

Angewandte Physik

Schwingungen

als Manuskript gedruckt

Gliederung

2.	SCHWINGUNGEN	2
2.1	Die freie ungedämpfte Schwingung	2
2.1.1	Die Kinematik der harmonischen Schwingung	2
2.1.2	Kinematische Herleitung der Differentialgleichung der harmonischen Schwingung	4
2.1.3	Die Newton'sche Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator	5
2.1.4	Energiebetrachtung für den harmonischen Oszillator	6
2.1.5	Verschiedene schwingungsfähige Systeme	9
2.1.6	Überlagerung von Schwingungen	12
2.2	Die freie gedämpfte Schwingung	15
2.3	Die erzwungene Schwingung	21
2.4	Gekoppelte Oszillatoren	28

2. SCHWINGUNGEN

2.1 Die freie ungedämpfte Schwingung

2.1.1 Die Kinematik der harmonischen Schwingung

Was ist eine Schwingung ?

◆ *Experiment verschiedene Oszillatoren:*

Es werden mechanische und elektrische Systeme vorgeführt, die Schwingungen ausführen: Federpendel, schwingende Blattfeder, elektrischer Schwingkreis. Wir erkennen, was wir als Schwingung bezeichnen.

Unter Schwingung versteht man die zeitlich periodische Änderung einer physikalischen Größe.

Wird einem schwingungsfähigen System kurzzeitig Energie z.B. durch Anstoßen zugeführt, und dieses dann sich selbst überlassen, so führt es eine **freie Schwingung** aus. Im Gegensatz dazu steht die **erzwungene Schwingung** (s. Abschnitt 2.3), bei der dem schwingungsfähigen System periodisch Energie zugeführt wird.

Die **harmonische Schwingung** ist die einfachste Form einer Schwingung.

◆ *Experiment harmonische Schwingung:*

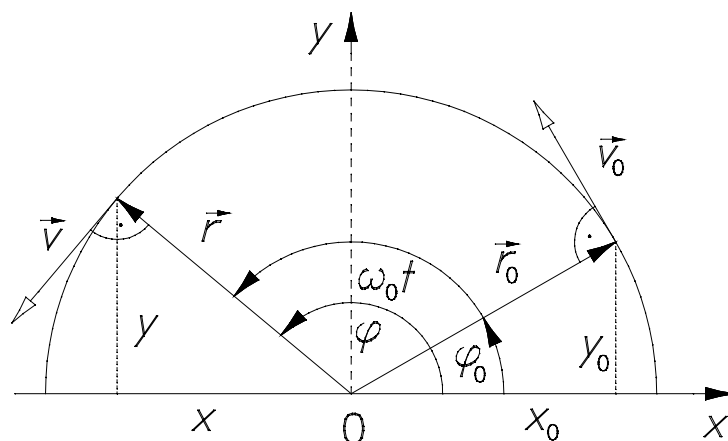
Die Schwingung eines Federpendels wird mit der Projektion der Bewegung eines auf einer rotierenden Scheibe umlaufenden Stiftes verglichen.

Wir erkennen:

Der Weg-Zeit-Verlauf der Projektion des auf einer Kreisbahn umlaufenden Stiftes stimmt mit dem der Federschwingung gut überein. Die Federschwingung lässt sich mit einer Kreisbewegung beschreiben.

Schwingungen, die einen zeitlichen Verlauf wie die des Federpendels haben, nennt man **harmonische Schwingung**.

Die harmonische Schwingung lässt sich mit einer Kreisbewegung beschreiben:



Ein Massepunkt bewegt sich auf einer Kreisbahn entgegen dem Uhrzeigersinn (in mathematisch positiver Drehrichtung).

Die Winkelgeschwindigkeit ω_0 ist konstant. In der Zeit t wird der Winkel $\omega_0 \cdot t$ durchlaufen. Innerhalb der Zeit T_0 wird ein voller Umlauf zurückgelegt. Der entsprechende Drehwinkel ist 2π .
 $\omega_0 \cdot T_0 = 2\pi$

Für den Vektor \vec{r} gilt:

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y = A \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + A \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y$$

