckt. Letztere sind solche Zahlen, die mit sich selbst befreundet sind. Das heißt, die Summe der Teiler der Zahl (außer der Zahl selbst), ergibt wieder die Zahl, wie an folgenden Beispielen zu erkennen ist:[205]

- Die Zahl 6 hat drei (vier) Teiler: 1, 2, 3, (6) d.h. $1 + 2 + 3 = 6$
- Die Zahl 28 hat fünf (sechs) Teiler: 1, 2, 4, 7, 14, (28) d.h. $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

Laut Definition sind zwei natürliche Zahlen befreundet, wenn jeweils die Summe der echten Teiler der einen Zahl die andere ergibt.[206]
Folgendes Beispiel mit dem kleinsten befreundeten Zahlen soll dies verdeutlichen:

- $T\ (220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$
- $T\ (284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

[204] (Brückler 2017, 145)
[205] (Naini 1982, 51)
[206] (Schiedermeier und Köhler 2011, 59)

Die Eins wird in anderen Definitionen als unechter oder auch trivialer Teiler bezeichnet. Daher deckt sich die oben genannte Definition nicht mit anderen Definitionen.[207, 208]

Anscheinend war Pythagoras der erste, der sich mit befreundeten Zahlen auseinandergesetzt hat und das kleinste Zahlenpaar 220 und 284 gefunden haben soll. Da sind sich die Quellen jedoch nicht einig. Es könnte auch der Grieche Iamblichos von Chalkis gewesen sein, der es Pythagoras zuschrieb.[209, 210]

Thabit ibn Qurra stellt mit Hilfe der euklidischen Formel einen Satz über befreundete Zahlen auf:

> „*Sei n > 1 eine natürliche Zahl. Wenn die Zahlen* $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, q = 3 \cdot 2^n - 1$ *und* $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ *Primzahlen sind*, dann sind die Zahlen $2^n \cdot pq$ und $2^n r$ *befreundet.“* [211]

Wenn für $n = 2$ eingesetzt wird, dann ergibt sich für $p = 1, q = 11$ und $r = 71$ das Zahlenpaar 220 und 284, welches schon vorher bekannt war. Ein weiteres Zahlenpaar resultiert aus $n = 4$ (17296, 18416), wobei $p = 23, q = 47$ und $r = 1151$ ist. Auch hier sind sich die Quellen wieder nicht einig, ob Thabit ibn Qurra, Ibn al-Banna (* 1256, †1321) oder Kamal al-Fārisī (* 1265, † 1318) dieses befreundete Zahlenpaar entdeckt haben.[212, 213] Muhammad Baqir Yazdi (* zweite Hälfte des 16. Jh., † 1637), ein iranischer Mathematiker, hat ein weiteres Zahlenpaar (9363584 und 9437056) für $n = 7$ gefunden. Euler verallgemeinerte Thabit ibn Qurras Satz und berechnete 62 weitere befreundete Zahlenpaare. Bis heute wurden über eine Milliarde befreundete Zahlenpaare entdeckt.[214]

Vollkommene Zahlen sind im schulischen Kontext grundsätzlich nicht vorgesehen. Jedoch könnten sie am Anfang der zweiten Klasse beim Thema „Teilbarkeit“ mit

---

[207] (Fritzsche 2007, 76)
[208] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 20)
[209] (Naini 1982, 51)
[210] (Brückler 2017, 144)
[211] (Brückler 2017, 144)
[212] (Strick 2020, 282)
[213] (Brückler 2017, 144)
[214] (George 2010, 474)

eingebracht werden. Es ist ein Fakt, der schnell erklärt ist und sich somit gut als Zusatzinformation für die Schülerinnen und Schüler eignet.
Befreundete Zahlen gehen auch über den Schulstoff hinaus, eine Beschäftigung mit diesen kann aber in einem etwaigen Wahlpflichtfach oder in Stunden zu Schulende oder etwa vor Ferien erfolgen.

3.5.2 Magische Quadrate

Magische Quadrate beschäftigen schon sehr lange die Menschheit. Das älteste magische Drei-mal-drei-Quadrat war in China etwa 2200 v. Chr. auf dem Panzer einer Schildkröte zu finden (siehe Abbildung 16).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Abbildung 16: Älteste bekannte magische Quadrat nach (Herrmann 2016, 11)

Es ist somit nicht außergewöhnlich, dass sich auch die arabischen Mathematiker mit magischen Quadraten auseinandergesetzt haben. Das sogenannte Neunzellenquadrat (3x3-Quadrat) trat zum ersten Mal in der Abhandlung von Dschābir ibn Hayyān (* 721, † 815) auf. In diesem Quadrat werden die Zahlen von eins bis neun so eingesetzt, dass in jeder Spalte und jeder Zeile, aber auch in der Diagonale die Summe von 15 herauskommt.[215]

Der erste arabische Mathematiker, der Quadrate beliebiger Ordnung erstellte, war Ahmad al-Buni († 1225). In seinem Werk kommen drei verschiedene Arten (gerade-gerade; gerade-ungerade; ungerade-ungerade) von magischen Quadraten vor. Sein Hauptaugenmerk galt dabei der Diagonalmethode bei Quadraten der Ordnung 4n.[216]

[215] (Priesner 2011, 48,49)
[216] (Naini 1982, 36-37)

Trotzdem wird diese Errungenschaft Manuel Moschopoulos zugeordnet, was wahrscheinlich falsch ist.[217, 218]

In der Diagonalmethode wird zunächst ein Vier-mal-vier-Quadrat mit natürlichen Zahlen von links oben nach rechts unten der Reihe nach befüllt (siehe nachfolgende Abbildung 17).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Abbildung 17: Vier-mal-vier-Originalquadrat mit natürlichen Zahlen

Dann werden die Felder der Diagonale mit einem Punkt versehen (siehe nachfolgende Abbildung 18):

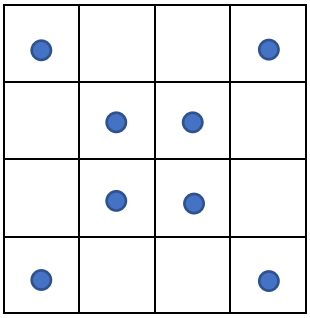


Abbildung 18: Punktierte Diagonalfelder

In der Abbildung 19 wird der Hauptschritt nachvollzogen. In den Feldern, wo ein Punkt ist, wird die passende Zahl aus dem Originalquadrat eingesetzt. Die fehlenden Felder werden wie folgt befüllt: Nachdem es sich um ein Vier-mal-vier-Quadrat handelt, ist also $n = 4$. In jedes leere Feld kommt nun die zu $n^2 + 1$ passende Komplementärzahl, um eben auf $n^2 + 1 = 4^2 + 1 = 17$ zu kommen. So wird beispielsweise in das zweite

[217] (Herrmann 2016, 13)
[218] (Naini 1982, 37)

Feld 15 eingetragen, weil das die Komplementärzahl zu 17 ist. In das dritte Feld wird dementsprechend 14 eingetragen, in das fünfte Feld 12 etc.

Die Zeilen- bzw. Spaltensumme beträgt in diesem Fall immer 34.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Abbildung 19: Fertiges Vier-mal-vier-Quadrat mit der Diagonalmethode

Magische Quadrate sind schwierig in den schulischen Kontext einzubetten. Beeindruckend sind mit Sicherheit die Eigenschaften wie die Symmetrie. Das kann als Anknüpfungspunkt für die Schule dienen.

Berühmt ist das magische Quadrat (siehe Abbildung 20), das in einem Kupferstich von Albrecht Dürer vorkommt. Somit kann es sein, dass dieses magische Quadrat im Fach Bildnerische Erziehung behandelt wird. In Absprache mit der Lehrkraft dieses Faches kann somit ein fächerübergreifender Unterricht durchgeführt werden. Die Frage ist allerdings, inwiefern sich die Beschäftigung mit magischen Quadraten zeitlich ausgeht, zudem ist dies auch im Lehrplan nicht abgebildet. Erfahrungsgemäß ist es aber ohnedies nicht leicht, den Schulstoff laut Lehrplan zu erfüllen, somit werden zusätzliche Stoffgebiete nur schwer zu integrieren sein. Ein weiteres berühmtes Beispiel für ein magisches Quadrat ist jenes an der Fassade der Sagrada Familia in Barcelona (Abbildung 21). Auch hier könnten sich Anknüpfungspunkte ergeben. Zudem kann man die beiden Quadrate vergleichen.

Natürlich könnte dieses Thema auch wieder als Abschlussstunde vor Ferien behandelt werden. Dafür gibt es schon diverse Vorlagen für die unterschiedlichsten Altersgruppen im Internet zu finden.

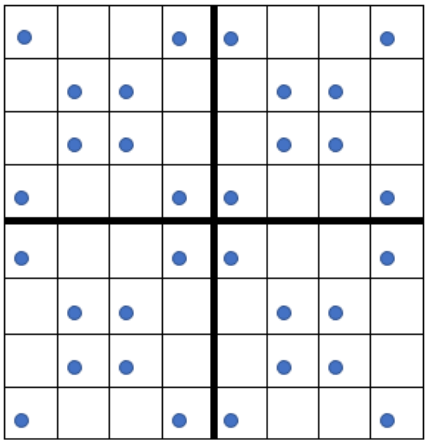
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Abbildung 20: Magischen Quadrat von Albrecht Dürer nach (Velminski 2009, 161)

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Abbildung 21: Magisches Quadrat an der Sagrada Familia

Die Diagonalmethode kann auch für Quadrate höherer Ordnung (wie z.B. Abbildung 22) hergestellt werden, jedoch wird das Quadrat zunächst in Sechzehnzellenquadrate zerlegt und dann wird wieder das Verfahren, welches gerade beschrieben wurde, angewendet.[219]



1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Abbildung 22: Beispiel der Diagonalmethode an einem 8x8-Quadrat

[219] (Naini 1982, 37-38)

Im Anschluss wird ein weiteres magisches Quadrat mit der ungeraden Ordnung $n = 2k + 1$ erklärt. Dieses konzentrische magische Quadrat ist arabischer Herkunft, jedoch anscheinend nicht von seinem Herausgeber al-Buni.[220]

Als Beispiel dient ein 7x7-Quadrat.

Im ersten Schritt werden die ersten $n - 2$ Zahlen (somit die Zahlen 1 bis 5) der Reihenfolge nach von links nach rechts, in den äußersten Spalten, im Zick-Zack-Muster aufgeschrieben. Angefangen wird links über der untersten Ecke.

5						
						4
3						
						2
1						

Abbildung 23: 1. Schritt 7x7 Quadrat

Im zweiten Schritt werden die nächsten $n - 1$ Zahlen (somit 6 bis 11) eingetragen. Dieses Mal wird ganz rechts unten angefangen und springt von unten nach oben im Zick-Zack hin und her.

	11		9		7	
5						
						4
3						
						2
1						
		10		8		6

Abbildung 24: 2. Schritt 7x7-Quadrat

Im dritten Schritt werden die freien Felder mit der Komplementärzahl zu $n^2 + 1$ (z.B. 1 gegenüber zu 49; 2 gegenüber zu 48…) aufgefüllt. Man beginnt also dabei in derselben Zeile, wo man die Zahl 1 stehen hat, und füllt gegenüber dazu die Komplementärzahl ein. Die linke untere und die rechte obere Ecke bleiben jedoch frei, da wir ohne Komplemente nur $2n - 3$ (11), also mit Komplementen 22 Felder von 24 ausgefüllt haben.

44	11	40	9	42	7	
5						45
46						4
3						47
48						2
1						49
	39	10	41	8	43	6

Abbildung 25: 3. Schritt 7x7-Quadrat

[220] (Danielsson 2021, 692)

Jetzt muss das nächstinnere Quadrat nach den drei oberen Schritten ausgefüllt werden. Es wird mit 12 bis 18 (Komplemente 38 bis 32) fortgesetzt und da wir wieder nur $(2n-3)\cdot 2$ (eines 5x5-Quadrates in diesem Fall) Felder ausgefüllt haben, bleiben wieder die zwei Felder rechts oben und links unten übrig.

44	11	40	9	42	7	
5	34	18	33	16		45
46	14				36	4
3	37				13	47
48	12				38	2
1		32	17	34	15	49
	39	10	41	8	43	6

Abbildung 26: 4. Schritt 7x7-Quadrat

Das letzte Quadrat muss wieder nach den drei Schritten ausgefüllt werden. Da es nur ein 3x3-Quadrat ist, werden nur mehr die Zahlen 19 bis 21 und ihren Komplementen 31 bis 29 eingetragen. Die freie Diagonale wird im letzten Schritt mit den noch nicht benutzten Zahlen (in diesem Fall 22 bis 28) ausgefüllt und das konzentrische magische Quadrat ist fertig. Die Zeilen- und Spaltensumme bzw. die Diagonalsumme beträgt 175.

44	11	40	9	42	7	22
5	35	18	33	16	23	45
46	14	30	21	24	36	4
3	37	19	25	31	13	47
48	12	26	29	20	38	2
1	27	32	17	34	15	49
28	39	10	41	8	43	6

Abbildung 27: 5. Schritt 7x7-Quadrat

Dieses Verfahren kann mit allen ungeraden Quadraten durch die oben genannten Schritte durchgeführt werden.[221]

Ein weiterer Araber, der sich mit magischen Quadraten spielte, war Alhazen, der ein magisches Quadrat der fünften Ordnung entwickelte.[222]

In diesem bemerkenswerten Fünf-mal-fünf-Quadrat werden die Zahlen von 1 bis 25 der Reihenfolge nach hineingeschrieben (siehe Abbildung 28). Von den Seitenmitten aus wird ein neues Fünfundzwanzigzellenquadrat gebildet. Die Zahlen, die sich direkt in den neuen Kästchen befinden, bleiben stehen. Die leeren Kästchen werden durch die außenstehenden Zahlen aufgefüllt. Dabei rutschen die Zahlen diagonal von der

[221] (Danielsson 2021, 693)
[222] (Herrmann 2016, 13)

oberen Hälfte in die untere und umgekehrt. Alle Summen der Diagonalen und auch der mittleren Zeile des neuen Quadrates (links in der Abbildung 28) ergeben 65.

