Die Keplerschen Gesetze

Franz Embacher

Fakultät für Physik der Universität Wien
Didaktik der Astronomie, Sommersemester 2009
http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/DidaktikAstronomie/ss2009/

1 Das Keplerproblem

Die Keplerschen Gesetze drücken einige wichtige Aspekte der Lösungen des Bewegungsproblems im Newtonschen gravitativen Zentralfeld – des so genannten *Keplerproblems* – aus. Dabei bewegt sich ein Satellit der Masse m im Gravitationsfeld eines im Raum als *fixiert* gedachten Zentralkörpers der Masse M. Ist $m \ll M$, so ist die Wirkung des Satelliten auf den Zentralkörper so klein, dass es gerechtfertig ist, letzteren als unbewegt zu betrachten (wie es etwa für die Bewegung der Erde im Gravitationsfeld der Sonne der Fall ist). Ist die Bedingung $m \ll M$ nicht erfüllt, so müssen die Bewegungen beider Körper im Gravitationsfeld des jeweils anderen ermittelt werden. Dieses gekoppelte System lässt sich aber leicht auf das Keplerproblem zurückführen. Darauf werden wir im letzten Abschnitt eingehen.

Mathematisch wird das Keplerproblem durch die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{x}}(t) \;=\; -\frac{GM}{|\vec{x}(t)|^3}\,\vec{x}(t) \tag{1.1}$$

ausgedrückt, wobei der Zentralkörper im Ursprung des Koordinatensystems sitzt und $\vec{x}(t)$ der Ortsvektor des Satelliten zur Zeit t ist.

Wir besprechen zunächst einige grundlegende Eigenschaften der Lösungen von (1.1). Aufgrund der Erhaltung des *Drehimpulses* (die ihrerseits aus dem Umstand folgt, dass das vom Zentralkörper erzeugte Gravitationsfeld radialsymmetrisch ist) verläuft die Bewegung stets in einer Ebene. Wir können das Koordinatensystem so legen, dass es sich dabei um die xy-Ebene handelt. Mit dieser Wahl reduziert sich (1.1) auf ein System von Differentialgleichungen für die zwei Funktionen $x(t)$ und $y(t)$. Der Drehimpuls weist dann in die z-Richtung. Ist L_z, seine z-Komponente, gleich 0, so verläuft die Bewegung entlang eines radialen, vom Zentralkörper ausgehenden Strahls (mit der Gefahr eines Sturzes in diesen). Wir beschränken uns hier auf Bewegungen mit $L_z \neq 0$. Die *Energie*

$$E \;=\; \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} - \frac{GMm}{|\vec{x}|} \tag{1.2}$$

ist ebenfalls eine Erhaltungsgröße. Ist $E \geq 0$, so ist die Bewegung ungebunden. Wir beschränken uns hier auf Bewegungen mit $E < 0$ (und, wie bereits erwähnt, $L_z \neq 0$), den eigentlichen Gegenstand der Keplersche Gesetze.

2 Das erste Keplersche Gesetz

Es besagt: Die Bahn des Satelliten ist stets eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt sich der Zentralkörper befindet.

3 Das zweite Keplersche Gesetz

Das zweite Keplersche Gesetz (der *Flächensatz*) besagt: Der Ortsvektor $\vec{x}$ (d.h. der Vektor vom Zentralkörper zum Satelliten) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Dieses Gesetz ist eine unmittelbare Folge der Drehimpulserhaltung: Die z-Komponente des Drehimpulses ist durch

$$L_z = m\,r^2\,\frac{d\varphi}{dt} \tag{3.3}$$

gegeben, wobei r und φ die Polarkoordinaten in der xy-Ebene sind.[1] Andererseits ist der während des infinitesimalen Zeitintervalls dt vom Ortsvektor überstrichene Flächeninhalt gleich

$$dA = \frac{1}{2}\,r^2 d\varphi \equiv \frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\varphi}{dt}\,dt = \frac{L_z}{2m}\,dt, \tag{3.4}$$

woraus sich der Flächensatz ergibt.

4 Das dritte Keplersche Gesetz

Die traditionelle Formulierung des dritten Keplerschen Gesetzes ist eine Aussage über *alle möglichen* Satellitenbewegungen. Es besagt, dass sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen der Bahnellipsen verhalten. Bezeichnen wir die Umlaufszeit mit T und die große Halbachse der Bahnellipse mit a, so besagt dieses Gesetz, dass der Quotient T^2/a^3 für alle möglichen Satellitenbahnen den gleichen Wert hat.

Eine Formulierung, die das gleiche leistet und darüber hinaus noch den Wert dieses Quotienten angibt, ist schlicht und einfach die Beziehung

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}\,. \tag{4.5}$$

Sie ist für jede Lösung von (1.1) mit $E < 0$ und $L_z \neq 0$ erfüllt und insofern von besonderer astrophysikalischer Relevanz, als sie es ermöglicht, die Masse M des Zentralkörpers zu ermitteln, sofern a und T (zwei Größen, die oft beobachtet werden können) bekannt

[1] Sie sind durch $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ definiert.

sind. Ihr haben wir es beispielsweise zu verdanken, dass die Masse der Sonne bekannt ist. Für den Spezialfall einer Kreisbahn ist (4.5) eine einfache Konsequenz der (Ihnen wahrscheinlich bereits aus dem Physikunterricht bekannten) Beziehung

$$v^2 = \frac{GM}{r}, \tag{4.6}$$

wobei v die Geschwindigkeit des Satelliten und r der Radius der Kreisbahn ist.