mit $A = r = r_0 = |\vec{r}| = |\vec{r}_0|$

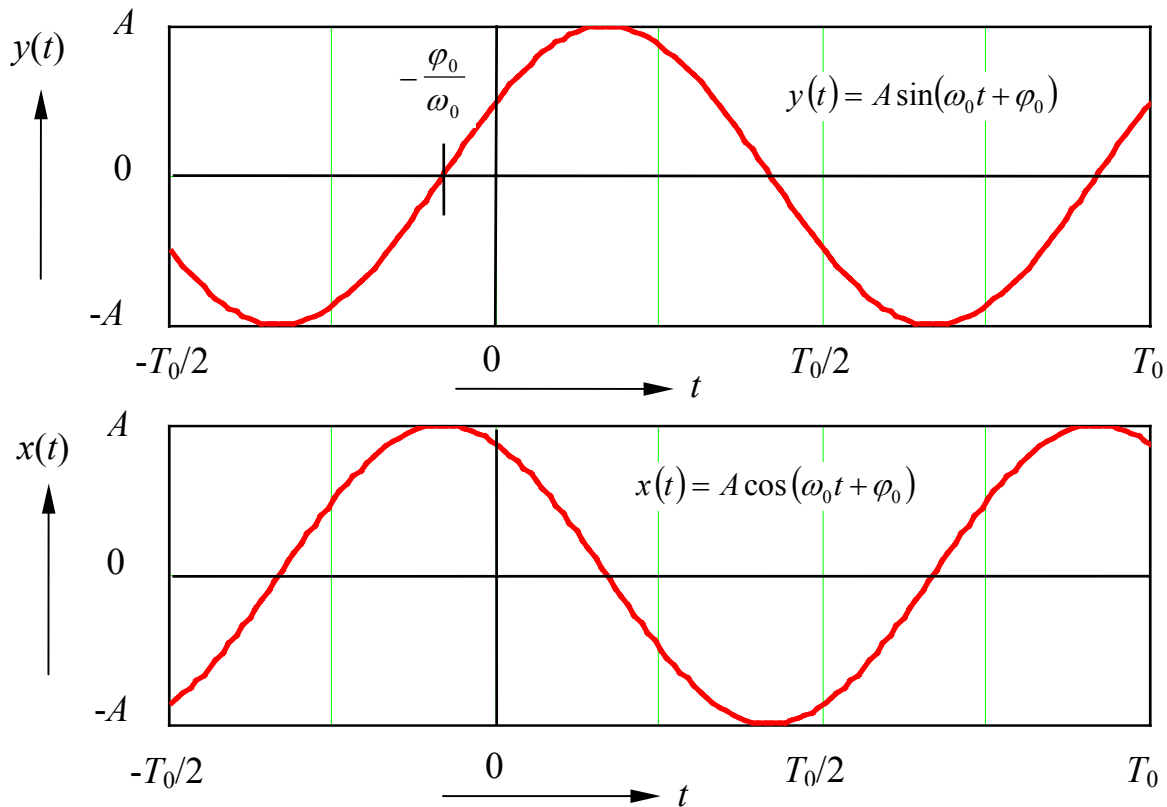
$$\varphi = \varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

damit wird

$$\vec{r}(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \cdot \vec{e}_x + A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y$$

$x(t)$ und $y(t)$ sind die Projektionen des Radiusvektors auf die beiden Koordinatenachsen.



Die Projektion des Massepunktes auf die y - bzw. x -Achse läuft jeweils zwischen A und $-A$ hin und her.

Dabei sind :	T_0	Schwingungsdauer
	A	Amplitude der Schwingung
	ω_0	Kreisfrequenz der Schwingung
	$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$	Phase der Schwingung
	φ_0	Anfangsphase (Nullphase)

◆ *Experiment schwingende Blattfeder:*

Eine Blattfeder ist mit einem Spiegel versehen, der mit einem Lichtstrahl beleuchtet wird. Versetzt man die Blattfeder in Schwingung, bewegt sich der reflektierte Lichtstrahl auf und ab. Ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierender Drehspiegel lenkt den reflektierten Strahl horizontal ab, sodass der zeitliche Verlauf der Schwingung sichtbar gemacht wird. Der zeitliche Verlauf der Schwingung ergibt, soweit ohne Hilfsmittel zu beurteilen, eine Sinusfunktion.

Zusammenfassung:

Eine Schwingung der Form $u(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ heißt **harmonische Schwingung**.

Dabei bezeichnet die Größe u eine beliebige physikalische Größe.

Nur wenige schwingungsfähige Systeme sind harmonische Oszillatoren. Viele Schwingungsvorgänge lassen sich aber bei gewissen Einschränkungen (z.B. für kleine Ausschläge) als harmonische Schwingung beschreiben.

Alle Schwingungen lassen sich aus einer endlichen oder unendlichen Summe von harmonischen Schwingungen aufbauen (siehe dazu Abschnitt 2.1.6).

2.1.2 Kinematische Herleitung der Differentialgleichung der harmonischen Schwingung

Die Ableitung von $\vec{r}(t)$ aus 2.1.1 nach der Zeit ergibt¹:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \vec{e}_x + A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \vec{e}_y \\ \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) &= -A \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \vec{e}_x + A \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \vec{e}_y \\ \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) &= -A \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \vec{e}_x - A \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \vec{e}_y \end{aligned}$$

Ausklammern von $(-\omega_0^2)$ und Vergleich mit der ersten Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= -\omega_0^2 \cdot \vec{r}(t) \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= -\omega_0^2 \cdot \vec{r}(t) \rightarrow \ddot{\vec{r}}(t) + \omega_0^2 \cdot \vec{r}(t) = 0 \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die Projektionen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= 0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Form dieser Differentialgleichung lautet:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

Dies ist die **Differentialgleichung der harmonischen Schwingung**.

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Dabei ist u wieder eine beliebige physikalische Größe.

Eine äquivalente Darstellung der Lösung ergibt sich mit $u(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \tilde{\varphi}_0)$, wobei sich die Anfangsphasen entsprechend um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden: $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$

¹ Man beachte hier die Verwendung der üblichen Abkürzung für die Ableitung nach der Zeit durch einen über das Symbol für die physikalische Größe gesetzten Punkt, z.B.: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

2.1.3 Die Newton'sche Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator

Die dynamische Betrachtung der Schwingung führt über die Lösung der Newton'sche Bewegungsgleichung (2. Newton'sches Axiom):