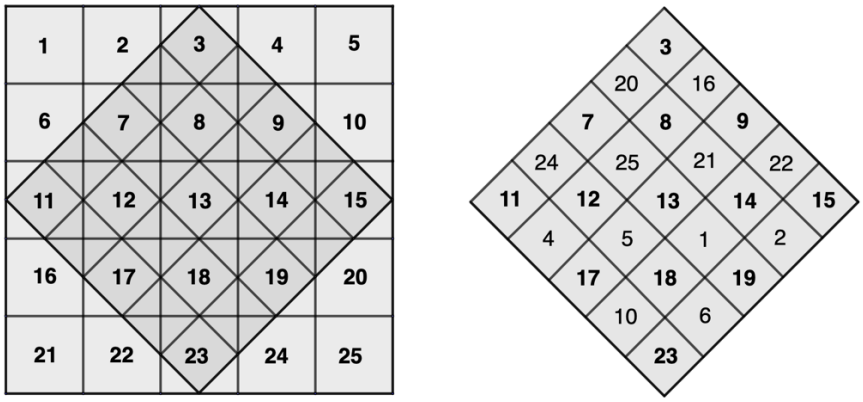


Abbildung 28: Magisches Quadrat nach Alhazen (Herrmann 2016, 189)

Ein weiterer arabischer Mathematiker beschäftigte sich mit der Zahlentheorie, vor allem mit magischen Quadraten. Al-Husain ibn Sīnā (* 980, † 1037) schrieb ein Buch der Heilung, in dem auch ein arithmetischer Teil vorkommt. Er geht dabei auf die indischen und griechischen Quellen über Zahlentypen ein.

In einem Fünf-mal-fünf-Quadrat werden die ersten 25 ungeraden Zahlen der Reihe nach aufgeschrieben. Werden jeweils die fünf Zahlen der Diagonale addiert, ergibt das immer 125 und ist gleich der dritten Potenz der Seite (5^3).

9	7	5	3	1
19	17	15	13	11
29	27	25	23	21
39	37	35	33	31
49	47	45	43	41

Abbildung 29: Quadrat mit ungeraden Zahlen (George 2010, 472)

$$1 + 13 + 25 + 37 + 49 = 9 + 17 + 25 + 33 + 41 = 125 = 5^3$$

Die Gesamtsumme aller im Quadrat befindlichen ergibt 625, welches die vierte Potenz der Seite 5^4 ist.

Ibn Sina hat noch ein Dreieck mit ungeraden Zahlen dargestellt. In der Abbildung 30 ist sehr einfach festzustellen, dass sie Summe der Reihen gleich der Kubikzahl der Reihenanzahl ist.[223]

1
5 3
11 9 7
19 17 15 13
29 27 25 23 21

Abbildung 30: Dreieck mit ungeraden Zahlen (George 2010, 473)

1. Reihe $1 = 1^3$
2. Reihe $5 + 3 = 8 = 2^3$
3. Reihe $11 + 9 + 7 = 27 = 3^3$
4. Reihe $19 + 17 + 15 + 13 = 64 = 4^3$

3.5.3 Neunerprobe

Um Rechenfehler zu finden und um das Ergebnis zu kontrollieren, wurden ein paar Rechentricks erfunden, unter anderem die Neunerprobe. Wer die Neunerprobe als Erstes entdeckt hat, ist nicht ganz geklärt. Zum einen war sie den Indern bekannt, aber auch al-Hwarizmi arbeitet nachweislich mit ihr.[224] Die Beschreibung der Neunerprobe durch Gebrauchen der Quersumme erschien auch etwa zur gleichen Zeit bei al-Karagi und dem Inder Aryabhata II im 10./11. Jahrhundert. [225]

Jede Zahl, die durch 9 dividiert wird, erhält einen Rest, der genauso so groß ist wie der Rest bei Division der Quersumme durch 9. Dies bedeutet, dass der Restbetrag einer Division durch 9 viel schneller durch Bildung der Quersumme ermittelt werden kann als durch die Division selbst. Auf dieser Neunerrestbestimmung baut die Neunerprobe auf.

[223] (George 2010, 472-473)
[224] (Wußing 1989, 67)
[225] (Tropfke 1980, 166)

Am folgenden Beispiel $491 \cdot 295 = 144845$ soll die Neunerprobe exemplarisch dargestellt werden:

$$491 \rightarrow 4 + 9 + 1 = 14 \quad \rightarrow \quad 14 \rightarrow 1 + 4 = 5$$
$$295 \rightarrow 2 + 9 + 5 = 16 \quad \rightarrow \quad 16 \rightarrow 1 + 6 = 7$$
$$144845 \rightarrow 1 + 4 + 4 + 8 + 4 + 5 = 26 \quad \rightarrow \quad 26 \rightarrow 2 + 6 = 8$$

Durch die Neunerprobe $5 \cdot 7 = 35$ $\quad 35 \rightarrow 3 + 5 = 8$ und durch den Vergleich mit der Ziffernsumme von 144845 ist zu erkennen, dass das Ergebnis stimmt.[226]

Der arabische Mathematiker Ali ibn Ahmad al-Nasawi benutzte die Neunerprobe für alle Rechenoperationen und Ibn al-Banna beschäftigte sich neben der Neuner-, auch mit der Siebener- und Achterprobe.[227]

Obwohl diese Methode sehr viele Vorzüge besitzt, wird sie heutzutage selten genutzt und gerät immer mehr ins Abseits. Es könnte daran liegen, dass die Neunerprobe zwar hilfreich ist, aber dennoch keinen Beweis für die absolute Richtigkeit der Rechnung angeben kann und daher nicht mehr wirklich genutzt wird.[228]

Obgleich diese Methode wie gerade eben beschrieben mittlerweile selten genutzt wird und auch aufgrund der leichten Verfügbarkeit von elektronischen Hilfsmitteln wie Taschenrechnern nicht mehr benötigt werden wird, kann sie im schulischen Kontext dennoch präsentiert werden: Es bieten sich hier als Anknüpfungspunkt die Teilbarkeitsregeln an. Diese werden in der Unterstufe behandelt. Hier kann man die Nützlichkeit der Teilbarkeitsregeln zeigen bzw. wie sie historisch verwendet worden sind.

3.6 Zusammenfassung

In diesem großen Kapitel ist zu erkennen, dass die arabischen Mathematiker damals schon sehr viel geleistet haben. Schon aufgrund ihrer zahlreichen Übersetzungen

[226] (Dietzfelbinger, Mehlhorn und Sanders 2014, 8)
[227] (Naini 1982, 30ff.)
[228] (Schubert 1964)

haben sie sehr viel für das Abendland getan. Aber auch ihre eigenen Verdienste dürfen nicht außer Acht gelassen werden.

4. Geschichte der Mathematik in Schulbüchern

In diesem Kapitel soll überprüft werden, ob geschichtliche Fakten und Informationen in Schulbüchern stehen, vor allem mit Augenmerk auf die arabische Mathematik. Dazu werden zwei komplette Schulbuchreihen sowohl für die Sekundarstufe 1 als auch die Sekundarstufe 2 angeschaut. Zum einen ist das die Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“, zum anderen „Thema Mathematik“.

4.1 Schulbücher

Die Schulbücher werden zu Beginn kurz beschrieben. Im Anschluss wird dargelegt, welche geschichtlichen Informationen in den Büchern wiedergegeben werden. Das heißt, sobald ein Verweis auf geschichtliche Daten vorliegt, wird dieser kurz beschrieben. Es wird rein informativ sein, um zu sehen, wie viel geschichtliche Informationen überhaupt in den Schulbüchern stehen und ob die islamischen Mathematiker genannt werden. Die Informationen, die eher diese Arbeit betreffen, werden genauer beschrieben, andere geschichtliche Informationen werden nur erwähnt.

4.1.1 Mathematik verstehen

Mathematik verstehen gibt es für die Unter- und Oberstufe. Alle Bücher werden vom österreichischen Bundesverlag gedruckt. Die Autoren der Unterstufenreihe sind Prof. Mag Dr. Bernhard Salzger, Prof^{in}. Mag.^{a} Judith Bachmann, Prof.^{in} Mag.^{a} Andrea Germ, Prof.^{in} Mag.^{a} Barbara Riedler, HS-Prof.^{in} Mag.^{a} Dr. Klaudia Singer und MMag. Dr. Andreas Ulovec. Die Autoren der Bücher für die Oberstufe sind Univ.-Prof. Mag. Dr. Günther Malle, HS-Prof.^{in} Mag.^{a} Dr.^{in} Maria Koth, Prof.^{in} Mag.^{a} Dr.^{in} Helga Woschitz, Prof.^{in} Mag.^{a} Sonja Malle, Prof. Mag. Dr. Bernhard Salzger und MMag. Dr. Andreas Ulovec. Bei allen 8 Schulbüchern gibt es auch ein E-Book+. Dies beinhaltet interaktive Übungen, Videos und Audiodateien zu den Schulbuchseiten. Es gibt auch ein digitales Klassenzimmer, wo Lehrerinnen und Lehrer die Möglichkeit haben, ihren Schülerinnen und Schülern Aufgaben aus dem E-Book+ zuzuweisen.

Tabelle 7: Übersicht Mathematik verstehen 1-8

Jahrgangstufe	Auflage	Jahr	Seiten	Weitere Produkte
5 (1.AHS)	1. Auflage	2021	288	Lösungen Arbeitsheft E-Book+
6 (2.AHS)	1. Auflage	2015	288	Lösungen Arbeitsheft E-Book+
7 (3.AHS)	1. Auflage	2016	288	Lösungen Arbeitsheft E-Book+
8 (4.AHS)	1. Auflage	2017	288	Lösungen Arbeitsheft E-Book+
9 (5.AHS)	1. Auflage	2017	288	Grundkompetenztraining Lösungen Technologietraining für Casio und Geogebra E-Book+
10 (6.AHS)	1. Auflage	2018	288	Grundkompetenztraining Lösungen Technologietraining für Casio und Geogebra E-Book+
11 (7.AHS)	1. Auflage	2019	271	Grundkompetenztraining Lösungen Technologietraining für Casio und Geogebra E-Book+
12 (8.AHS)	1. Auflage	2020	256	Grundkompetenztraining Lösungen Technologietraining für Casio und Geogebra E-Book+ Maturatraining

4.1.1.1 Mathematik verstehen 1

Im Einführungskapitel unter dem Titel „Was ist Mathematik“ wird beschrieben, dass Mathematik seit 30000 Jahren betrieben wird. Vor 5000 Jahren haben die Ägypter und Babylonier schon hoch entwickelte mathematische Verfahren benutzt und vor etwa 2500 Jahren haben die Griechen die Mathematik begründet, wie wir sie heute kennen und zudem mathematische Beweise gefunden, die heute noch genauso gelten bzw. Beweisverfahren, die wir heutzutage noch so anwenden.[229]

Bei der Erläuterung des dekadischen Zahlensystems im ersten Kapitel wird die Herkunft des Dezimalsystems erklärt. Es wurde ungefähr im 8. Jahrhundert in Indien erfunden und von den Arabern im 12. Jahrhundert nach Europa gebracht. Auf der Seite 22 ist eine Abbildung mit der Entwicklung der Ziffern vom 12 bis 16. Jahrhundert dargestellt. [230]

Am Ende des ersten Kapitels wird die Geschichte der Null als Ziffer und als Zahl in den verschiedenen Kulturen beschrieben. Dabei werden die Babylonier genannt, bei denen es noch keine Null gab und ca. 300 v. Chr. ein Lückenzeichen gab, welches die Null darstellen sollte. Bei dem Thema, welche Kulturen sich mit der Null beschäftigten, werden die Babylonier, Inder, Chinesen und die Maya genannt. Die Null als Zahl hat ihren Ursprung im 17./18. Jahrhundert.[231]

Am Ende des dritten Kapitels wird die Herkunft des Kommas beschrieben. Seit dem 18. Jahrhundert v. Chr. gab es schon ein Dezimaltrennzeichen. Ende des 14. Jahrhunderts n. Chr. wurden ganzzahlige Zahlen schwarz und Nachkommastellen rot geschrieben. Den ersten Dezimalpunkt setzte der Italiener Pellos und am Anfang des 17. Jahrhunderts wurde zum ersten Mal das Komma benutzt.[232]

Am Ende des 5. Kapitels „Zahlen in Bruchdarstellung“ wird ein geschichtlicher Abriss beschrieben. Um Bruchteile von ganzen Einheiten zu nennen, benutzten die Ägypter Teile des Auges vom Falkengott Horus. Einzelne Teile des Auges gaben unterschiedliche Wertigkeiten an (siehe Abbildung 31). Des Weiteren werden die

[229] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. Germ, et al. 2021, 9)
[230] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. Germ, et al. 2021, 18)
[231] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. Germ, et al. 2021, 33)
[232] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. Germ, et al. 2021, 109)

Zahlen und Stammbrüche mit altägyptischen Hieroglyphen beschrieben. Dann wird noch der Fund des Papyrus Rhind beschrieben und dass sich darin auch schon Brüche befunden haben.[233]

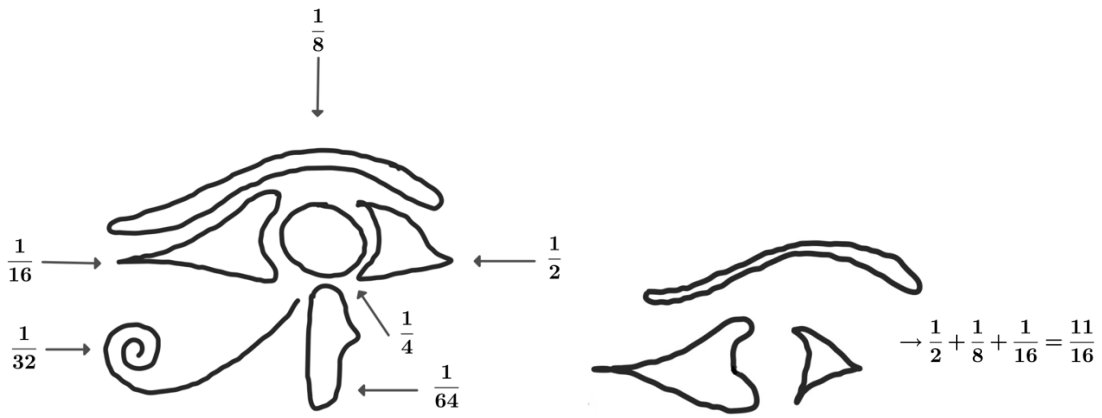


Abbildung 31: Brüche durch Darstellung des Falkenauges der Ägypter nach (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. Germ, et al. 2021, 147)