Als Ergänzung geben wir noch einige weitere Informationen über die Bahnellipse an: Ihre große Halbachse ist durch

$$a = -\frac{GMm}{2E}, \tag{4.7}$$

ihre kleine Halbachse durch

$$b = \frac{L_z}{\sqrt{-2mE}} \tag{4.8}$$

gegeben. Die (*numerische*) *Exzentrizität* einer Ellipse, definiert durch

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \tag{4.9}$$

also der Quotient "Brennweite/große Halbachse", ist ein Maß für die Abweichung von der Kreisform. Für die Bahnellipse der Keplerbewegung ist sie gleich

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\,{L_z}^2}{G^2M^2m^3}}\,. \tag{4.10}$$

Für die Erdbahn beträgt sie 0.0167, für die Bahn des Merkur 0.2056. Mit Hilfe der Größe

$$p = \frac{b^2}{a} = (1 - \varepsilon^2)\,a = \frac{{L_z}^2}{GMm^2} \tag{4.11}$$

lässt sich die Bahnellipse in Polarkoordinaten durch die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\,\cos\varphi} \tag{4.12}$$

darstellen[2]. Sie ist so zu verstehen: Jeder gegebene Wert von φ definiert einen vom Zentralkörper aus gezogenen Strahl. Dieser schneidet die Ellipse im Abstand r. Dabei wurde das *Perihel* (der "sonnennächste" Punkt; er entspricht dem Wert $\varphi = 0$) in die

[2]In kartesischen Koordinaten nimmt sie die Form

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{p^2}\left(x + \frac{\varepsilon\,p}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{p^2}\,y^2 = 1 \tag{4.13}$$

an.

positive x-Achse gelegt, womit das *Aphel* (der "sonnenfernste" Punkt; er entspricht dem Wert $\varphi = \pi$) auf der negativen x-Achse zu liegen kommt. Die Entfernungen dieser beiden Punkte vom Zentralkörper sind durch

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{1+\varepsilon} \qquad \text{und} \qquad r_{\text{max}} = \frac{p}{1-\varepsilon} \tag{4.14}$$

gegeben.

Die große Halbachse a wird oft als "mittlere Entfernung" des Satelliten vom Zentralkörper bezeichnet. Diese Ausdrucksweise ist nicht ganz richtig: Die zeitlich über einen kompletten Umlauf gemittelte Entfernung ist etwas größer (nämlich $(1+\frac{\varepsilon^2}{2})a$), aber immerhin gilt

$$a = \frac{1}{2}\left(r_{\text{min}} + r_{\text{max}}\right), \tag{4.15}$$

d.h. die große Halbachse ist gleich dem Mittelwert aus dem kleinsten und dem größten Abstand von Zentralkörper und Satellit. Interessanterweise ist das über einen kompletten Umlauf genommene zeitliche Mittel des Kehrwerts r^{-1} gleich a^{-1}. Diese Beobachtung ist die Grundlage für den *Virialsatz*, der besagt, dass das zeitliche Mittel der kinetischen Energie gleich $-\frac{1}{2}$ mal dem zeitlichen Mittel der potentiellen Energie ist.

Mit Hilfe der oben angegebenen Beziehungen kann das zweite Keplersche Gesetz in die Form

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{GMa(1-\varepsilon^2)}}{r^2} \tag{4.16}$$

umgeschrieben werden.

5 Das Zweikörperproblem

Zum Abschluss gehen wir noch auf das gravitative Zweikörperproblem ein. Es handelt sich dabei um ein System aus zwei Körpern (Massenpunkten oder homogenen Kugeln) mit Massen m_1 und m_2, die sich unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Gravitationsanziehung bewegen. Wir bezeichnen ihre Aufenthaltsorte mit $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$. Um dieses Bewegungsproblem auf das Keplerproblem zu reduzieren, definieren wir zwei neue Variable, den Massenmittelpunkt

$$\vec{X} = \frac{1}{M}\left(m_1\,\vec{x}_1 + m_2\,\vec{x}_2\right), \tag{5.17}$$

wobei

$$M = m_1 + m_2 \tag{5.18}$$

die Gesamtmasse ist, und den Verbindungsvektor vom zweiten zum ersten Körper,

$$\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2\,. \tag{5.19}$$

Durch sie können die ursprünglichen Ortsvektoren in der Form

$$\vec{x}_1 = \vec{X} + \frac{m_2}{M}\,\vec{x} \tag{5.20}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{X} - \frac{m_1}{M}\,\vec{x}. \tag{5.21}$$

ausgedrückt werden. Nun lässt sich zeigen, dass $\vec{X}$ eine gleichförmige Bewegung ausführt, d.h.