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \dot{\vec{p}}$$

- **Ermitteln des Kraftgesetzes**

Es wird zunächst von einem **linearen Kraftgesetz** ausgegangen, wie es z.B. für das Federpendel gilt:

$$\vec{F} = -D \cdot \vec{x} \qquad D: \text{Federkonstante}$$

Eine senkrecht hängende Feder kann eindimensional behandelt werden, weshalb wir vereinfachend schreiben können²:

$$F = -Dx$$

- **Aufstellen der Newton'schen Bewegungsgleichung**

$$m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x$$

$$m \cdot \ddot{x} + D \cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

- **Integration der Bewegungsgleichung**

Die erhaltene Differentialgleichung hat die gleiche Struktur wie die oben aus der kinematischen Betrachtung der Kreisbewegung hergeleitete Differentialgleichung der harmonischen Schwingung. **Die erhaltene Differentialgleichung ist also die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung.**

Folglich kann das **Ort-Zeit-Gesetz einer harmonischen Schwingung als Lösungsansatz** verwendet werden:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Die Lösung erfolgt durch Einsetzen des Lösungsansatzes in die Bewegungsgleichung. Man erhält so die Kreisfrequenz

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

und daraus die Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

² Das Federpendel besteht aus der Feder mit angehängter Masse m . Durch das Anhängen der Masse verschiebt sich das Ende der Feder gegenüber dem entspannten Zustand. Es kann aber leicht gezeigt werden, dass das angegebene Kraftgesetz weiter gültig ist.

• **Betrachtung der Anfangsbedingungen**

Die Größen A und φ_0 stellen Integrationskonstanten dar, die nur durch die Anfangsbedingungen, d.h. die Bedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ bestimmt werden. Die Vorgehensweise wird an den beiden folgenden Beispielen erklärt:

Auslenken und Loslassen: $\dot{x}(0) = 0$; $x(0) = -x_0$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$x(0) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi_0) = A \cdot \sin \varphi_0 = -x_0$$

$$\dot{x}(0) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi_0) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos \varphi_0 = 0$$

In der letzten Gleichung muss der Kosinus Null werden, da die beiden anderen Faktoren nicht Null sein können.

Daraus folgt:

$$\cos \varphi_0 = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Dieser Nullphasenwinkel muss nun in die Gleichung für $x(0)$ eingesetzt werden, um die Amplitude A zu bestimmen. Definitionsgemäß muss A positiv sein. Aus diesem Grund kommen hier die Werte $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ oder $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ in Frage: $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Für die Amplitude erhält man damit

$$A = x_0.$$

Das Weg-Zeit-Gesetz für diesen Fall ist dann

$$x(t) = x_0 \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = -x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t).$$

Anschieben: $\dot{x}(0) = -v_0$; $x(0) = 0$

Durch analoge Betrachtungen erhält man hier:

$$\varphi_0 = \pi; \quad A = \frac{v_0}{\omega_0}$$

und schließlich

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \pi) = -\frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t).$$

2.1.4 Energiebetrachtung für den harmonischen Oszillator

Als Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit erhält man die Leistung:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dW}{dt} = P$$

Diese Beziehung kann man für die Integration der Newton'schen Bewegungsgleichung heranziehen. Wenn man die Bewegungsgleichung mit der Geschwindigkeit multipliziert, ergibt sich:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m \vec{a} \cdot \vec{v} = m \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right)$$

$$P = \frac{d}{dt} W_k$$

Ist die Kraft nur vom Ort abhängig, kann man außerdem die potentielle Energie angeben:

$$W_p - W_p(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\frac{dW_p}{d\vec{r}} = -\vec{F}(\vec{r})$$

und
$$-P = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v} = \frac{dW_p}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} W_p.$$

Eliminiert man nun die Leistung P aus diesen Gleichungen, erhält man schließlich den Energieerhaltungssatz der Mechanik:

$$\frac{d}{dt} [W_k + W_p] = 0$$

Diese Betrachtung lässt sich sofort auf das Federpendel übertragen, da die rücktreibende Kraft

$$F = -D \cdot x \quad \text{nur vom Ort abhängig: } -F \cdot \dot{x} = D \cdot x \cdot \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} D x^2 \right) = \frac{d}{dt} W_p.$$

Es gilt also auch für das Federpendel der Energieerhaltungssatz der Mechanik: Die Gesamtenergie, d.h. die Summe aus potentieller und kinetischer Energie bleibt im Zeitverlauf konstant.

$$W = W_k + W_p = \text{const}$$

Man kann nun in die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie

$$W_k = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

$$W_p = \frac{D}{2} x^2$$

\dot{x} bzw. x aus den kinematischen Gleichungen einsetzen:

$$W_k = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} (A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0))^2 = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Mit $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ erhält man

$$W_k = \frac{D}{2} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

und entsprechend für die potentielle Energie

$$W_p = \frac{D}{2} x^2 = \frac{D}{2} A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Als Summe erhält man³:

$$W = W_k + W_p = \frac{D}{2} A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$$

Die Gesamtenergie der ungedämpften Schwingung ist proportional zum Amplitudenquadrat.