Am Ende des 6. Kapitels „Mit Variablen arbeiten“ wird zuerst die Herkunft der vor 4000 Jahren benutzten Hau-Rechnungen (aus Ägypten) erklärt. Im Anschluss wird dazu noch ein Beispiel näher erläutert. Im zweiten Punkt werden kurz ein paar Inhalte von Diophantos‘ Werk „Arithmetika“ beschrieben.[234]

Am Ende des 7. Kapitels „Einführung in die Geometrie“ wird die Herkunft des geometrischen Punktes beschrieben. Dabei werden die Ägypter genannt, die sich noch gar nicht mit der Frage beschäftigt haben, was ein Punkt ist. Platon (* 427, † 347 v. Chr.) hingegen sagt, dass „ein Punkt der Anfang einer Linie ist“. Aristoteles (* 384, †322 v. Chr.) sagt, dass „der Punkt eine unteilbare Einheit ist, die eine Position besitzt“. Euklid (etwa 300 v. Chr.) meint, dass ein Punkt keine Teile besitzt. Dann wird erst wieder der deutsche Mathematiker Moritz Pasch (* 1843, † 1930) genannt, der sagt, dass die Frage nach der Punktdefinition noch nicht gelöst wurde, sondern dass sie sich einfach aufgelöst hat und es reicht, die geometrischen Gesetze und Regeln zu beherrschen. [235]

4.1.1.2 Mathematik verstehen 2

Im ersten Kapitel „Teiler und Teilbarkeit“ wird erklärt, was unter der schwachen und starken Goldbach‘schen Vermutung verstanden wird. Auch, dass sie noch nicht

[233] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. Germ, et al. 2021, 147)
[234] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. Germ, et al. 2021, 165)
[235] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. Germ, et al. 2021, 183)

bewiesen worden ist. Die Schülerinnen und Schüler sollen in den Aufgaben es für drei Zahlen ausprobieren.[236] Am Ende dieses Kapitels wird noch das Sieb des Eratosthenes (* 276, † 194 v. Chr.) erklärt. Hierzu schreibt man alle Zahlen ≥ 2 auf. Im Buch ist eine Abbildung mit den ersten hundert Zahlen. Die Zahl 2 ist eine Primzahl. Nun streicht man alle Vielfachen von 2, also alle geraden Zahlen größer als 2, denn diese können natürlich keine Primzahl sein (weil sie ja zusätzlich auch zumindest 2 als Teiler besitzen). Die nächste nicht durchgestrichene Zahl ist wieder eine Primzahl, das ist nun die Zahl 3. Man streicht nun wieder alle Vielfachen dieser Zahl, also die Zahlen 6, 9, 12, 15 usw. (Die geraden Zahlen wurden aber bereits ohnedies im vorigen Schritt gestrichen.) Die nächstgrößere Zahl, die noch nicht durchgestrichen wurde, ist wieder eine Primzahl – somit die Zahl 5. Wiederum streicht man alle Vielfachen dieser Zahl. Dieses Prozedere führt man immer weiter durch, bis alle Primzahlen übrig bleiben.

Wenn wie in der Abbildung im Buch eine bestimmte Anzahl von Zahlen mit dem Sieb des Eratosthenes auf Primzahlen „überprüft“ werden soll, so reicht es, nur die Vielfachen der Primzahlen zu streichen, die kleiner oder gleich der Wurzel der Anzahl der abgebildeten Zahlen ist. Also hier reicht es, die Vielfachen der Primzahlen bis zur Zahl $\sqrt{100} = 10$ zu streichen, also lediglich die Primzahlen 2, 3, 5 und 7. (Die nächste Primzahl ist bekanntlich 11. 11 bleibt im Sieb des Eratosthenes übrig, die Vielfachen bis 100 wurden aber bereits durch die Vielfachen der anderen Primzahlen gestrichen, siehe: $\mathbf{2} \cdot 11$, $\mathbf{3} \cdot 11$, $\mathbf{4} \cdot 11 = \mathbf{2^2} \cdot 11$, $\mathbf{5} \cdot 11$, $\mathbf{6} \cdot 11 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 11$, $\mathbf{7} \cdot 11$, $\mathbf{8} \cdot 11 = \mathbf{2^3} \cdot 11$, $\mathbf{9} \cdot 11 = \mathbf{3^2} \cdot 11$.)[237]

Am Ende des Kapitels „mit Prozenten rechnen“ wird auf der ganzen Seite die Geschichte der Prozentrechnung und die Herkunft des Wortes und das Prozentsymbol erklärt. Der geschichtliche Teil fängt vor etwa 4000 Jahren bei den Babyloniern an, geht weiter zu den Indern etwa 700 v. Chr. Sie benutzten schon die Vergleichszahl 100. Im römischen Reich von 63 v. Chr. bis 14 n. Chr. werden Hundertstelbrüche benutzt. Im Mittelalter dient die Zahl 100 als Berechnungsgrundlage und es wurden schon Zinsen, Verluste und Gewinne berechnet. Die Prozentrechnung, wie wir sie heute kennen, ist erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhundert bekannt geworden. Das Wort Prozent findet seinen Ursprung im 15. Jahrhundert, wurde weiterentwickelt

[236] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. M. Germ, et al. 2015, 33)
[237] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. M. Germ, et al. 2015, 37)

und zum ersten Mal im 18. Jahrhundert genannt. Das Symbol entwickelte sich erst ein Jahrhundert später.[238]

Am Ende des Kapitels „Gleichungen“ wird die Methode von Gauß erklärt, wie die Zahlen von 1 bis 100 summiert werden können. Durch seine Formel

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

geht es viel schneller, als alle Summanden nacheinander zu addieren.[239]

Am Ende des Kapitels „Bekanntes und Neues aus der Geometrie“ wird der Ursprung des Koordinatensystems beschrieben. Dabei wird der Grieche Apollonios, die Franzosen Nikolaus Oresme, René Descartes und Pierre de Fermat und der Schweizer Leonhard Euler genannt. Das kartesische Koordinatensystem ist nach René Descartes benannt, welcher es nicht erfunden, aber bekannt gemacht hat. Leonhard Euler entwickelte die Form, die wir heute kennen.[240]

Im Kapitel 7 „Dreiecke“ wird der Satz des Thales mit Definition und dem Geburts- und Sterbedatum von Thales von Milet genannt, dem der Beweis zugeschrieben wird.[241] Außerdem soll in einer Aufgabe der Nagel-Punkt N eines Dreiecks konstruiert werden, welcher nach dem deutschen Mathematiker Heinrich von Nagel (* 1803, † 1882) benannt ist.[242] In einer weiteren Aufgabe wird auf den Gergonne-Punkt G hingewiesen, der sich ergibt, wenn sich die Verbindungsstrecken zwischen einem Eckpunkt des Dreiecks und dem Berührpunkt des Inkreises auf der gegenüberliegenden Dreiecksseite schneiden. Dieser Punkt ist nach dem Franzosen Jean Diaz Gergonne (* 1771, † 1859) benannt. Am Ende dieses Kapitels werden der Feuerbachkreis (oder Neunpunktekreis) und die Eulersche Gerade beschrieben und näher erläutert.[243]

4.1.1.3 Mathematik verstehen 3

Im ersten Kapitel „ganze Zahlen“ wird am Ende die Geschichte der negativen Zahlen erläutert. Dabei werden die Babylonier genannt, die ein Zeichen benutzten, welches

[238] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. M. Germ, et al. 2015, 109)
[239] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. M. Germ, et al. 2015, 125)
[240] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. M. Germ, et al. 2015, 167)
[241] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. M. Germ, et al. 2015, 187)
[242] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. M. Germ, et al. 2015, 191)
[243] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann und P. M. Germ, et al. 2015, 203)

„weniger als“ bedeutet. Die Chinesen hatten schon Rechenregeln für Additionen und Subtraktionen von positiven und negativen Zahlen. Die Inder benutzten eher die Worte Schulden und Vermögen. Leonardo von Pisa (auch Fibonacci genannt) erstellte eine Aufgabe, in der am Ende das Ergebnis eine negative Zahl ist. Einige Mathematiker des 16. und 17. Jahrhunderts bezeichneten die negativen Zahlen als Unsinn. Dann schrieb Euler schon das Zeichen (-) vor die Zahlen. Erst dann im 19. Jahrhundert wurden dazu Rechengesetze formuliert.[244]

Am Ende des 4. Kapitels „mit Termen und Formeln arbeiten“ werden binomische Formeln höherer Ordnung und dabei das Pascalsche Dreieck, nach Blaise Pascal (*1623, † 1662), näher erläutert. Auch die allgemeine Formel des binomischen Lehrsatzes wird erklärt.[245]

Im Kapitel 7 „Figuren vergrößern und verkleinern“ wird die stetige Teilung – oder auch „goldener Schnitt“ genannt – erklärt.[246]

Im 8. Kapitel „der pythagoräische Lehrsatz“ wird gleich zu Beginn auf die Herkunft des Satzes von Pythagoras hingewiesen. Dabei wird auch erwähnt, dass dieser Satz schon bei den Babyloniern und den Ägyptern bekannt war. Er wurde aber zum ersten Mal von Pythagoras von Samos (* 580 v. Chr., † 500 v. Chr.) oder einem seiner Schüler bewiesen.[247]
Im Punkt 8.3 werden weitere Beweise dieses Satzes von anderen Mathematikern gezeigt, angefangen beim Araber Thabit ibn Qurra (* 826, † 901), der den Satz mit Flächenteilungen bewies, welcher dann noch durch Henry Perigal im Jahr 1873 verfeinert wurde. Einen weiteren Beweis liefert Fibonacci, der ihn mit Hilfe ähnlicher Dreiecke bewiesen hat. Und zum Abschluss wird noch ein geometrischer Beweis von Leonardo da Vinci (* 1452, † 1519) gezeigt.[248]

Am Ende dieses Kapitels werden noch pythagoräische Zahlentripel erklärt und Beispiele aufgezählt. Dabei sollen zwei Quadrate miteinander addiert ein drittes Quadrat ergeben. Die Pythagoräer haben gezeigt, dass es unendlich viele

[244] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2016, 41)
[245] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2016, 119)
[246] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2016, 177)
[247] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2016, 181)
[248] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2016, 190,191)

pythagoräische Zahlentripel gibt. Außerdem wird noch der Satz von Fermat-Wiles erklärt. Fermat suchte für die Gleichung $a^3 + b^3 = c^3$ (und mit höheren Exponenten) ganzzahlige Lösungen, aber fand heraus, dass es keine gibt. Er wollte den Satz beweisen, was er aber nicht schaffte. Erst 1995 konnte dies der Brite Andrew Wiles in einem über 100 Seiten Skript tun. Daher der Doppelname des Satzes.[249]

Im Kapitel 10 „Prisma und Pyramide“ wird der Bau von Pyramiden erklärt. In einem kleinen Abschnitt wird erläutert, dass die Ägypter nicht so multipliziert haben, wie wir heute. Sie haben damals die Zahlen verdoppelt und der Rest wurde noch hinzugefügt. Beim Dividieren wird der Divisor so lange verdoppelt, bis das Produkt einem dem Dividenden benachbarten Zahlenwert erreicht hat und der Rest wurde wieder hinzugefügt.[250]

4.1.1.4 Mathematik verstehen 4

Am Ende des 1. Kapitels „Reelle Zahlen“ geht es um Quadrate, welche negativ sind. In diesem Zusammenhang wird der Italiener Gerolamo Cardano (* 1501, † 1576) genannt, der sein Ergebnis nicht anerkannte, da Wurzeln aus negativen Zahlen nicht definiert seien. Als er aber sein Ergebnis in die Gleichung einsetzte, erhielt er aber eine richtige Antwort. Ein anderer Italiener, Raffaele Bombell (* 1526, † 1572), stellte Rechenregeln auf, die heute noch ihre Gültigkeit haben. Auch Rene Descartes beschäftigte sich damit und nennt diese Zahl imaginär. Und Leonhard Euler führt eine Zahl „i“ ein, so dass $i^2 = -1$ gilt.[251]

Im 3. Kapitel „Gleichungen und Gleichungssysteme in zwei Variablen“ wird kurz erläutert, dass schon die Chinesen im 5. Jahrhundert n. Chr. und die Griechen schon 250 n. Chr. bestimmte Aufgabenstellungen zu diesem Thema lösten. Es werden dann auch zwei Beispiele aus dieser Zeit zum Rechnen bereitgestellt, welche den Schülerinnen und Schüler als Aufgabe gestellt werden. Der erste, der Gleichungssysteme systematisch löste, war Gottfried Wilhelm Leibnitz (* 1646, † 1716).[252]

---

[249] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2016, 193)
[250] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2016, 257)
[251] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2017, 37)
[252] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2017, 90)

Unter Beweise im Kapitel 5 wird der Satz des Pythagoras von Euklid bewiesen, wobei in diesem auch gleich der Kathetensatz mitbewiesen werden kann. Einen weiteren Beweis wird noch vom Amerikaner James Garfield (* 1831, † 1881) angeführt. Eine Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler ist in der Abbildung 32 zu sehen. Es ist eine Beweisführung aus Indien aus dem 12. Jahrhundert zu erkennen.[253]

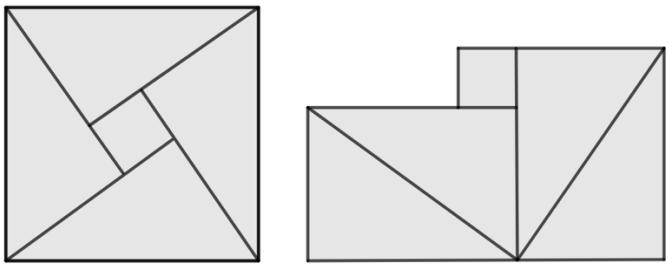


Abbildung 32:Aufgabe für die SchülerInnen nach (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2017, 155)

Am Ende des Kapitels wird noch gesagt, dass die fünf regelmäßigen dreidimensionalen Körper Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder nach dem Griechen Platon (* 428/427 v. Chr., † 348/347 v. Chr.) benannt sind und welche Eigenschaften sie haben.[254]

