Universität Wien, WS 2023/24

Analysis für PhysikerInnen I

Probetest

Punkteschlüssel:

[Typ 1 aus 4] ... 0.8 Punkte
[Typ 2 aus 4] ... 1 Punkt

Bei der schriftlichen Prüfung wird es MC-Fragen im Wert von 20 Punkten geben.

1. [Typ 2 aus 4] Welche der folgenden Relationen auf der Menge $\mathbb{R}$ sind Äquivalenzrelationen?
   (a) $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; e^x - x^3 = e^y - y^3$
   (b) $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x - y = 2$
   (c) $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; \pi^2(x - y) \in \mathbb{Q}$
   (d) $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x < y$

2. [Typ 1 aus 4] Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn
   (a) $\mathrm{Bild}(f) = Y$.
   (b) es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.
   (c) es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.
   (d) es zu jedem $x \in X$ mindestens ein $y \in Y$ gibt mit $f(x) = y$.

3. [Typ 2 aus 4] Welche der folgenden Beziehungen für Binomialkoeffizienten sind korrekt?
   (a) $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = 56$
   (b) $\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} = 1$ (für $n \in \mathbb{N}$)
   (c) $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} = 8$
   (d) $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} = 0$ (für $n \in \mathbb{N}$)

4. [Typ 1 aus 4] Endliche geometrische Reihe: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} e^{-k} =$

   (a) $= \dfrac{e - e^{-n}}{1 - e}$
   (b) $= \dfrac{e^{n} - 1}{e - 1}$
   (c) $= \dfrac{e - e^{-n}}{e - 1}$
   (d) $= \dfrac{e^{n} - 1}{1 - e}$

5. [Typ 2 aus 4] Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen über beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ an::

   (a) Die Vereinigung von (auch unendlich vielen) abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
   (b) Die Vereinigung von (auch unendlich vielen) offenen Mengen ist offen.
   (c) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Falls für jedes $x \in M$ ein abgeschlossenes Intervall J existiert mit $x \in J \subseteq M$, dann ist M abgeschlossen.
   (d) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Falls für jedes $x \in M$ ein offenes Intervall I existiert mit $x \in I \subseteq M$, dann ist M offen.

6. [Typ 1 aus 4] Die Menge $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 0] \subseteq \mathbb{R}$ ist gleich

   (a) $A = [-1, 0)$
   (b) $A = \{\}$ (leere Menge)
   (c) $A = [-1, 0]$
   (d) $A = \{0\}$

7. [Typ 2 aus 4] Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$,

   (a) wenn es ein $\varepsilon > 0$ und einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$.
   (b) wenn für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder kleiner als $a - \varepsilon$ oder größer als $a + \varepsilon$ sind.
   (c) wenn $\lim_{n \to \infty} (a_n - a) = 0$ gilt.
   (d) wenn es ein $\varepsilon > 0$ und einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

8. [Typ 1 aus 4] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2|n| - n^2\sin(n) + (-1)^n|n-3|}{n^2|n| - 2\cos(n)} =$

   (a) $= \pi$

   (b) $= -\pi$

   (c) $= 2$

   (d) $= \frac{1}{2}$

9. [Typ 2 aus 4] Kreuzen Sie die richtigen Aussagen über Reihen mit reellen Gliedern an:

   (a) Existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle $n \geq n_0$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

   (b) Sei $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Jede konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, kann so umgeordnet werden, dass die umgeordnete Reihe gegen c konvergiert.

   (c) Anwendung des Majorantenkriteriums: Gilt $|a_n| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

   (d) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ für alle $m \geq n \geq n_0$.

10. [Typ 1 aus 4] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^n =$

   (a) $= \dfrac{3}{\pi - 3}$

   (b) $= \dfrac{\pi}{\pi - 3}$

   (c) $= \exp\left(\dfrac{3}{\pi}\right)$

   (d) $= \exp\left(-\dfrac{3}{\pi}\right)$

11. [Typ 2 aus 4] Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an:

    (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^n} = +\infty$.

    (b) Umrechnung zwischen natürlichem und dekadischem Logarithmus: Es gilt stets $x = 10^{\ln(x)}$. Daraus folgt durch Anwendung von $\lg$, dass $\lg(x) = \ln(x)\lg(10)$.

    (c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x}x^n = +\infty$.

    (d) Umrechnung zwischen natürlichem und dekadischem Logarithmus: Es gilt stets $x = 10^{\lg(x)}$. Daraus folgt durch Anwendung von $\ln$, dass $\ln(x) = \lg(x)\ln(10)$.

12. [Typ 1 aus 4] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Kreuzen Sie die richtige Aussage an:

    (a) Gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -3$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, so besitzt f zumindest eine Nullstelle.

    (b) Sei $a < b$. Dann besitzt die Menge $f([a,b])$ ein (endliches) Infimum und ein (endliches) Supremum.