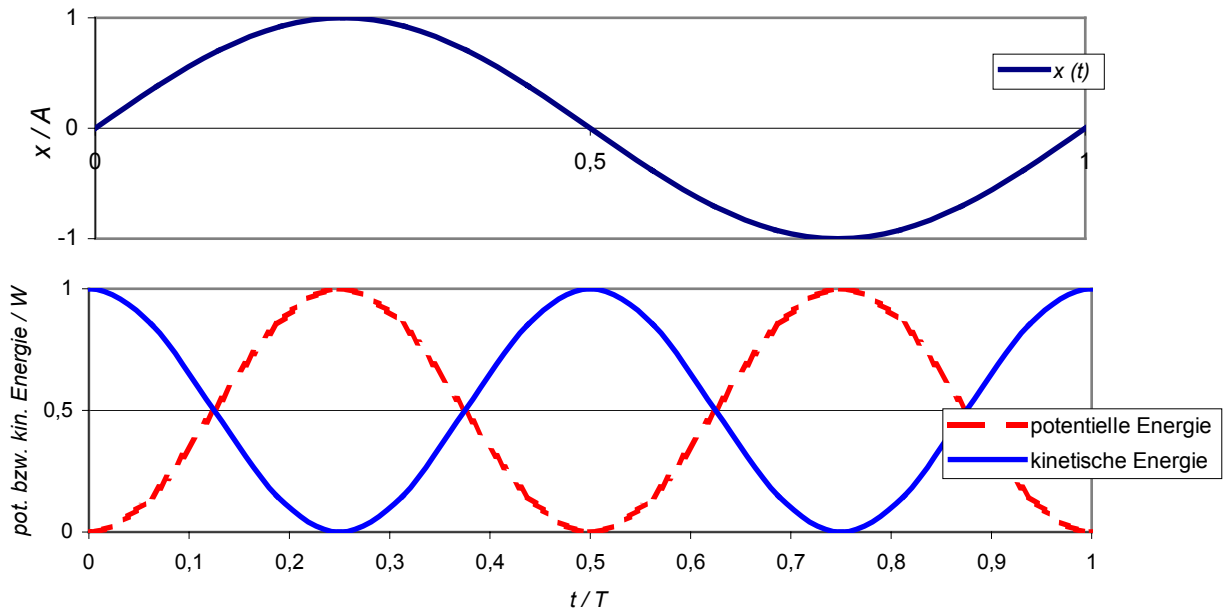
Mit $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ und $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$W_k = \frac{W}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]$$

$$W_p = \frac{W}{2} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]$$

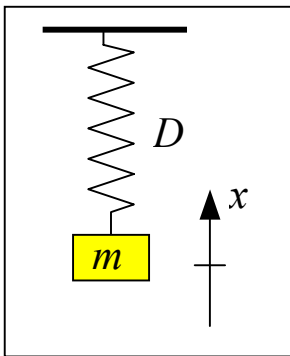
Kinetische und potentielle Energie oszillieren mit der doppelten Kreisfrequenz und gegenphasig. **Kinetische und potentielle Energie wandeln sich periodisch ineinander um.** Im zeitlichen Mittel verteilt sich die Gesamtenergie je zur Hälfte auf potentielle und kinetische Energie.



³ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

2.1.5 Verschiedene schwingungsfähige Systeme

a) Das Federpendel



Rücktreibende Kraft:

$$F = -Dx$$

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = -Dx$$

Differentialgleichung der Schwingung:

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

Schwingungsdauer:

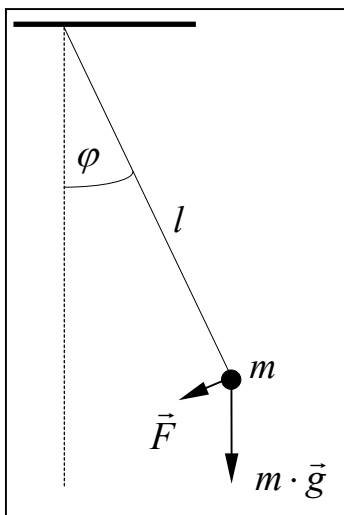
$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

◆ *Experiment Federpendel:*

Die Schwingungsdauer verdoppelt sich, wenn die Masse vervierfacht wird.

b) Das mathematische Pendel



Rücktreibende Kraft:

$$F = -m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

Bewegungsgleichung:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

Differentialgleichung der Schwingung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Diese Differentialgleichung ist nicht die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung. Für kleine Ausschläge kann man aber $\sin \varphi$ durch den Winkel φ selbst ersetzen⁴.

Als Näherungslösung erhält man die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

⁴ Man führt eine Taylorreihenentwicklung für kleine Winkel (Entwicklung um $\varphi = 0$) durch, $\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$ und bricht nach dem ersten Glied ab.

Schwingungsdauer:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

◆ *Experiment mathematisches Pendel:*

Nachweis der gefundenen Beziehungen - Die Schwingungsdauer T_0 ist unabhängig von der Masse, mit $1/4$ der Pendellänge ist die Schwingungsdauer nur noch halb so groß

c) Das physikalische Pendel⁵

Rücktreibendes Moment:

$$M_A = -m \cdot g \cdot l_S \cdot \sin \varphi$$

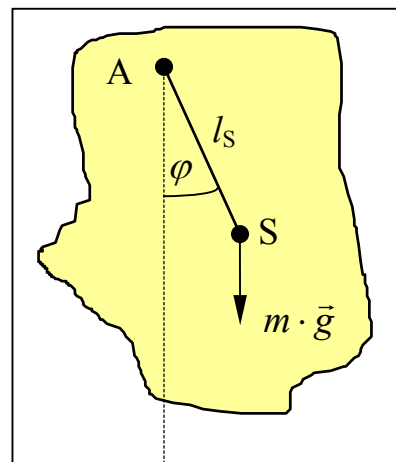
(l_S : Abstand zwischen Drehachse A und Schwerpunkt S)

Bewegungsgleichung:

$$J_A \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot l_S \cdot \sin \varphi$$

Differentialgleichung der Schwingung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{m \cdot g \cdot l_S}{J_A} \sin \varphi = 0$$



Mit der Näherung für kleine Ausschläge erhält man wieder die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{m \cdot g \cdot l_S}{J_A} \varphi = 0$$

Schwingungsdauer:

$$\omega_0^2 = \frac{m \cdot g \cdot l_S}{J_A}$$

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{m \cdot g \cdot l_S}}$$

Man kann nun die **reduzierte Pendellänge** l^* einführen:

$$l^* = \frac{J_A}{m \cdot l_S}$$

⁵ Für die beiden folgenden Systeme muss man die Gesetze der Dynamik des starren Körpers bei Rotation um eine feste Achse A anwenden. Die Bewegung wird eindeutig durch den Drehwinkel als Funktion der Zeit $\varphi(t)$ beschrieben. In der Bewegungsgleichung tritt an die Stelle der Kraft F als Verursacher der Bewegung das Drehmoment M_A , und an die Stelle der trägen Masse m tritt das Massenträgheitsmoment J_A .