Gleich am Anfang des 6. Kapitels „Die Kreiszahl Pi“ wird die geschichtliche Entstehung der Kreiszahl beschrieben. In der Antike wurde der Kreisumfang also dreimal so groß wie der Durchmesser gesehen. Im Alten Testament wird er auch als das Dreifache angegeben, obwohl in einer neueren Auslegung vom 3,1415-fachen gesprochen wird. Archimedes sagt, dass das Verhältnis größer als $3\frac{10}{71}$, aber kleiner als $3\frac{1}{7}$ sein muss. Er schrieb dabei ein 96-Eck in einen Kreis ein. Etwa 480 n. Chr. hat ein Chinese den Wert von $\frac{355}{113} = 3{,}1415929$ herausbekommen. Fibonacci kam 1220 auf den Wert von $\frac{864}{275} = 3{,}14\overline{18}$ und Francois Viète ermittelte 1579 durch ein 393216-Eck einen Wert zwischen 3,1415926535 und 3,1415926537. Heute wissen wir, dass Pi eine irrationale Zahl ist.[255]

[253] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2017, 154,155)
[254] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2017, 157)
[255] (P. M. Salzger, P. M. Bachmann, et al. 2017, 161,162)

4.1.1.5 Mathematik verstehen 5

Beim Unterkapitel „Teilbarkeit und Primzahlen“ wird die Goldbachsche Vermutung von Christian Goldbach (* 1690, † 1764) kurz erklärt. Die Vermutung, dass sich jede gerade natürliche Zahl durch die Summe zweier Primzahlen darstellen lässt, wurde noch nicht bewiesen, aber auch noch kein Gegenbeispiel gefunden. Als zweites wird noch das Problem der Primzahlzwillinge beschrieben. Die Frage ist, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, die sich nur um zwei unterscheiden. Als Beispiele werden genannt: 3 und 5; 5 und 7; 11 und 13.[256]

Beim Satz von Vieta im Kapitel 3.3 wird darauf hingewiesen, dass er der erste war, der die Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten einer normierten quadratischen Gleichung und deren Lösungen formulierte.[257]

Beim Kompetenzcheck im Kapitel 3 „quadratische Gleichungen“ wird in einer Typ-2-Aufgabe der goldene Schnitt gefragt und es wird darauf hingewiesen, dass dieser aus der Antike kommt.[258]

Am Ende des Kapitels „Berechnung in rechtwinkligen Dreiecken“ wird in einer Typ-2-Aufgabe auf astronomische Entfernungen eingegangen. In dieser Aufgabe wird erwähnt, dass Aristarch von Samos schon vor 2000 Jahren Überlegungen angestellt hat, wie er die Entfernung zwischen Erde und Sonne, Erde und Mond usw. berechnen könnte und es werden einige seiner Überlegungen in Aufgabenstellungen untergebracht.[259]

Am Anfang des 5. Kapitels „Berechnungen in beliebigen Dreiecken“ wird nochmal auf die Herkunft des Koordinatensystems eingegangen. Dies wurde schon im Buch der 2. Jahrgangsstufe angeführt.[260]

---

[256] (Malle, Koth, et al. 2017, 27)
[257] (Malle, et al. 2017, 64)
[258] (Malle, et al. 2017, 69)
[259] (Malle, et al. 2017, 87)
[260] (Malle, et al. 2017, 89)

Beim Thema „Einheitsvektoren; Abstand Punkt-Gerade; merkwürdige Punkte“ wird beim Satz „Hesse‘sche Abstandsformel“ auf den Namen Ludwig Otto Hesse und sein Geburt- und Sterbejahr hingewiesen.[261]

4.1.1.6 Mathematik verstehen 6

Beim Thema „Logarithmen“ wird im 1. Kapitel auf die Eulersche Zahl e näher erklärt. Neben der Zahl ist ein Portrait von Leonhard Euler.[262]

Im Unterkapitel „Ungleichungen“ befindet sich beim Kompetenzcheck eine Aufgabe zur Bernoulli-Ungleichung. Neben der Aufgabenstellung werden die Fakten, wie Name, Geburts- und Sterbedatum, und die Bernoulli-Ungleichung selbst angeführt und ein Portrait von ihm ist abgebildet.[263]

Im Kapitel 6 „Ergänzungen zu Funktionen“ wird das Thema „Historisches zu Funktionen“ zusätzlich veranschaulicht. Zu Beginn wird auf funktionale Zusammenhänge in der Geschichte eingegangen. Dabei werden speziell die Babylonier und der Grieche Ptolemäus genannt. Eine Darstellung aus dem 11. Jh. zeigt die ältesten Graphen, die unseren heutigen Graphen ähnlich sind. Dann wird Nicole Oresme und eine Abbildung zur Proportionalität dargestellt. Des Weiteren wird beschrieben, dass Rene Descartes und Pierre Fermat unabhängig voneinander den Graphen entwickelt haben. Viète brachte das Rechnen mit Buchstaben im 16. Jahrhundert weiter. Zwischen Leibnitz und Bernoulli tauchte zum ersten Mal das Wort „functio“ auf, wobei noch nicht ganz klar war, was überhaupt eine Funktion sei. Bernoulli und ein Schüler von ihm, Leonhard Euler, gaben Funktionen eine Definition, aber es traten noch Probleme auf. Abschnittsweise definierte Funktionen werden erstmals bei Joseph Fourier (* 1768, † 1830) vorgefunden. Eine komplette Loslösung des Funktionsbegriffs von Term und Graph schaffte Nikolai Lobatschewski und Johann Peter Dirichlet im 19. Jahrhundert. Hans Herrmann Hankel definierte es noch genauer und Richard Dedekind (* 1831, † 1916) führte einen allgemeinen Funktionsbegriff ein. Er unterscheidet zwischen Funktion und Funktionswert. Bernhard Bolzano und Karl Weierstrass entdeckten „pathologische“ Funktionen, deren Graphen aus lauter Ecken

[261] (Malle, et al. 2017, 263)
[262] (Malle, Koth, et al. 2018, 25)
[263] (Malle, Koth, et al. 2018, 41)

bestanden. Viele Mathematiker stürzten sich auf diese Funktionen und entwickelten somit die Funktionsinhalte weiter.

Auf zwei dieser drei Seiten im Schulbuch sind Portraits von Johann Bernoulli, Leonhard Euler, Hans Hermann Hankel, Richard Dedekind und Herrmann Weyl mit ihren Geburts- und Sterbejahren und darunter stehen jeweils ihre Definitionen was eine Funktion ist.[264]

Im Unterkapitel „rekursive Darstellung von Folgen“ geht es um die Fibonacci-Folgen. Dabei wird zu Beginn die „Kaninchenaufgabe“ von Fibonacci, auch Leonardo von Pisa genannt, durchbesprochen. Nach der Definition wird noch erläutert, weshalb die Fibonacci-Folge berühmt geworden ist. Es ist wiederum ein Portrait des Mathematikers mit Geburts- und Sterbejahr abgebildet.[265]

Am Anfang des 8. Themas „Reihen“ wird noch einmal auf die Methode der Summation der Zahlen von 1 bis 100 von Carl Friedrich Gauss eingegangen, was auch bereits im Schulbuch der 2. Klasse Unterstufe stand. Der Mathematiker wird wieder mit Geburts- und Sterbejahr genannt.[266]

Im Unterkapitel „stetige Verzinsung“ wird die Frage von Bernhard Bernoulli aufgeworfen, wie groß das Endkapital nach n Jahren ist, wenn in jedem Augenblick verzinst wird. Es werden dabei Annahmen von ihm beschrieben. Die entstehende Folge besitzt einen Grenzwert und Euler bezeichnet ihn mit e (rund 2,718281828). Es wird dann noch die genaue Definition genannt.[267]

Am Ende des 10. Kapitels „Geraden und Ebenen im Raum“ wird kurz erläutert, dass die analytische Geometrie auf Rene Descartes zurückgeht. Er erkannte, dass das Thema der ebenen (räumlichen) Geometrie mittels Zahlenpaaren beschrieben werden kann.[268]

---

[264] (Malle, Koth, et al. 2018, 122-124)
[265] (Malle, Koth, et al. 2018, 142,143)
[266] (Malle, Koth, et al. 2018, 154)
[267] (Malle, Koth, et al. 2018, 164)
[268] (Malle, Koth, et al. 2018, 198)

Im Kapitel „Wahrscheinlichkeiten“ wird beim Thema „Laplace-Versuche“ der Franzose Pierre Simon de Laplace mit Geburts- und Sterbejahr genannt.[269]

Beim Satz von Bayes wird lediglich gesagt, dass dieser Satz auf den Engländer Thomas Bayes (* 1702, † 1761) zurückgeht.[270]

4.1.1.7 Mathematik verstehen 7

Im 1. Kapitel steht, dass sich die binomische Formel $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ zu einer Regel von William George Horner (* 1786, † 1837) verallgemeinern lässt. Es wird der dazugehörige Satz genannt.[271]

Im Abschnitt 2 wird die Tangente an einen Funktionsgraphen nach Gottfried Wilhelm Leibnitz erarbeitet. Es wird lediglich sein Name und sein Geburts- und Sterbejahr genannt.[272]

Im Kapitel 2 „Grundbegriffe der Differentialrechnung“ wird die Schreibweise für den Differenzen- und Differentialquotienten beschrieben, die auf Gottfried Wilhelm Leibnitz zurückgeht.[273]

Am Ende des 3. Kapitels „Untersuchen von Polynomfunktionen“ wird eine Seite der Geschichte von Extremwertaufgaben gewidmet. Als erstes wird Euklid (300 v. Chr.) mit einer Aufgabe genannt, bei der er den größtmöglichen Flächeninhalt eines Rechtecks, mit vorgegebenem Umfang, ermitteln möchte. Ab dem 17. Jahrhundert wurden Extremwertaufgaben schon nach dem Prinzip mit Methoden der Differentialrechnung behandelt. Es werden dabei Pierre des Fermat, Johannes Kepler und Rene Descartes mit ihren Aufgaben genannt.[274]

---

[269] (Malle, Koth, et al. 2018, 238)
[270] (Malle, Koth, et al. 2018, 270)
[271] (Malle, Koth, et al. 2019, 9)
[272] (Malle, Koth, et al. 2019, 24)
[273] (Malle, Koth, et al. 2019, 29)
[274] (Malle, Koth, et al. 2019, 77)

Im Thema „Polardarstellung von Kurven in der Ebene“ wird ein Gedankenexperiment durchgeführt, welches am Ende eine Kurve ergibt, die als archimedische Spirale bezeichnet wird.[275]

Am Ende des 8. Kapitels „Exaktifizierung der Differentialrechnung“ wird auf vier Seiten die Geschichte der Differentialrechnung beschrieben. Es geht um die intuitive Phase, der Kritik und der Exaktifizierung der Differentialrechnung sowie die Vor- und Nachteile einer exakteren Fundierung. In dem geschichtlichen Abriss werden folgende fünf Mathematiker inklusive Bild genannt: Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibnitz, George Berkeley, Augustin Louis Cauchy und Bernhard Bolzano.[276]

Beim Thema Binomialkoeffizienten wird das Pascalsche Dreieck nach Blaise Pascal erläutert. Es ist wieder ein Bild und das Geburts- und Sterbejahr abgebildet.[277]

Eine Seite später wird Jakob Bernoulli im Zusammenhang mit dem n-maligen Drehen eines Glücksrades genannt. Diese n-malige Wiederholung eines Zufallsversuchs wird als n-stufige Bernoulli-Kette bezeichnet.[278]

Im Kapitel „komplexe Zahlen“ wird noch einmal das Beispiel aus der 4. Klasse Unterstufe von Gerolamo Cardano herangezogen. Cardano, wie auch viele andere Mathematiker nach ihm, war nicht bereit, die komplexen Zahlen anzuerkennen. Diese Anerkennung fand erst im 20. Jahrhundert statt.[279]

Im gleichen Kapitel geht es um das Lösen von kubischen Gleichungen. In diesem Zusammenhang wird der Italiener Scipione del Ferro (* 1465, † 1526) genannt, der als erster eine Möglichkeit fand, kubische Gleichungen zu lösen. Fast zeitgleich wird von Niccolo Tartaglia (* 1500, † 1557) eine Lösungsformel entwickelt. Diese teilte er Cardano mit, der sie schließlich unter seinem Namen veröffentlichte.[280]

---

[275] (Malle, Koth, et al. 2019, 125)
[276] (Malle, Koth, et al. 2019, 168-171)
[277] (Malle, Koth, et al. 2019, 216)
[278] (Malle, Koth, et al. 2019, 217)
[279] (Malle, Koth, et al. 2019, 232,233)
[280] (Malle, Koth, et al. 2019, 237)

Unter dem Teilkapitel „geometrische Darstellung komplexer Zahlen“ wird u.a. Carl Friedrich Gauß genannt, der es schaffte, die komplexen Zahlen zu veranschaulichen und auch zu verbreiten. Die Ebene, in der er die komplexen Zahlen einbettete, wird als Gauß’sche Zahlenebene bzw. komplexe Zahlenebene bezeichnet.[281]

Im gleichen Kapitel wird noch die Konstruktion der komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen dargelegt. Diesen Schritt machte William Rowan Hamilton (* 1805, † 1865).[282] Am Ende dieses Kapitels werden fünf Seiten dem geschichtlichen Abriss der Zahlbereiche gewidmet. Den Anfang machen die natürlichen Zahlen. Es wurden früher Haufen von z.B. Steinen gemacht, weil das Zählen selbst noch nicht notwendig war. Primitive Völker konnten meist auch nicht weit zählen. Bei den Griechen waren die Zahlen nicht mehr an konkrete Objekte gebunden, die Überlegungen waren aber dennoch noch von sogenannten Rechensteinen beeinflusst. Die Pythagoräer legten die Zahlen 1, 3, 6, 10 etwa in Dreiecke bzw. Quadratzahlen in Quadrate. Die Griechen stellten sich die Frage: Was ist eine Zahl?