$$\vec{X}(t) \,=\, \vec{V}t + \vec{X}_0 \tag{5.22}$$

für beliebige Anfangsdaten $\vec{V}$ und $\vec{X}_0$, und dass die Zeitentwicklung des Verbindungsvektors $\vec{x}$ – wenn er als Ortsvektor aufgefasst, d.h. in den Ursprung eines Koordinatensystems gehängt gedacht wird – genau einer Keplerbewegung eines Satelliten der Masse

$$m \,=\, \frac{m_1 m_2}{M} \tag{5.23}$$

(der so genannten *reduzierten Masse*[3]) im Gravitationsfeld eines (im Ursprung fixierten) Zentralkörpers der Masse M entspricht. Für diese ("fiktive") Keplerbewegung können die in den vorhergehenden Abschnitten angegebenen Formeln angewandt werden.

Die tatsächliche Bewegung der beiden Körper kann dann mit Hilfe der Beziehungen (5.20) – (5.21) ermittelt werden. Sie lässt sich am einfachsten in einem Koordinatensystem analysieren, in dem der Massenmittelpunkt im Ursprung ruht. Mit $\vec{X} = 0$ reduzieren sich (5.20) und (5.21) auf

$$\vec{x}_1 = \,\frac{m_2}{M}\,\vec{x} \tag{5.25}$$

$$\vec{x}_2 = -\frac{m_1}{M}\,\vec{x}. \tag{5.26}$$

Die Gesamtenergie des Systems ist dann durch den Ausdruck (1.2) gegeben.[4] Ist sie negativ (wir beschränken wir uns auf diesen Fall), so ist die Bewegung gebunden. Gemäß (5.25) – (5.26) bewegt sich jeder der beiden Körper auf einer Ellipsenbahn mit Exzentrizität ε, deren Brennpunkt im Ursprung liegt, die aber um den Faktor $\frac{m_2}{M}$ bzw. $\frac{m_1}{M}$ kleiner ist als die durch $\vec{x}$ beschriebene ("fiktive") Ellipse. Die große Halbachse a der letzteren ist gleich dem Mittelwert aus dem kleinsten und dem größten Abstand, den die

---

[3]Sie kann auch durch die einprägsame Formel

$$\frac{1}{m} \,=\, \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{5.24}$$

definiert werden.

[4]im allgemeinen Fall kommt noch der Term $\frac{M}{2}\dot{\vec{X}}^{\,2}$ für die kinetische Energie der Schwerpunktbewegung hinzu.

beiden Körper annehmen. Mit der Umlaufszeit T (der Periodendauer) lautet das dritte Keplersche Gesetz gemäß (4.5)

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \,. \tag{5.27}$$

Ist $m_1 \ll m_2$, so ist $m \approx m_1$ und $M \approx m_2$, wodurch die Keplersche Näherung einer unbewegten Zentralmasse gerechtfertigt ist. Zur Verdeutlichung einige Zahlen:

- Ist der erste Körper die Erde ($m_1 = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$) und der zweite die Sonne ($m_2 = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$) – alle anderen Himmelskörper des Sonnensystems werden außer Acht gelassen –, so ist die reduzierte Masse m nur um 0.0003% kleiner als die Erdmasse, die Gesamtmasse M nur um 0.0003% größer als die Sonnenmasse. In der Keplerschen Näherung würde anstelle von (5.27) das dritte Keplersche Gesetz in der Form
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_2} \tag{5.28}$$
benutzt werden. Wird mit seiner Hilfe unter Ausnutzung der angegebenen Werte der Massen und der Länge T des Jahres die große Halbachse a ermittelt, so wird diese um ein Millionstel unterschätzt, also um ungefähr $150\,\mathrm{km}$ – ein akzeptabler Fehler! Bei gegebenem Wert von a überschätzt (5.28) die Länge des Jahres um knapp 50 Sekunden. Wird (5.28) benutzt, um die Sonnenmasse aus T und a zu bestimmen, so wird diese um 0.0003% überschätzt (was weit unterhalb der Genauigkeit liegt, mit der wir die Sonnenmasse kennen). Gemäß (5.26) liegt der Massenmittelpunkt des Systems Erde-Sonne in einer durchschnittlichen Entfernung $\frac{m_1}{M}a \approx 450\,\mathrm{km}$ vom Sonnenmittelpunkt entfernt (was mit dem Sonnenradius von $695\,700\,\mathrm{km}$ zu vergleichen ist).

- Wird hingegen das System Jupiter-Sonne betrachtet, so ist die reduzierte Masse um 0.1% kleiner als die Jupitermasse und die Gesamtmasse um 0.1% größer als die Sonnenmasse. Hier macht sich der Fehler von (5.28) im Vergleich zu (5.27) schon eher bemerkbar. Der Massenmittelpunkt dieses Systems liegt ungefähr am Sonnenrand.

- Beim System Mond-Erde ist die reduzierte Masse um 1.2% kleiner als die Mondmasse und die Gesamtmasse um 1.2% größer als die Erdmasse. Der Massenmittelpunkt dieses Systems ist ungefähr $4700\,\mathrm{km}$ vom Erdmittelpunkt entfernt.