Damit erhält man für die Schwingungsdauer einen Ausdruck wie beim mathematischen Pendel:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l^*}{g}}$$

◆ *Experiment Stangenpendel:*

Vergleich von Stangenpendel und mathematischem Pendel. Die Schwingungsdauer eines Stangenpendels ist kleiner als die eines gleich langen mathematischen Pendels. Die Berechnung der reduzierten Pendellänge für einen Stab, der an einem Ende aufgehängt ist, ergibt:

$$J_S = \frac{1}{12} ml^2 \quad \text{Aufhängung am Ende: } J_A = J_S + m \cdot l_S^2 \quad \text{mit } l_S = l/2$$

$$J_A = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

$$l^* = \frac{J_A}{m \cdot l_S} = \frac{2}{3} l$$

Das Stangenpendel hat die gleiche Schwingungsdauer wie ein mathematisches Pendel mit einer Länge von 2/3 der Länge des Stangenpendels, was im Versuch nachgewiesen werden kann.

◆ *Experiment Reifenpendel:*

Vergleich der Schwingungsdauer eines Reifenpendels mit der eines mathematischen Pendels mit einer dem Reifendurchmesser entsprechenden Pendellänge. Die Schwingungsdauern sind gleich.

$$J_S = \frac{1}{4} ml^2 \quad J_A = \frac{1}{4} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{2} ml^2$$

Reduzierte Pendellänge:

$$l^* = \frac{J_A}{m \cdot l_S} = l \quad (l_S = l/2)$$

d) Das Torsionspendel

Rücktreibendes Moment:

$$M_A = -D^* \cdot \varphi$$

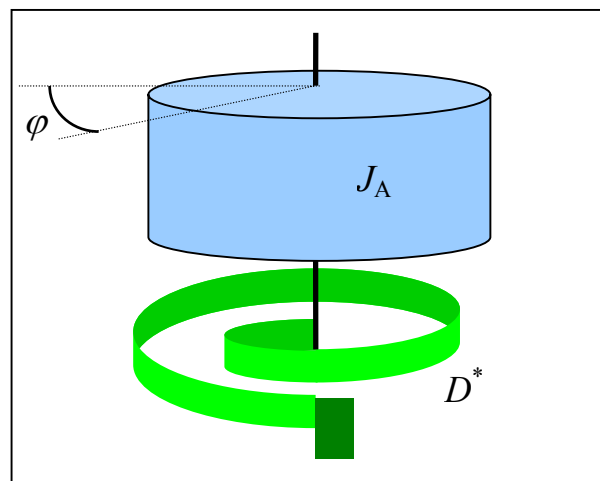
(D^* : Richtmoment, Winkelrichtgröße)

Bewegungsgleichung:

$$J_A \ddot{\varphi} = -D^* \varphi$$

Differentialgleichung der Schwingung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D^*}{J_A} \varphi = 0$$



Dies ist wieder exakt (ohne Näherung) die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung.

Schwingungsdauer:

$$\omega_0^2 = \frac{D^*}{J_A}$$

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{D^*}}$$

◆ *Experiment Drehschwingung:*

$$J_A = J_S = m \cdot r^2 \qquad T_0 = 2\pi \cdot r \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Mit Verdoppelung des Abstandes der Massen von der Drehachse verdoppelt sich auch die Schwingungsdauer.

2.1.6 Überlagerung von Schwingungen

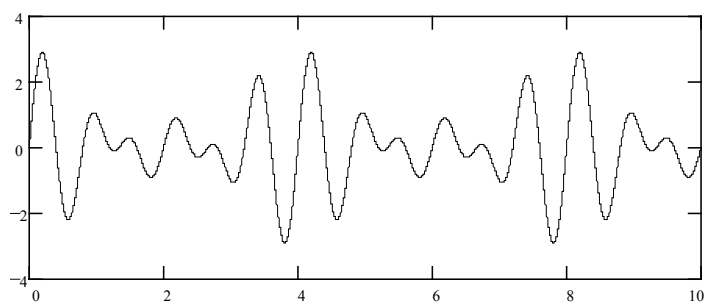
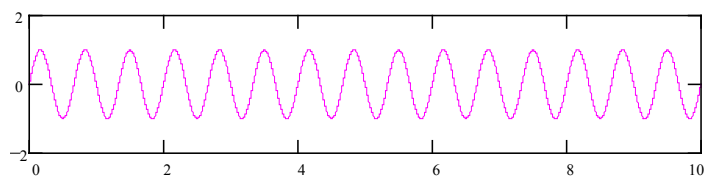
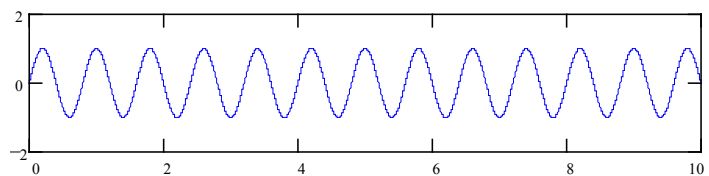
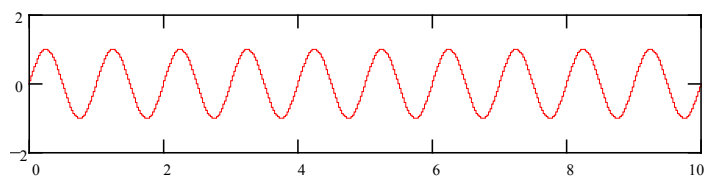
Es kommt häufig vor, dass ein Massepunkt nicht nur eine Schwingung, sondern gleichzeitig zwei oder mehrere Schwingungen ausführt. Dabei sind im Wesentlichen zwei Fälle zu unterscheiden:

- a) Die Schwingungsrichtungen liegen parallel oder antiparallel.
- b) Die Schwingungsrichtungen liegen senkrecht zueinander.

In den meisten Fällen stören sich die Schwingungen bei der Überlagerung gegenseitig nicht, d.h. jede Schwingung verhält sich so, als ob die anderen nicht da wären. Die resultierende Schwingung ergibt sich in diesem Fall einfach als Summe der Einzelschwingungen.

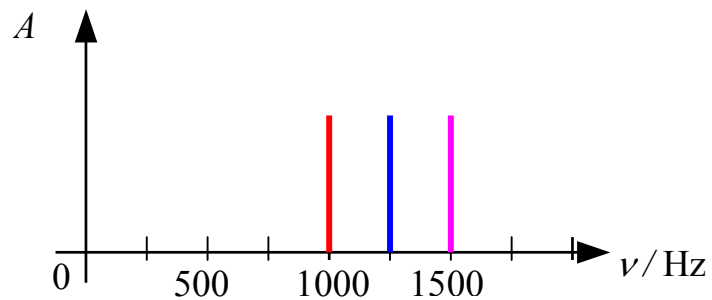
Zu a) Schwingungsrichtungen parallel oder antiparallel: Die Überlagerung mehrerer Schwingungen soll am folgenden Beispiel erläutert werden. Es werden drei harmonischen Schwingungen unterschiedlicher Frequenz (und in diesem Fall gleicher Amplitude) addiert. Das Beispiel wurde so gewählt, dass

es sich um Schwingungen mit den Frequenzen 1000 Hz, 1250 Hz und 1500 Hz handelt. Dies entspricht etwa dem Dur-Dreiklang c^3 , e^3 , g^3 . Die graphische Darstellung zeigt die Funktionen



$f(t)$ der drei Einzelschwingungen und der resultierenden Schwingung. Mit den angegebenen Frequenzen ist auf der Abszissenachse die Zeit t in Millisekunden aufgetragen. Die Ordinate nachse enthält die Auslenkung in willkürlichen Einheiten.

Da die resultierende Schwingung so einfach erhalten wird, kann man sie durch Angabe der Frequenzen und Amplituden der einzelnen Schwingungen eindeutig darstellen. Eine solche Darstellung nennt man Spektraldarstellung. Für das obige Beispiel erhält man nebenstehende Spektraldarstellung. Man verwendet diese Form der Darstellung vor allem bei der Spektralanalyse, wo es darauf ankommt, eine zusammengesetzte Schwingung im Hinblick auf die Frequenzen der einzelnen beteiligten Schwingungen zu zerlegen.



◆ *Experiment Frequenzanalyse:*

Verschiedene Töne, erzeugt durch Stimmgabeln, werden überlagert. Die resultierenden Schwingungen werden sowohl in der $f(t)$ -Darstellung als auch in der Spektraldarstellung $A(\nu)$ sichtbar gemacht.

Man kann jede beliebige periodische Bewegung $f(t)$ als Summe harmonischer Teilschwingungen darstellen (Fourier-Entwicklung):

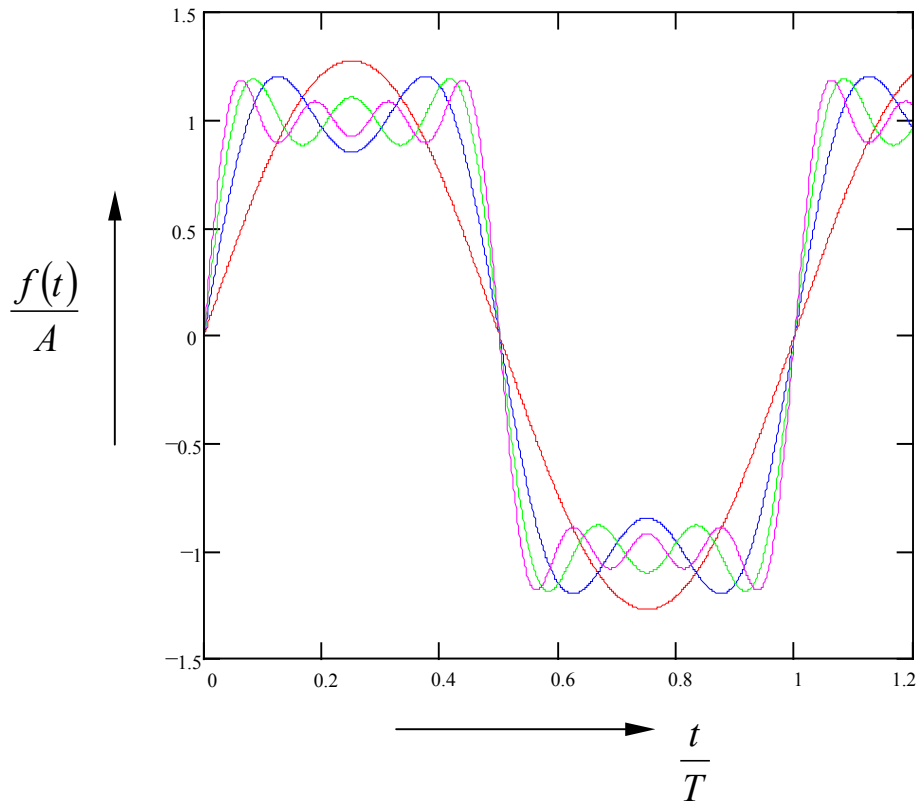
$$f(t) = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots \\ + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots$$