Die Zeichen für die Ziffern 0 bis 9 gehen auf die Inder zurück, jedoch wurden sie von den Arabern nach Europa gebracht. Die Rechenzeichen tauchten erst im 15. Jahrhundert auf, davor wurde alles verbal formuliert. Die rationalen Zahlen haben ihren Ursprung bei den Ägyptern und Babyloniern. Dies wurde im Unterstufenbuch der ersten Klasse als geschichtlicher Input dargestellt. Für die Griechen war es schwierig, Bruchzahlen als Zahlen anzuerkennen, da für sie eine Einheit nicht teilbar war. Dann wird gesagt, dass die Araber die griechische Mathematik bewahrt und weiterentwickelt haben, aber es auch nicht schafften, die griechische Auffassung zu überwinden. Erst der Franzose Petrus Ramus (* 1515, † 1572) schaffte diesen Sprung und sagte, dass eine Zahl etwas ist, mit dem man zählen und rechnen kann.

Bei den irrationalen Zahlen stießen die Pythagoräer an ihre Grenzen, wie z.B. bei der Diagonale in einem Quadrat. Zur Lösung des Problems konnten sie nur gelangen, wenn sie sich von der Geometrie abwenden würden. Die Anerkennung von irrationalen Zahlen erfolgte langsam und der Erste, der diese Zahlen gänzlich anerkannte, war Simon Stevin (* 1548, † 1620). Er erweiterte die Aussage von Ramus um das Wort

[281] (Malle, Koth, et al. 2019, 239)
[282] (Malle, Koth, et al. 2019, 240)

„messen“. Er erkannte, dass durch die reellen Zahlen die Lücken eines Zahlenstrahls geschlossen werden können. Die Anerkennung der negativen Zahlen erfolgte zum ersten Mal durch Leonardo von Pisa und die vollständige Anerkennung erst im späten 19. Jahrhundert. Der Zahlbegriff von Stevin wurde durch die Definition, dass Zahlen durch Axiome festgelegte Objekte sind, abgelöst. Komplexe Zahlen wurden zunächst von Cardano verwendet. Er meinte, dass sie keinen Sinn hätten, aber erkannte aber, dass sich mit ihnen Probleme lösen ließen, die man sonst nicht lösen konnte. Die vollständige Anerkennung der komplexen Zahlen erfolgt auch erst im 19. Jahrhundert, als ein axiomatischer Zahlbegriff verwendet wurde.[283]

4.1.1.8 Mathematik verstehen 8

Im 1. Kapitel unter dem Thema „Approximation des Integrals durch Summen“ wird gesagt, dass die Methode der näherungsweisen Berechnung von Flächeninhalten durch Summen auf G.W. Leibnitz (* 1646, † 1716) zurückgeht.[284]

Das 3. Kapitel „Vertiefung zur Integralrechnung“ widmet sich am Ende der Geschichte der Integralrechnung auf drei Seiten. Die Griechen beschäftigten sich schon mit der Quadratur des Kreises. Erst im 19. Jahrhundert wurde gezeigt, dass dies nicht lösbar ist. Die griechischen Mathematiker versuchten Inhalte von krummlinigen Flächen zu berechnen und entwickelten ihr Exhaustionsverfahren. In diesem Zusammenhang wird Euklid genannt. Sie konnten somit schon Inhalte, den Umfang eines Kreises und sogar Volumen und Oberflächen von Kegeln, Kugeln etc. bestimmen. Beim Berechnen einer Parabelfläche wird als Erster Archimedes genannt. Es wird noch die Indivisibilienmethode, die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung und die Exaktifizierung der Integralrechnung beschrieben. Die Mathematiker (Cavalieri, Fermat, Leibnitz, Galilei, Newton, Cauchy, Riemann, Gregory, Barrow), die zur Weiterentwicklung beigetragen haben, sind Europäer und wirkten ab dem 16. Jahrhundert.[285]

Beim Unterkapitel „normalverteilte Zufallsvariablen“ gehen die theoretischen Überlegungen auf Carl Friedrich Gauß zurück. Nach ihm ist auch die Glockenkurve

[283] (Malle, Koth, et al. 2019, 245-249)
[284] (Malle, Koth, et al. 2020, 17)
[285] (Malle, Koth, et al. 2020, 57-59)

benannt, die bei der Dichtefunktion einer Normalverteilung entsteht.[286]

4.1.1.9 Zusammenfassung Mathematik verstehen

Bei den Schulbüchern für die ersten bis fünften Klassen werden immer kurze geschichtliche Aspekte genannt. Ab der Klasse 6 werden den geschichtlichen Themen sogar mehrere Seiten gewidmet. Es wird versucht in ein paar Aufgaben geschichtliche Informationen zu packen. Arabische Mathematiker oder Errungenschaften der Araber werden kaum genannt.

Es wird somit der historischen Entwicklung ein Platz eingeräumt. Dabei werden vor allem die Leistungen der Griechen genannt. Kaum zur Sprache kommt, dass deren Erkenntnisse ohne die arabischen Gelehrten wohl verloren gegangen wären oder mühsam wieder entdeckt werden hätten müssen. Vieles kam durch die arabischen Mathematiker wieder zurück zu uns. Die Verbesserungen und neuen Ansätze wie auch herausragende Teilleistungen der Araber werden dabei selten erwähnt. Manche Sätze sind nach Personen benannt, die aber nachweislich nicht die ersten waren, die dies wussten. So war das Pascalsche Dreieck den Arabern schon vorher bekannt, auch der Satz von Pythagoras war bereits lange bekannt. Hier gilt es aber anzumerken, dass er – oder einer seiner Schüler – wohl der Erste war, der den Satz auch bewiesen hatte. (Somit kann man die Benennung nach Pythagoras durchaus nachvollziehen.)

Weiters werden ebenso die europäischen Mathematiker der Neuzeit erwähnt, die die Mathematik, wie wir sie heute kennen, geprägt haben.

4.1.2 Thema Mathematik

Eine weitere Schulbuchreihe ist vom Veritas und Ed. Hölzel Verlag und heißt „Thema Mathematik“. Diese Reihe gibt es für die Schulstufen 5 bis 12. Die Autoren der Unterstufe sind Anita Dorfmayr, August Mistlbacher und Katharina Sator. Es haben noch weitere Personen an der Unterstufenbuchreihe mitgearbeitet, die hier aber nicht genannt werden. Die drei Unterstufenautoren plus Edeltraud Schwaiger und Michaela Zillner haben das Schulbuch für die 1. Klasse Oberstufe geschrieben. Ohne Edeltraud Schwaiger wurden die restlichen Schulbücher für die Oberstufe erarbeitet.

Die Oberstufenbücher sind immer in zwei Bücher unterteilt, für jedes Semester eines.

[286] (Malle, Koth, et al. 2020, 66)

Tabelle 8: Übersicht Thema Mathematik 1-8

Jahrgangstufe	Auflage	Jahr	Seiten	Weitere Produkte
5 (1.AHS)	2.Auflage	2016	225	Übungsbuch Lösungen Interaktive Übungen Serviceteil für LehrerInnen
6 (2.AHS)	4.Auflage	2019	226	Übungsbuch Lösungen Interaktive Übungen Serviceteil für LehrerInnen
7 (3.AHS)	3.Auflage	2019	220	Übungsbuch Lösungen Interaktive Übungen Serviceteil für LehrerInnen
8 (4.AHS)	3.Auflage	2019	217	Übungsbuch Lösungen Interaktive Übungen Serviceteil für LehrerInnen
9 (5.AHS)	4. Auflage	2020	233	Kompetenztraining Lösungen Serviceteil für LehrerInnen Schularbeiten
10 (6.AHS)	3. Auflage	2021	228	Kompetenztraining Lösungen Serviceteil für LehrerInnen Schularbeiten
11 (7.AHS)	2. Auflage	2020	244	Kompetenztraining Lösungen Serviceteil für LehrerInnen Schularbeiten
12 (8.AHS)	1. Auflage	2020	276	Kompetenztraining Lösungen Serviceteil für LehrerInnen Schularbeiten Maturatraining

4.1.2.1 Thema Mathematik 1

Im 1. Kapitel unter dem Teilkapitel „Römische Zahlen“ wird gesagt, dass die Ziffern von 0 bis 9 seit etwa 600 Jahren in Europa bekannt sind. Diese haben sich aus dem arabischen Raum über Spanien nach Europa verbreitet und heißen arabische Ziffern.[287]

Am Ende des 2. Kapitels „Addieren und Subtrahieren“ wird auf Carl Friedrich Gauß hingewiesen, einer der größten Mathematiker. Es wird sein Rechentrick, die Zahlen 1 bis 100 zu addieren, dargestellt. Als Gruppenaufgabe wird den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe gestellt, es für die Zahlen 1 bis 50, 1 bis 500 und 1 bis 1000 mit seinem Trick auszurechnen. Neben der Aufgabe ist noch ein Bild von ihm.[288]

Im Kapitel „Umfang, Fläche, Volumen“ geht es am Ende des Themas um historische Maßeinheiten, speziell die Elle. Es werden dabei kurze Fakten angegeben und für die Schülerinnen und Schüler gibt es dazu ein paar passende Aufgaben gestellt.[289]

4.1.2.2 Thema Mathematik 2

Bei den „Primzahlen“ im ersten Thema wird das Sieb des Eratosthenes erläutert, bei dem alle Primzahlen bis zur einer bestimmten Größe n gefunden werden können. Sie wurde vom Griechen Eratosthenes von Kyrene (* 284 v. Chr., † 202 v. Chr.) entwickelt. Auf der nächsten Seite ist eine Aufgabe, bei der die Schülerinnen und Schüler im Internet nachschauen sollen, welche weiteren Errungenschaften auf den Griechen zurückgehen.[290]

Im Erweiterungsstoff des Kapitels „Symmetrie und Koordinatensystem“ wird gesagt, dass das kartesische Kartensystem auf René Descartes zurückgeht. Neben einer Aufgabe dazu ist ein Bild von ihm dargestellt. Es gibt ein paar Informationen die im Zusammenhang stehen und im Anschluss wieder eine Internet-Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler, bei der drei Fragen beantwortet werden müssen.[291]

---

[287] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2016, 24)
[288] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2016, 53)
[289] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2016, 140-141)
[290] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 20,21)
[291] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 39)

Am Ende des 3. Kapitels „Bruchzahlen“ sind der Geschichte der Bruchzahlen zwei Seiten gewidmet. Vor 3000 Jahren verwendeten die Ägypter Teile von Hieroglyphen. Erste Beispiele wurden im Papyrus Rhind gefunden. Dann werden Informationen über Euklid beschrieben. Euklid kannte schon allgemeine Brüche und Bruchzahlen und diese wurden damals als Verhältnis von Zahlen aufgefasst. Dann wird noch erläutert, woher die Bruchschreibweise kam. Dabei wird Indien genannt. Die Araber haben das übernommen und den Bruchstrich ergänzt. Fibonacci schrieb über den Bruchstrich, dass die obere Zahl die Teile der unteren Zahl angibt. Als nächstes werden die ersten sechs Fibonacci-Zahlen genannt und die Aufgabe an die Schülerinnen und Schüler ist es, weitere Fibonacci Zahlen aus dem Internet herauszusuchen und zu recherchieren, wofür diese gebraucht werden. 1700 war es Euler, der die Bruchzahlen nicht als Zahlenverhältnis, sondern als eigenständige Zahlen aufgefasst werden. Dann wird noch die eulersche Zahl e genannt, die nicht als Bruch dargestellt werden kann. Es gibt noch drei Aufgaben zu e, die gelöst werden können.[292]

Unter dem Thema „Konstruktion von Dreiecken“ gibt es eine Aufgabe zum Fermatschen Punkt. Es ist auch ein Bild und seine Lebensdaten daneben abgebildet.[293]

Im Kapitel „Dreiecke“ soll in einer Gruppenaufgabe der Beweis des „Satz von Thales“ diskutiert werden. Dieser wird auf der vorigen Seite beschrieben. In der nächsten Aufgabe sollen weitere Informationen zu Thales von Milet herausgesucht werden.[294]

Am Ende des 4. Kapitels gibt es Konstruktions-Aufgaben und Informationen zur Eulerschen Gerade. [295]

Unter den vermischten Aufgaben im Kapitel „Terme, Formeln, Gleichungen“ wird das Papyrus Rhind noch einmal aufgegriffen. Es werden Informationen dazu und zur Methode des falschen Ansatzes erläutert. Es gibt zwei Aufgaben für die Schülerinnen und Schüler.[296]

---

[292] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 62,63)
[293] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 77)
[294] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 79)
[295] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 92,93)
[296] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 133)

4.1.2.3 Thema Mathematik 3

Im 1. Kapitel wird die Geschichte des Taschenrechners erwähnt. Hierbei wird Wilhelm Leibnitz mit dem Jahr 1673 genannt. 1960 kam schließlich der erste elektronische Taschenrechner auf den Markt.[297]

Am Ende des Kapitel 5 „Terme“ gibt es zwei Seiten Informationen und Aufgaben rund um das Thema „Pascalsche Dreieck“. Die Schülerinnen und Schüler müssen dabei selbst herleiten, recherchieren und ausprobieren.[298]“

Am Ende des Kapitels „lineare Gleichungen“ geht es um das Thema von „Al-Khwarizmi“. Die erste Seite dreht sich um al-Khwarizmi (etwa 820), dem ersten bedeutenden arabischen Mathematiker. Es gibt eine Abbildung von ihm als Statue. Er hat zwei bedeutende Werke geschrieben. Im ersten Werk beschreibt er das indische Stellenwertsystem, vor allem die Verwendung der Ziffer Null. Durch die lateinische Übersetzung wurde das Stellenwertsystem in Europa bekannt. Außerdem steht genau beschrieben, wie mit Zahlen zu rechnen ist. Daher wurde bald davon gesprochen, nach einem Algorithmus zu rechnen. Noch heute wird mit Algorithmus etwas bezeichnet, das nach einer bestimmten Vorschrift abläuft. In seinem zweiten Werk gibt es viele Aufgaben für Kaufleute, Bankangestellte etc. und es werden Gleichungen aufgestellt und gelöst. Der Titel dieses Werkes trägt den Namen eines Teilgebiets der Mathematik – Algebra. Dieses beschäftigt sich mit Termen und dem Lösen von Gleichungen. Auf der zweiten Seite gibt es zuerst Informationen zur Formelsprache. Diese gibt es seit dem 16. Jahrhundert und daran waren vor allem die französischen und englischen Mathematiker beteiligt. Im Anschluss gibt es sechs Fragen zu den zwei Seiten.[299]

Am Anfang des Kapitels „Pythagoras“ wird das pythagoräische Tripel erklärt und dazu gibt es die Verbildlichung durch Punkte.