    (c) Sei $a < b$. Ist f stetig, so nimmt f auf dem Intervall $[a,b]$ ein Minimum und ein Maximum an.

    (d) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f\big(1+\dfrac{1}{n}\big) = f(1)$, so ist f an der Stelle 1 stetig.

13. [Typ 2 aus 4] Sei $a < b$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!

    (a) Gilt $a < \xi < \eta < b$ und $f(\xi) = f(\eta) = 0$, so besitzt f' eine Nullstelle.

    (b) Ist f streng monoton wachsend, so gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$.

    (c) Ist f zweimal differenzierbar und x_0 eine lokale Minimumstelle von f, so gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

    (d) Gilt $a < x_1 < x_2 < b$, so gibt es ein x mit $x_1 < x < x_2$ und $(x_2 - x_1)f'(x) = f(x_2) - f(x_1)$.

14. [Typ 1 aus 4] Drei der folgenden Berechnungen stellen korrekte Anwendungen der Regel von de l'Hospital dar, eine ist falsch. Welche?

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin(x)}{1} = \dfrac{-\sin(0)}{1} = 0$

    (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = \dfrac{\cos(0)}{1} = 1$

    (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

    (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\pi\cos(\pi x)}{1} = \dfrac{\pi\cos(\pi)}{1} = -\pi$

15. [Typ 2 aus 4] Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!

    (a) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch $|f|^{-1/2}$ integrierbar.
    (b) Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(0) = 0$ und $f(x) = x^{-1}\sin(x)$ für $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, ist integrierbar.
    (c) Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.
    (d) Das Produkt zweier integrierbarer Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$ ist nicht notwendigerweise integrierbar.

16. [Typ 1 aus 4] Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ besitze die Funktion ψ im Intervall $(n, n+1)$ den Wert n^2. Es gilt $\int_{-2}^{2} \psi(x)dx =$

    (a) $= 6$
    (b) $= 4$
    (c) $= 2$
    (d) $= 1$

17. [Typ 2 aus 4] Der Regel für die partielle Integration bei unbestimmten Integralen liegt folgende Identität zugrunde:

    (a) Die Produktregel für die Ableitung von $f(x)g(x)$.
    (b) $\displaystyle\int f(x)g(x)dx = f'(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$
    (c) $\displaystyle\int f(x)g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)dx - \int f'(x)g(x)dx.$
    (d) $\displaystyle\int f(x)g'(x)dx = -f(x)g(x) + \int f'(x)g(x)dx.$

18. [Typ 1 aus 4] Welche der folgenden Substitutionen führt $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx$ in $\displaystyle\int_{2}^{3} \sqrt{t}\,dt$ über?

    (a) $x = \dfrac{1}{t+1}$
    (b) $x = \dfrac{1}{t-1}$
    (c) $x = \dfrac{1}{t^2-1}$
    (d) $x = \dfrac{1}{t^2+1}$

19. [Typ 2 aus 4] Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \sin(n\pi x)$ für $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ (das entspricht dem Stück der Sinusfunktion zwischen 0 und π, in x-Richtung auf das Intervall $[0, \frac{1}{n}]$ gestaucht) und $f_n(x) = 0$ für $\frac{1}{n} < x \leq 1$. Dann gilt:

   (a) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion $x \mapsto 0$.

   (b) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion $x \mapsto 0$.

   (c) Ist d_n die Supremumsnorm von f_n, so konvergiert die Folge (d_n) gegen 0.

   (d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Supremumsnorm von f_n gleich 1.

20. [Typ 1 aus 4] $\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} + \ldots =$

   (a) $= \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$

   (b) $= \sin(x) - x$

   (c) $= \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} - x$

   (d) $= x^3 \cos(x)$

21. [Typ 2 aus 4] Von einer Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ ist bekannt, dass sie für $x = -4$ konvergiert und für $x = 8$ divergiert. Aus diesen Informationen folgt notwendigerweise,

   (a) dass die Reihe für $x = 7$ konvergiert.

   (b) dass die Reihe für $x = 7$ divergiert.

   (c) dass die Reihe für $x = 3$ konvergiert.

   (d) dass die Reihe für $x = -7$ divergiert.

22. [Typ 2 aus 4] Gegeben sei eine 2π-periodische, stückweise stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Fourierreihe (in komplexer Form) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Dann gilt:

   (a) $\overline{c_n} = c_{-n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Die Fourierreihe von f konvergiert an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$.

   (c) Die Fourierkoeffizienten der Funktion $f^{\text{neu}}(x) = |f(x)|$ sind gegeben durch $c_n^{\text{neu}} = |c_n|$.

   (d) Die Fourierreihe von f konvergiert an jeder Stelle $p \in \mathbb{R}$ gegen $\dfrac{1}{2}\big(\lim\limits_{x\uparrow p} f(x) + \lim\limits_{x\downarrow p} f(x)\big)$.