Die Zerlegung einer beliebigen Schwingung in eine solche Summe harmonischer Schwingungen nennt man Fourier-Analyse. In der Praxis bricht man die Entwicklung einer beliebigen periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe meist nach wenigen Gliedern ab.

Als Beispiel ist die Fourier-Entwicklung einer Rechteckfunktion dargestellt:

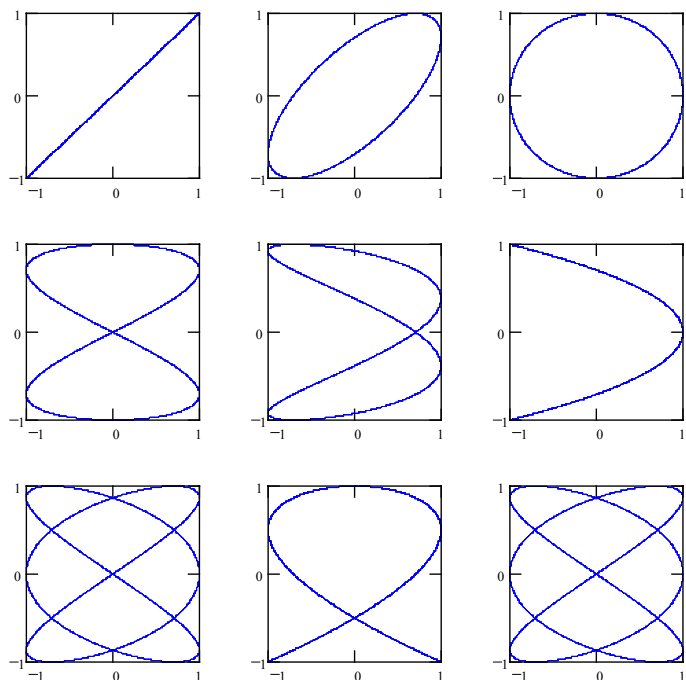
$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

Mit den ersten ein bis vier Summanden ergeben sich die auf der nächsten Seite dargestellten Funktionsverläufe. Man sieht, dass sich die Funktion mit zunehmender Zahl von Summanden immer besser an die Rechteckfunktion annähert.



Zu b) Schwingungsrichtungen senkrecht zueinander: Es soll nun der zweite am Anfang dieses Abschnittes aufgeführte Fall behandelt werden, die Überlagerung zweier Schwingungen, die senkrecht zueinander erfolgen. Nehmen wir an, dass die Schwingungen in x - bzw. y -Richtung erfolgen, ergibt sich die resultierende Bewegung als Schwingung in der x - y -Ebene.

Einfache Bewegungen ergeben sich, wenn die Frequenzen der beiden Schwingungen in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen. Man erhält dann die Lissajous-Figuren, die die in der x - y -Ebene durchlaufenen Bahnen darstellen. Einige Beispiele dazu sind im Folgenden wiedergegeben: Die Bilder zeigen von oben nach unten die Lissajous-Figuren für die Frequenzverhältnisse 1:1, 1:2 und 2:3 (jeweils Frequenz der vertikalen Schwingung zu Frequenz der horizontalen Schwingung) sowie von links nach rechts jeweils für einen Phasenunterschied der horizontalen Schwingung zur vertikalen Schwingung von 0 , $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$.



◆ *Experiment Lissajous-Figuren:* Zwei senkrecht zueinander schwingende Blattfedern, die mit Spiegeln versehen sind, reflektieren einen Lichtstrahl so, dass Lissajous-Figuren sichtbar werden. Noch besser lassen sich die Lissajous-Figuren mit einem Oszilloskop darstellen.

2.2 Die freie gedämpfte Schwingung

◆ Experiment gedämpftes Federpendel:

Von zwei gleichen Federpendeln wird eines an Luft betrieben, während sich die Masse des zweiten im Wasser bewegt, wodurch die Schwingung gedämpft wird.

Beobachtung:

- Die Amplitude der Schwingung der in Wasser getauchten Kugel nimmt mit der Zeit ab.
- Der gedämpfte Oszillator schwingt mit größerer Schwingungsdauer.

Bisher wurde zur Aufstellung der Bewegungsgleichung nur die rücktreibende Kraft berücksichtigt. Eine unter diesen Bedingungen einmal angeregte Schwingung müsste endlos andauern. Dies widerspricht der praktischen Erfahrung, der zufolge eine Schwingung ohne zusätzliche Anregung nach einer gewissen Zeit abklingt. Die Schwingung ist gedämpft.