---

[297] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 24)
[298] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 110,111)
[299] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 132,133)

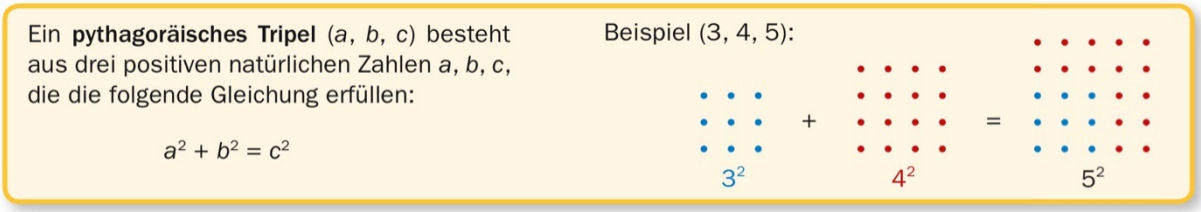


Abbildung 33: Pythagoräische Tripel (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 178)

Es gibt verschiedene Aufgaben dazu. Zwei Seiten später wird der Satz des Pythagoras beschrieben und es gibt die Verbildlichung dazu. Am Ende dieses Kapitels werden zwei Seiten zur Geschichte des Satzes von Pythagoras beschrieben. Es wird beschrieben, woher der berühmte Satz kommt. Angefangen bei den Ägyptern und Babyloniern bis hin zu Pythagoras von Samos. Es wird noch erklärt, wer die Pythagoräer sind und dass diese nur rationale Zahlen kannten. Sie glaubten, alles lässt sich mit rationalen Zahlen erklären, bis sie auf ein Pentagramm stießen. Die Pythagoräer erkannten auch den Zusammenhang zwischen Mathematik und Musik.[300]

4.1.2.4 Thema Mathematik 4

Am Ende des 1. Kapitels „reelle Zahlen“ wird die Geschichte der Zahlen dargestellt. Als Erstes wird die indische Mathematik genannt. Es wird dabei das Stellenwert- und Dezimalsystem genannt. Die Bedeutung einer Ziffer (0 bis 9) ergibt sich durch ihre Stelle. Negative Zahlen gab es seit 600 n. Chr. Bramagupta, ein indischer Mathematiker, entwickelte Regeln zum Rechnen mit negativen Zahlen und die Verwendung der Zahl Null und von Bruchzahlen. Dann wird erklärt, wie das Wissen der Inder über die Araber nach Europa gekommen ist. Die bedeutendsten arabischen Mathemater (al-Chwarizmi, al-Karagi, al-Biruni) werden genannt und dass die Araber den Bruchstrich eingeführt haben, und dass von arabischen Ziffern gesprochen wird, obwohl die Inder diese erschaffen haben. Dann wird Adam Ries genannt, der die dezimale Schreibweise durchsetzte. Außerdem führte Christoph Rudolff das Wurzelzeichen, Leonhard Euler π und die imaginäre Einheit i ein. Am Ende werden noch irrationale Zahlen beschrieben. Die Griechen erkannten, dass nicht alle Zahlen durch Quotienten ganzer Zahlen beschrieben werden können. 1761 bewies Johann Heinrich Lambert, dass π irrational ist. Georg Cantor erkannte 1880, dass es unterschiedliche Formen von unendlich gibt. Die Geschichte der Zahlen ist noch nicht

[300] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 190,191)

abgeschlossen. Zu jedem kleinen Abschnitt gibt es Fragen, die von den Schülerinnen und Schülern beantwortet werden sollen.[301]

Im Kapitel „Lehrsatz des Pythagoras “ wird wieder der Satz definiert und verbildlicht, wie im Schulbuch der 3. Klasse. Dann soll die Länge von Wurzel 5 konstruiert werden. Es wird die Möglichkeit, es mit dem Satz des Pythagoras oder mit dem Satz des Thales zu konstruieren, gegeben. Im Unterkapitel „Beweise“ werden verschiedene Beweise zum Satz des Pythagoras durchgeführt. Am Ende wird in einer Aufgabe gesagt, dass es über 300 solcher Beweise gibt und im Internet recherchiert werden soll, was der 20. Präsident der Vereinigten Staaten, James Abram Garfield, mit dem Satz des Pythagoras zu tun hat. Außerdem soll versucht werden, einen weiteren Beweis zu finden, der nicht auf den zwei Seiten zu finden ist.[302] Am Ende des Kapitels werden sieben Aufgaben mit zusätzlichen Informationen zum Goldenen Schnitt gegeben.[303]

Im Kapitel „Kreis und Kreisteile“ gibt es eine Aufgabe, nämlich die Möndchen des Hippokrates, wobei nichts über die Herkunft gesagt wird. Für rechtwinklige Dreiecke gilt, dass die Summe der Flächeninhalte der beiden sichelförmigen Möndchen gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ist. Der Beweis ist verbildlicht (siehe Abbildung 34) und soll von den Schülerinnen und Schülern begründet werden.[304]

[301] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 20,21)
[302] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 58,59)
[303] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 66,67)
[304] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 104)

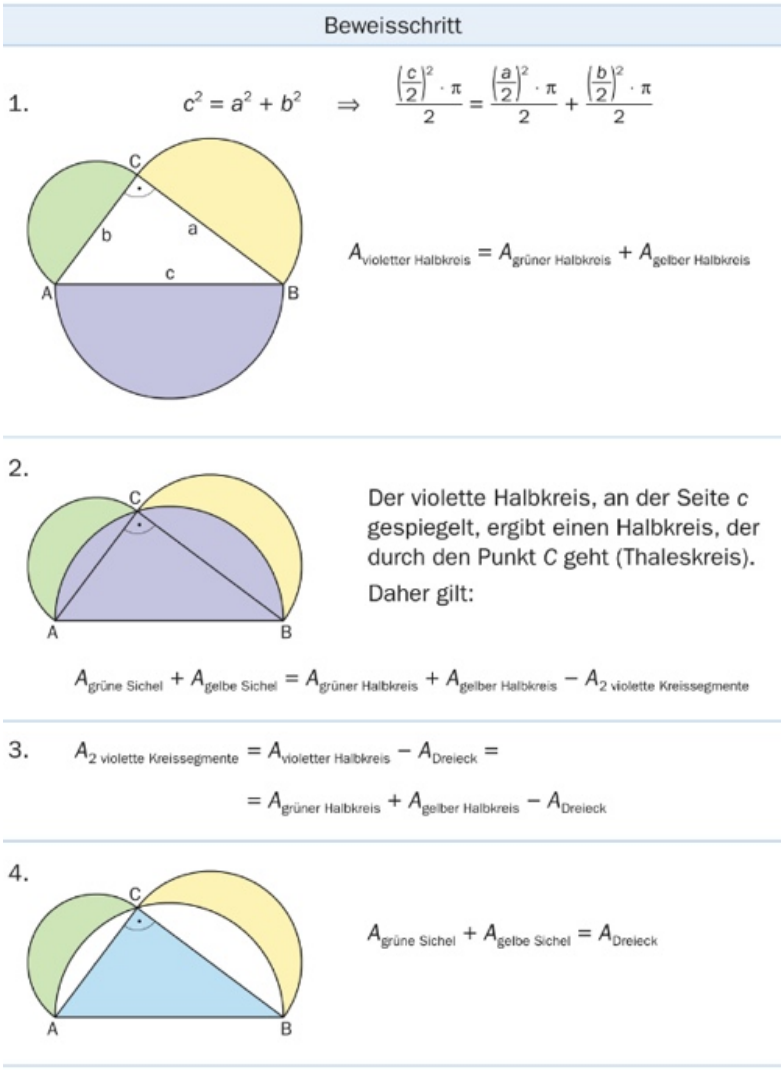


Abbildung 34: Schrittweiser Beweis von Hippokrates (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 104)

Am Ende dieses Kapitels wird die Geschichte der Zahl Pi erzählt. Es wird gesagt, dass in der antiken Hochkultur die Konstante π oftmals mit der Zahl 3 angenähert wurde. Im Papyrus Rhind wurde $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604$ bestimmt und auf einer babylonischen Tontafel stand für $\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$. Archimedes wurde genauer, indem er ein 96-Eck in einen Kreis einschrieb und herausbekam, dass π kleiner als $3\frac{1}{7}$, aber größer als $3\frac{10}{71}$ ist. Obwohl für praktische Anwendungen π nicht so genau sein muss, wurde die Zahl immer weiter genau berechnet. Dies wurde anhand einer Tabelle (siehe Abbildung 35) gezeigt. Es gibt vier Aufgaben für die Schülerinnen und Schüler, die mit den Informationen in Zusammenhang stehen.[305]

[305] (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 106,107)

Jahr	Mathematiker/Quelle	Verfahren	Genauigkeit
1550 v. Chr.	Papyrus Rhind	$\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$	3,1604...
Babylonier	Tontafel	$\pi \approx 3\frac{1}{8}$	3,125
250 v. Chr.	Archimedes	$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$	3,14...
480 n. Chr.	Tsu Chung-Chih	$\pi \approx \frac{355}{113}$	3,1415929...
1220	Fibonacci	$\pi \approx \frac{864}{275}$	3,141818...
1424	Al-Kasi		3,1415926535898732
1579	Francois Vieta	$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots$	3,141592653...
um 1600	Tycho de Brahe	$\pi = \frac{88}{\sqrt{785}}$	3,14085...
1596	Ludolph van Ceulen		35 Dezimalstellen
um 1700	Jacob Marcellis	$\pi \approx 3\frac{100844908737754167989428218489 4}{699718363754081944003523927 1702}$	
1655	John Wallis	$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \ldots$	
1682	Gottfried W. Leibniz	$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$	
1706	John Machin		100 Dezimalstellen
1748	Leonhard Euler		148 Dezimalstellen
1770	Johann H. Lambert	$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{\ldots}}}}}$	
nach 2000		Computerprogramme	1,2 Billionen Dezimalstellen

Abbildung 35: Entwicklung von Pi (Dorfmayr, Mistlbacher und Sator 2019, 107)

4.1.2.5 Thema Mathematik 5

Da in diesem Schulbuch sehr viele Mathematiker in Aufgaben genannt werden, diese aber nicht essenziell wichtig für diese Arbeit sind, werden diese daher nur kurz in einer Tabelle festgehalten. Im Anschluss an diese Tabelle gibt es ausführlichere Informationen zu diesem Schulbuch.

Tabelle 9: Buchaufgaben Thema Mathematik 5

Mathematiker	Bild/Lebensdaten	Was?	Verweis
Georg Cantor	Kein Bild/ 1845-1918	Diagonalverfahren zum Auffinden von rationalen Zahlen	[306]
Moritz A. Stern	Kein Bild/ 1807-1894	Auffinden von rationalen Zahlen	[307]
		Pythagoräische Schnecke	[308].
Georg Cantor	Kein Bild/ 1845-1918	Begründer Mengenlehre	[309]
Euklid	Bild/ ca. 300 v. Chr.	Satz von Euklid, dass es unendlich viele Primzahlen gibt	[310]
Leonhard Euler	Kein Bild/ (1707-1783)	Primzahl-Polynom: $n^2 - 10 + 41$	[311]
Christian Goldbach	Kein Bild 1690-1764	Vermutung, dass jede gerade natürliche Zahl größer 2 sich als Summe zweier Primzahlen darstellen lässt	[312]
		Mersenne'sche Primzahlen der Gestalt $2^n - 1$	[313]
Pierre de Fermat	Kein Bild/ 1607-1665	Fermat'sche Zahlen der Form $F_n = 2^{2^n} + 1$	[314]
Marin Mersenne	Mit Bild/ 1588-1648	Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer Mersenne'schen Primzahl lieftert eine vollkommene Zahl	[315]
Leonhard Euler	Mit Bild/ 1707-1783	Entdeckung, dass die Summe aus der Anzahl der Ecken und der Anzahl der Flächen eines Körpers immer um zwei größer ist als die Anzahl der Kanten	[316]

[306] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 13)
[307] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 13)
[308] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 15)
[309] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 24)
[310] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 32)
[311] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 33)
[312] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 33)
[313] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 33)
[314] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 33)
[315] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 37)
[316] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 45)

Am Ende des 1. Kapitels gibt es eine Doppelseite zum Thema „Zahlen der Musik“. Es wird Pythagoras erwähnt, der einen Zusammenhang zwischen der Saitenlänge eines Monochords und der Tonhöhe gefunden hat.[317]

Am Ende des 2. Kapitels gibt es eine Doppelseite zum Thema „Pascalsches Dreieck“. Es wird ein Bild von ihm gezeigt und ein paar Fakten seines Lebens genannt. Das Pascalsche Dreieck inklusive der Binomialkoeffzienten werden erklärt und es gibt 12 Aufgaben für die Schülerinnen und Schüler.[318]
Unter dem Thema Gleichungen wird die Satzgruppe von Vieta beschrieben, welche auf den Franzosen Francois Viète (* 1540, † 1603) zurückgeht. Neben der Satzgruppe ist ein Portrait von ihm zu sehen.
Auf der gleichen Seite wird noch über Cardanos Geheimnis informiert, bei der die Italiener Scipione del Ferro (etwa 1500) und Niccolo Tartaglia (etwa 1540) die Lösungsformel für kubische Gleichungen fanden. Diese Ergebnisse wurden unter strengster Geheimhaltung weitergegeben und im Endeffekt von Gerolamo Cardano veröffentlicht, wobei sich dann ein Streit entfachte.

In Zahlen, Formeln, Gleichungen von Albrecht Beutelspacher wird dieser Streit gut dargestellt. Gerolamo Cardano war ein Universalgelehrter, der eine wahnsinnig gute Auffassungsgabe hatte. Er wollte in seinem Hauptwerk die gesamte Mathematik beschreiben, inklusive der Formel zur Lösung von kubischen Gleichungen. Da er diese Formel aber nicht hatte, ging er zu Tartaglia und versuchte die Formel unter einem Vorwand zu bekommen. Er versprach, dass er die Lösungsformel unter dem Namen Tartaglias veröffentlichen würde. Tartaglia wollte dies aber nicht, denn wenn die Lösungsformel veröffentlicht wird, dann in seinem eigenen Werk. Cardano gab aber nicht auf und köderte Tartaglia damit, dass er die Lösungsformel nicht veröffentlichen würde und diese geheim halten würde. Dieses Versprechen hat er dann aber nicht eingehalten und der Streit entstand.[319]

Des weiteren wird im Schulbuch eine Lösungsformel für quartische Gleichungen fand Ludovico Ferrari mit dem Namen „Formel IV“. Niels Henrik Abel (* 1802, † 1829) bewies, dass es für höhere Potenzen keine solche Formeln geben kann. Neben

[317] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 38,39)
[318] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 56,57)
[319] (Beutelspacher 2018, 320-322)

diesem geschichtlichen Rückblick ist ein Gemälde von Cardano und seinen Lebensdaten (* 1501, † 1576) zu sehen.[320]

Am Ende des 5. Kapitels „reelle Funktionen und Anwendungen“ wird das grafische Lösen von Gleichungen erläutert. In diesem Zusammenhang wird Richard Dedekind (mit Bild und Geburts- und Sterbejahr) mit seiner Theorie der Intervallschachtelung genannt.[321]

4.1.2.6 Thema Mathematik 6

Unter dem Thema „lineare Optimierung“ wird der sowjetische Mathematiker Leonid Witaljewitsch Kantorowitsch genannt, der als Erster an diesem Thema arbeitete.[322]

In einer Typ-2-artigen Aufgabe wird die Bernoullische Ungleichung definiert und es gibt vier Aufgaben, wo etwas gezeigt werden muss. Diese Ungleichung geht auf den Schweizer Jakob Bernoulli (* 1654, † 1705) zurück. Er ist auf einem Bild zu sehen.[323]

Beim Thema „Konstruieren reeller Zahlen und die Eulersche Zahl e“ wird gesagt, dass das Problem der stetigen Verzinsung auf Jakob Bernoulli zurückgeht. Er wollte wissen, wie sich immer kleiner werdende Verzinsungsperioden auf das Endkapital auswirken. Im Anschluss steht die Definition der Zahl e.[324]

Eine Typ-2-artige Aufgabe beinhaltet das Heron-Verfahren. Es gibt Informationen zur Herkunft und welche Idee dahintersteckt. Es gibt drei Aufgaben für die Schülerinnen und Schüler.[325]

Am Ende des 5. Kapitels „Reihen“ wird Fibonacci eine Doppelseite gewidmet. Der richtige Name des italienischen Mathematikers ist Leonardo von Pisa. Es werden die Kaninchenvermehrung, die Fibonacci-Zahlen, der Goldene Schnitt und das Vorkommen der Fibonacci-Zahlen in der Natur erläutert. [326]

---

[320] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 72)
[321] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 152,153)
[322] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2021, 40)
[323] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2021, 42,43)
[324] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2021, 100)
[325] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2021, 117)
[326] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2021, 144,145)

Im Thema der „elementaren Wahrscheinlichkeit“ wird die Laplace-Wahrscheinlichkeit besprochen. Diese ist auf den französischen Mathematiker und Physiker Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (* 1749, † 1827) zurückzuführen. Die Laplace Regel wird definiert und es ist ein Portrait des Franzosen abgebildet.[327]

Der Satz von Bayes wird nur genannt und nicht gesagt, von wem dieser abstammt.[328]

4.1.2.7 Thema Mathematik 7

Es gibt eine Doppelseite zum Taylorpolynom, es wird jedoch nicht gesagt, auf wem dieses zurückgeht.[329]

Am Ende des 1. Teiles wird in einer Typ-2-artigen Aufgabe die Viviani-Kurve implementiert. Es wird gesagt, dass diese Kurve nach dem Italiener Vincenzo Viviani (* 1622, † 1703) benannt wurde. Er war ein Mitarbeiter von Galileo Galilei und verfasste über ihn eine Biografie. Er rekonstruierte Schriften von Archimedes und Euklid. Nach dem kurzen historischen Rückblick gibt es drei Aufgaben für die Schülerinnnen und Schüler.[330]

Im Kapitel „diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen“ wird gesagt, dass Jakob Bernoulli einer der Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist.[331]

Unter dem Thema „Anwendungen der Differentialrechnung“ wird das Newton-Verfahren erklärt. Es gibt keine geschichtlichen oder sonstigen Informationen dazu.[332] In diesem Kapitel wird noch die Regel von l’Hospital beschrieben und die Schülerinnen und Schüler können in einer dazu formulierten Aufgabe die Biografie vom Franzosen Marquis de l’Hospital recherchieren und herausfinden, wer die Regel eigentlich entdeckt hat.[333]

---

[327] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2021, 206)
[328] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2021, 214)
[329] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 90,91)
[330] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 111)
[331] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 183)
[332] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 204)
[333] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 207)

Am Ende dieses Kapitels gibt es zwei Zusatzseiten mit dem Thema „Geschwindigkeit und Beschleunigung“. Es wird beschrieben, dass Isaac Newton und Gottfried Willhelm Leibnitz die Differentialrechnung entwickelt haben, um die Geschwindigkeit und die Beschleunigung bewegter Objekte exakt beschreiben zu können. Außerdem wird noch darauf hingewiesen, dass der italienische Physiker Galileo Galilei die Gesetzmäßigkeiten der Fallbewegung am schiefen Turm von Pisa entdeckt hat. Es gibt in diesem Kontext fünf Aufgaben für die Schülerinnen und Schüler.[334]

4.1.2.8 Thema Mathematik 8

Am Anfang des 1. Kapitels, „Grundlagen der Integralrechnung“, wird gesagt, dass es darum geht, unter krummen Linien den Flächeninhalt zu berechnen. Zudem wird berichtet, dass Archimedes schon 250 v. Chr. versucht hat die Kreisfläche anzunähern, indem er regelmäßige Vielecke in den Kreis einschrieb.[335]
Bernhard Riemann (* 1826, † 1866) wird mit Definition und Interpretation der Riemann Summe genannt. Er hat bewiesen, dass für stetige Funktionen das bestimmte Integral immer existiert.[336]

Am Ende dieses Kapitels gibt es eine Doppelseite zum geschichtlichen Hintergrund der Integralrechnung. Archimedes hat nicht nur versucht, die Kreisfläche, sondern auch die Fläche unter krummlinigen Figuren zu berechnen. Schon vor ihm probierten viele griechische Mathematiker, mit der sogenannten „Exhaustionsmethode“, durch Dreiecke oder Rechtecke die Flächen „auszuschöpfen“. Es gibt zwei Aufgaben für die Schülerinnen und Schüler. Es wird noch Bernhard Riemann genannt, der schon erkannt hat, dass Funktionen integrierbar sind, die eine oder mehrere Sprungstellen haben. Der Japaner Ito Kiyoshi (* 1915, † 2008) definierte einen sinnvollen Integralbegriff für Funktionen, deren Werte ständig unvorhersehbar hin und herspringen, wie zum Beispiel bei Aktienkursen. Auch dazu gibt es für die Schülerinnen und Schüler vier Aufgaben.[337]

Am Ende des 2. Kapitels „Anwendung der Integralrechnung“ wird das Prinzip von Cavalieri erläutert. Dieses besagt, dass zwei Körper das gleiche Volumen haben, wenn

[334] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 210,211)
[335] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 8)
[336] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 14)
[337] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 42,43)

jede Schnittebene parallel zur Grundebene in gleicher Schnitthöhe beider Körper den gleichen Flächeninhalt hat. Francesco Cavalieri ist ein italienischer Mathematiker, der in seiner Zeit (* 1598, † 1647) schon Grundideen zur Integralrechnung hatte. Cavalieri nahm Bezug auf Archimedes und Kepler. Es gibt noch weitere Informationen und Aufgaben für die Schülerinnern und Schüler.[338]

Im Thema „Approximation der Binomialverteilung“ wird Carl Friedrich Gauß genannt, der 1809 die Gauß'sche Glockenkurve eingeführt hat.[339]

Am Ende des Kapitels „Wahrscheinlichkeiten“ gibt es biografische Informationen, mathematische Inhalte, Beweise und Aufgaben rund um das Thema „Gauß und sein Integral“.[340]

In einer Typ-2-Aufgabe noch die Bateman-Funktion erklärt, die auf den britischen Mathematiker Harry Bateman (* 1882, † 1946) zurückgeht.[341]

4.1.2.9 Zusammenfassung Thema Mathematik

Es gibt sehr viele Doppelseiten, bei denen geschichtliche Informationen verpackt sind. Dazu werden am Ende immer Aufgaben gestellt und somit müssen die Schülerinnen und Schüler über die Inhalte nachdenken, eventuell recherchieren und auch rechnen. Durch diese Aufgaben ist es für die Lehrperson auch leichter, da diese sich nicht selbst Aufgaben überlegen muss. Einige Aufgaben könnten noch mehr in den „normalen Lehrstoff“ eingebaut werden. Aus zeitlicher Sicht stellt sich hier die Frage, ob diese Zusatzseiten überhaupt im Unterricht durchgenommen werden. Es gibt zwar zwischendurch immer mal eine Aufgabe, wo geschichtliche Informationen zu einer Aufgabe hinführen, aber dies ist (außer in der 5. Oberstufe mit 12 Aufgaben auf 45 Seiten) sehr selten. Es ist den Autoren gelungen, nicht „nur“ geschichtliche Informationen darzustellen, sondern diese auch gleich mit Aufgaben zu verknüpfen.
Außerdem werden hier die arabischen Mathematiker ein wenig mehr behandelt, als in „Mathematik verstehen“.

[338] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 68,69)
[339] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 76)
[340] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 110,111)
[341] (Dorfmayr, Mistlbacher, et al. 2020, 257)

4.2 Zusammenfassung

In beiden Schulbuchreihen wird deutlich, dass die Schulbuchautoren generell sehr viel Wert auf die Geschichte der Mathematik legen. Es kommen überall geschichtliche Verweise zu den Erfindern oder auch zusätzliche geschichtliche Informationen vor. Da gerade die Unterstufe sehr viel Geometrie beinhaltet, werden auch vorrangig die Griechen genannt. Aber auch andere Kulturen und Mathematiker, wie die arabischen Mathematiker werden erwähnt.

Grundsätzlich wäre noch Platz für zusätzliche Informationen und meiner Meinung nach sollten einige Inhalte der arabischen Mathematiker unbedingt inkludiert sein. Aber es stellt sich hier wieder die Frage, ob dies am Ende sinnvoll in der Schule genutzt werden würde.

5. Fazit/Ausblick

Verschiedene Völker und Kulturen haben erstaunliche Leistungen auf dem Gebiet der Mathematik hervorgebracht, und das bereits vor Jahrhunderten und Jahrtausenden. Dabei sind die Errungenschaften der Griechen wohlbekannt, auch im schulischen Kontext wird den Schülerinnen und Schülern bewusst sein, dass beispielsweise vieles vom Stoff der Sekundarstufe I auf Erkenntnissen der Griechen fußt. Darauf deuten auch beispielsweise die Bezeichnungen wie Satz von Pythagoras, der Satz von Euklid oder die Trigonometrie.

Nicht nur durch einen eurozentrischen Blick gehen die Leistungen der Inder, Chinesen, Babylonier, aber eben auch die der Araber etwas unter. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, welche mathematischen Kenntnisse die Araber hatten und welche Rolle sie für die heutige Mathematik spielten. Sie beschäftigten sich mit dem bereits angehäuften Wissen der Griechen, das in unseren Breiten wieder verloren gegangen war, übersetzten es ins Arabische, verbesserten und ergänzten es. Noch heutzutage erkennt man den arabischen Einfluss in den Namen Algebra bzw. Algorithmus.

In Schulbüchern wird durchaus auf den arabischen Einfluss Bezug genommen, hier sind insbesondere die arabisch-indischen Zahlen zu nennen. Auch die eben genannten Wörter Algebra respektive Algorithmus und der dahinterstehende Al-Hwarizmi werden genannt. Die beiden untersuchten Schulbuchreihen erwähnen also arabische Leistungen, an vielen Stellen fehlen allerdings wesentliche Errungenschaften oder erstaunliche Leistungen der arabischen und muslimischen Mathematiker.

Beispielhaft sei hier das Thema der Kreiszahl Pi genannt. Während die Leistungen rund um die Zahl Pi aufgelistet werden, welche Kulturen und Völker wie viele Stellen kannten, welche Näherungswerte sie verwendeten, wird al-Kaschi in den Schulbüchern nicht genannt, obgleich er für die damalige Zeit eine erstaunliche Genauigkeit erreichen konnte. Ein zusätzlicher Fakt wäre auch, dass die arabischen Mathematiker den negativen Zahlen keine Beachtung schenkten, obwohl die Inder schon damit gerechnet haben. Und das somit auch als Rückschritt zu bezeichnen ist.

Es gibt aber natürlich noch mehr geschichtliche arabische Inhalte, die genannt werden könnten.

Als Anknüpfungspunkt für weitere Forschungen bietet sich hier an, einerseits die weiteren verfügbaren Schulbuchreihen zu untersuchen, andererseits auch eine Längsschnittstudie, die die Veränderungen in den Büchern im Wandel der Zeit untersucht. So haben beispielsweise die Schulbuchreihen auch auf den geschlechterbewussten Sprachgebrauch reagiert. Inwiefern auch darauf reagiert wird, den eurozentrischen Standpunkt etwas abzuschwächen, kann ebenso untersucht werden.

Mittlerweile sind die Sozialen Medien aus dem Leben nicht mehr wegzudenken, auch (oder gerade) junge Menschen kommen dadurch mit den unterschiedlichsten Themen in Kontakt. Das kann eine Gefahr, aber auch eine Chance sein. Im schulischen Kontext werden teilweise Fragen aufgeworfen, weil einzelne Schülerinnen und Schüler ein mathematisches Problem gefunden haben, ein Rätsel nicht lösen können oder auch andere Rechenmethoden gefunden haben. So kursieren sehr viele Videos, wie beispielsweise in China schriftlich bzw. graphisch multipliziert wird oder aber welche Rechentricks es gibt, im Internet. Dies kann wiederum als Anknüpfungspunkt dienen, wo beispielsweise verschiedene Multiplikationsverfahren den Schülerinnen und Schülern gezeigt werden. Laut Studien[342] [343] und aus Erfahrungen des eigenen Unterrichts sind viele Schülerinnen und Schüler durch diese Videos auch motiviert sich mehr mit der Mathematik auseinanderzusetzen und vielleicht könnte daher auch versucht werden, direkt Videos für den Unterricht zu erstellen. Es könnte beispielsweise auch gezeigt werden, dass das römische Zahlensystem wenig geeignet war, komplexe Berechnungen anzustellen.

Hier gilt anzumerken, dass der zu behandelnde Stoff gerade in Mathematik nicht wenig ist. Viele Lehrkräfte bemängeln, dass sie kaum noch den Stoff in der Gänze behandeln können. Es stellt sich daher die Frage, inwiefern neue Inputs sich zeitlich überhaupt ausgehen. Bei besonders leistungsstarken Klassen, in einem etwaigen Wahlpflichtfach oder Wahlmodul, die es an einigen Schulen gibt oder in Stunden vor

[342] (Marsch 2012)
[343] (Quecke 2019)

Ferien oder nach Notenschluss bieten sich aber derartige Einheiten dennoch an. Oder aber in Klassen eines naturwissenschaftlichen Zweiges könnte mehr Zeit sein, da mehr Mathematikstunden in der Woche zur Verfügung stehen, als in anderen Klassen.

Teilweise reichen auch nur kurze Anmerkungen, um den Einfluss auch anderer Kulturen zu demonstrieren. Erkennbar wird das beispielsweise beim Sexagesimalsystem, das sich in den Winkeln oder in der Zeitmessung bis heute erhalten hat und auf die Babylonier zurückgeht. Wenn dies im Unterricht an passender Stelle erwähnt wird, wird erkennbar, dass auch andere Kulturen und Völker bereits große Leistungen vollbringen konnten, von denen wir heute noch profitieren bzw. die wir heute noch nutzen.

Hier gilt generell noch anzumerken, dass die Schulbücher nicht den tatsächlichen Unterricht widerspiegeln. Wie die Lehrkraft unterrichtet, was sie erzählt, wo sie den Fokus legt, ist individuell unterschiedlich. Somit kann auch nicht garantiert werden, dass bei Änderungen im Schulbuch diese auch so im Unterricht ihren Durchschlag finden. Auch hier kann untersucht werden, inwiefern die Schulbücher als Grundlage für den schulischen Unterricht dienen oder wie sehr die Lehrkräfte vom Vorschlag des Buches abweichen, den Stoff zu strukturieren, zu erklären und zu bebildern. Vielleicht würde es sich somit anbieten, ein Zusatzheft zu produzieren, um den Lehrpersonen geschichtliche Informationen zukommen zu lassen, ohne das Schulbuch verändern zu müssen.

Da ich schon seit längerer Zeit in der Praxis tätig bin, weiß ich, dass generell zu wenig Zeit für solche Zusatzaufgaben zur Verfügung steht. Trotzdem würde ich mir wünschen, dass ich manchmal mehr Zeit aufwenden könnte, um Dinge herzuleiten bzw. zu „nachzuspielen“, was die Mathematiker der Geschichte herausbekommen haben. Schülerinnen und Schüler sind oftmals auch sehr dankbar über zusätzliche „Nebeninfos“, da sie sich diese Dinge manchmal besser merken, als den „normalen“ Stoff oder auch den einen oder anderen Schüler oder Schülerin mehr ansprechen, da es etwas Geschichtliches beinhaltet oder auch ohne Druck vermittelt wird. Ich als Lehrperson wäre dankbar für Hilfestellungen mittels Zusatzheft, passend zum Schulbuch, oder App etc. In den zwei untersuchten Schulbuchreihen sind aber auch schon Informationen dabei gewesen, die sinnvoll mit den Schülerinnen und Schülern

genutzt werden können. Jede Lehrperson muss selbst entscheiden, wo es sich anbietet, mehr in die mathematische Geschichte einzutauchen.
Abschließend ist zu sagen, dass es unheimlich schwer ist, sich für eine Seite (mehr Geschichtliches oder zu wenig Zeit dafür) zu entscheiden. Es sollte individuell pro Jahrgang, Unterrichtsstunden und auch Interesse entschieden werden. Wichtig ist aber, dass die Lehrpersonen Unterstützung dabei bekommen sollten, wenn sie sich dazu entscheiden, von den „normalen“ Unterrichtsinhalten abzuweichen.

6. Anhang

6.1. Literaturverzeichnis

Berggren, J. Lennart. 1986. *Mathematik im mittelalterlichen Islam.* New York: Springer-Verlag.

Beutelspacher, Albrecht. 2018. *Zahlen, Formeln, Gleichungen - Algebra für Studium und Unterricht.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Borys, Thomas. 2011. *Codierung und Kryptologie - Facetten einer anwendungsorientierten Mathematik im Bildungsprozess.* Wiesbaden: Vieweg und Teubner Verlag.

Brückler, Franka Miriam. 2017. *Geschichte der Mathematik kompakt - Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometie, Algebra, Zahlentheorie und Logik.* Berlin: Springer-Verlag.

Burton, David M. 2011. *THE HISTORY of MATHEMATICS - An Introduction - Seventh Edition.* New York: McGraw-Hill Companies.

C.J.Scriba, P. Schreiber. 2010. *5000 Jahre Geometrie - Geschichte, Kulturen, Menschen.* Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer - Verlag.

Danielsson, Holger. 2021. *Magische Quadrate.* 19. 07.

Deiser, Oliver. 2021. 13. Dezember. Zugriff am 20. Juli 2022. https://www.aleph1.info/Resource?method=get&obj=Pdf&name=mengenlehre2.pdf&pagestart=13&pageend=18.

Delahaye, Jean-Paul. 1999. *Pi - Die Story .* Basel: Birkhäuser Verlag.

Dietzfelbinger, Martin, Kurt Mehlhorn, und Peter Sanders. 2014. *Algorithmen und Datenstrukturen - Die Grundwerkzeuge.* Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

Djksterhuis, E.J. 1983. *Die Mechanisierung des Weltbildes.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Dorfmayr, Anita, August Mistlbacher, Katharina Sator, Edeltraud Schwaiger, und Michaela Zillner. 2020. *Thema Mathematik 5.* Linz: Veritas.

Dorfmayr, Anita, August Mistlbacher, Katharina Sator, und Michaela Zillner. 2021. *Thema Mathematik 6.* Linz: Veritas.

—. 2020. *Thema Mathematik 7.* Linz: Veritas verlag.

—. 2020. *Thema Mathematik 8.* Linz: Veritas-Verlag.

Dorfmayr, Anita, August Mistlbacher, und Katharina Sator. 2019. *Thema Matheamtik 4.* Linz, Wien: Veritas & Ed. Hölzel.

—. 2016. *Thema Mathematik 1.* Linz, Wien: Veritas & Ed.Hölzel.

—. 2019. *Thema Mathematik 2.* Linz, Wien: Veritas & Ed. Hölzel Verlag.

—. 2019. *Thema Mathematik 3.* Linz, Wien: Veritas & Ed. Hölzel.

Eckhardt, Ulrich. 2022. *Pi, die Bibel und die Cheopypyramide.* Universität Hamburg, 17. August.

Falkenberg, Thomas. 1996. *Grammatiken als empirische axiomatische Theorien.* Tübingen: Max Niemeyer Verlag.

Fritzsche, Klaus. 2007. *Mathematik für Einsteiger - Vor- und Brückenkurs zum Studienbeginn.* Wuppertal: Springer Verlag.

George, Joseph. 2010. *The crest of the Peacock - Non-European Roots of Mathematics.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Gericke, Helmuth. 1992. *Mathematik in Antike und Orient.* Wiesbaden: Fourier Verlag.

—. 2003. *Mathematik in Antike, Orient und Abendland.* Wiesbaden: Fourier-Verlag GmbH.

H. Kaiser, W. Nöbauer. 1984. *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

H.-W. Alten, A.Djafari Naini, b. Eick, M. Folkerts, H. Schlosser, K.-H. Schlote, H. Wesemüller-Kock, h. Wußing. 2014. *4000 Jahre Algebra - Geschichte - Kulturen - Menschen - 2. Auflage.* Berlin - Heidelberg: Springer - Verlag.

Herrmann, Dietmar. 2014. *Die antike Mathematik - eine Geschichte der griechischen Mathematik, ihrer Probleme und Lösungen.* Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

—. 2016. *Mathematik im Mittelalter - Die Geschichte der Mathematik des Abendlands mit ihren Quellen in China, Indien und im Islam.* Berlin - Heidelberg: Springer - Verlag.

Herrrmann, Norbert. 2016. *Mathematik und Gott und die Welt - Was haben Kunst, Musik oder Religion mit Mathematik am Hut?* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Hodgkin, Luke Howard. 2005. *A history of mathematics - from mesopotamia to modernity.* Oxford : Oxford University Press.

John N. Crossley, Alan S. Henry. 1990. *Thus Spake al-Khwarizmi - A Translation of the Text of Cambridge University Library Ms. Ii. vi. 5.* Herausgeber: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086090900481. Bd. 17. Cambridge: Historia - Mathematica.

Juschkewitsch, A. P. 1964. *Geschichte der Mathematik im Mittelalter.* Leipzig: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft.

Juschkewitsch, A. P., und B. A. Rosenfeld. 1960. *Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Katz, Victor, Annette Imhausen, Eleanor Robson, Joseph Dauben, Kim Plofker, und J. Lennart Berggren. 2007. *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam.* Princeton: Princeton University Press.

Launay, Mickaël. 2018. *Der große Roman der Mathematik - Von den Anfängen bis heute.* München: C.H. Beck.

Linden, Sebastian. 2012. *Die Algebra des Omar Chayyam.* Braunschweig: Springer Spektrum.

Mainzer, Dr. Klaus. 1980. *Geschichte der Geometrie.* Mannheim - Wien - Zürich: B. I. - Wiienschaftsverlag.

Malle, Univ.-Prof. Mag. Dr. Günther, Hochschulprofessorin Mag. Dr. Maria Koth, Prof. Mag. Dr. Helga Woschitz, Prof. Mag. Sonja Malle, Prof. Mag. Dr. Bernhard Salzger, und MMag. Dr. Andreas Ulovec. 2017. *Mathematik verstehen 5.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

—. 2018. *Mathematik verstehen 6.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

—. 2019. *Mathematik verstehen 7.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

—. 2020. *Mathematik verstehen 8.* Wien: Österreichische Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Marsch, Dr. Ulrich. 2012. *Metastudie: Erfolgreicher Unterricht ist digitl - aber nicht ausschließlich.* 12. Dezember. Zugriff am 14. Juli 2023. https://idw-online.de/de/news686283.

Michael Merz, und Mario v. Wüthrich. 2013. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler - Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen.* München: Franz Vahlen .

Naini, Alireza Djafari. 1982. *Geschichte der Zahlentheorie im Orient im Mittelalter und zu Beginn der Neuzeit unter besonderer Berücksichtigung persicher Mathematiker.* Braunschweig : Verlag Klose & co.

Nestle, Prof. Dr. Wilhelm. 2020. *Geschichte der griechischen Literatur - Band II.* Berlin: Walter De Gruyter & Co.

Peiffer, Jeanne, und Amy Dahan-Dalmedico. 1994. *Wege und Irrwege - Eine Geschichte der Mathematik.* Basel - Boston - Berlin: Birkhäuser Verlag.

Popp, Walter. 1987. *Wege des exakten Denkens - Vier Jahrtausende Mathematik.* Augsburg: Weltbild Verlag.

Priesner, Claus. 2011. *Geschichte der Alchemie.* München: C.H. Beck oHG.

Quecke, Franka. 2019. *Spiegel - Nichts verstanden, zurückspulen, noch mal schauen.* 4. Juni. Zugriff am 14. Juli 2023. https://www.spiegel.de/lebenundlernen/schule/studie-ueber-youtube-fast-jeder-zweite-schueler-lernt-mit-videos-a-1270498.html.

Salzger, Prof. Mag. Dr. Bernhard, Prof. Mag. Judith Bachmann, Prof. Mag. Andrea Germ, Prof. Mag. Barbara Riedler, HS-Prof. Mag. Dr. Klaudia Singer, und MMag. Dr. Andreas Ulovec. 2021. *Mathematik verstehen - 1.* Wien: Österreischicher Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

—. 2015. *Mathematik verstehen 2.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

—. 2016. *Mathematik verstehen 3.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

—. 2017. *Mathematik verstehen 4.* Wien: Österreichische Bundesverlag Schulbuch GmbH &Co. KG.

Schiedermeier, Reinhard, und Klaus Köhler. 2011. *Das Java-Praktikum - Aufgaben und Lösungen zum Programmierenlernen mit Java 7.* Heidelberg: dpunkt Verlag GmbH.

Schubert, Prof. Dr Hermann. 1964. *Mathematische Mußestunden.* Berlin: Walter de Gruyter & Co Verlag.

Schuppar, Berthold. 1999. *Elementare Numerische Mathematik - Eine problemorientierte Einführung für Lehrer und Studierende.* Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH.

Strick, Heinz Klaus. 2020. *Mathematik - einfach genial! Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Cantor.* Leverkusen: Springer Verlag.

—. 2017. *Mathematik ist schön - Anregungen zum Anschauen und Erforschen für Menschen zwischen 9 und 99.* Leverkusen: Springer Verlag.

Tropfke, Dr. Johannes. 1923. *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter -*

Fünfter Band I. Ebene Trigonomerie - II. Sphärik und spärische Trigonometrie. Berlin und Leipzig: Walter de Grypter & Co.

Tropfke, Johannes. 1980. *Geschichte der Elementarmathematik - Band 1 - Arithmetik und Algebra -4. Auflage.* Berlin - New York: Walter de gruyter & Co.

Velminski, Wladimir. 2009. *Form Zahl Symbol - Leonhard Eulers Strategien der Anschaulichkeit.* Berlin: Akademie - Verlag.

Victor Katz, Karen Hunger Parshall. 2020. „Algebraic thought in Medieval Islam.“ In *Taming the Unknown*, 132-173. Princeton: Princeton University Press.

Walz, Guido. 2017. *Lexikon der Mathematik.* 2 Bde. Heidelberg: Springer-Verlag.

Wußing, Hans. 2008. *6000 Jahre Mathematik - Eine kulturgeschichtliche Zeitreise - I: Von den Anfängen bis Leibnitz und Newton.* Berlin - Heidelberg: Springer - Verlag.

—. 1989. *Adam Rieß - Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner Band 95.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

6.2 Abbildungsverzeichnis

6.3 Tabellenverzeichnis