Grund für die Dämpfung ist bei mechanischen Systemen stets die Reibung.

Die Bewegungsgleichung dafür hat die Form

$$m \cdot \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{Feder}} + \vec{F}_{\text{Reibung}}$$

Die Reibungskraft ist bei innerer Reibung⁶ häufig proportional zur Geschwindigkeit (z.B. Reibung einer Kugel in einer Flüssigkeit $\vec{F}_R = -6\pi\eta r \cdot \vec{v}$ mit η : dynamische Viskosität, r : Radius der Kugel, v : Geschwindigkeit). In verallgemeinerter Form wird die Reibungskraft ausgedrückt als $\vec{F}_R = -\rho \cdot \vec{v}$, wobei die Größe ρ als Dämpfungskonstante bezeichnet wird. Die Reibungskraft ist der Geschwindigkeit entgegen gerichtet.

Bewegungsgleichung für das Federpendel (vgl. Abschnitt 2.1.3):

$$m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x - \rho \cdot \dot{x} \quad (*)$$

Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \frac{\rho}{m} \cdot \dot{x} + \frac{D}{m} \cdot x = 0$$

mit den Abkürzungen $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ und $2\delta = \frac{\rho}{m}$ folgt die Differentialgleichung für die freie gedämpfte Schwingung:

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

Die Größe $\delta = \frac{\rho}{2m}$ heißt Abklingkonstante.

Energiebetrachtung

Im Unterschied zur ungedämpften Schwingung (Abschnitt 2.1.4) tritt bei der gedämpften Schwingung außer der Federkraft eine Reibungskraft auf, die von der Geschwindigkeit des pendelnden Körpers abhängt.

Die Multiplikation der Bewegungsgleichung (*) mit der Geschwindigkeit liefert damit:

⁶ Als innere Reibung bezeichnet man die Reibung in Flüssigkeiten und Gasen. Im Gegensatz dazu nennt man die Reibung zwischen Festkörpern äußere Reibung. Bei der äußeren Reibung hängt die Reibungskraft nicht von der Geschwindigkeit ab, wodurch man ein anderes Verhalten bei der gedämpften Schwingung erhält.

$$m \cdot \ddot{x} \cdot \dot{x} + D \cdot x \cdot \dot{x} = -\rho \cdot \dot{x}^2$$

und

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{D}{2} x^2 \right) = -\rho \cdot \dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt} (W_k + W_p) = \frac{d}{dt} W = -\rho \cdot \dot{x}^2 < 0.$$

Wir erkennen auf der linken Seite der Gleichung wieder die Zeitableitung der Gesamtenergie. Auf der rechten Seite erhalten wir aber wegen der Reibungskraft einen von Null verschiedenen Ausdruck. Im Fall der gedämpften Schwingung bleibt also die mechanische Energie W nicht konstant, sondern sie nimmt ab (Umwandlung in Wärme).

Da die mechanische Gesamtenergie W proportional zum Amplitudenquadrat der Schwingung ist, muss auch die Amplitude der Schwingung ständig abnehmen. Das soll beim Lösungsansatz für die Lösung der Bewegungsgleichung berücksichtigt werden.

Lösung der Bewegungsgleichung

a) Periodischer Fall (Schwingfall)

Zur Lösung dieser Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

verwenden wir auf Grund der Energiebetrachtung und entsprechend den Beobachtungen über den Bewegungsablauf den Lösungsansatz

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega_d t + \varphi_0).$$

Dabei bezeichnet die Größe ω_d die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung, die sich, wie im Experiment zu sehen war, von der Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung ω_0 unterscheidet. Der Faktor vor der Winkelfunktion beschreibt die mit der Zeit abnehmende Amplitude.

Zur Bestimmung der Größen λ und ω_d muss der Lösungsansatz in die Bewegungsgleichung eingesetzt werden. Um den Schreibaufwand zu reduzieren, wollen wir die Abkürzung

$$(\omega_d t + \varphi_0) = \varphi \quad (\text{Ableitung: } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_d t + \varphi_0) = \omega_d)$$

verwenden.

Differenzieren und Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\dot{x}(t) = A e^{-\lambda t} (-\lambda \cos \varphi - \omega_d \sin \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = A e^{-\lambda t} (\lambda^2 \cos \varphi + 2\lambda \omega_d \sin \varphi - \omega_d^2 \cos \varphi)$$

und
$$\left[(\lambda^2 - \omega_d^2) \cos \varphi + 2\lambda \omega_d \sin \varphi \right] + 2\delta (-\lambda \cos \varphi - \omega_d \sin \varphi) + \omega_0^2 \cos \varphi = 0$$

$$(\lambda^2 - \omega_d^2 - 2\delta \lambda + \omega_0^2) \cdot \cos \varphi + (2\lambda \omega_d - 2\delta \omega_d) \cdot \sin \varphi = 0$$

Damit diese Gleichung für beliebige Winkel φ (und damit für beliebige Zeiten) erfüllt wird, müssen die beiden Terme in Klammern jeweils gleich Null sein.

Damit wird (2. Klammer)

$$\lambda = \delta$$

und (1. Klammer)

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Für die Frequenz ω_d der gedämpften Schwingung erhält man nur dann eine reelle Lösung, wenn der Radikand größer als Null ist, d.h. wenn

$$\omega_0 > \delta$$

ist. Damit wird auch gleich die Bedingung für das Auftreten des periodischen Falls formuliert.

Die Lösung der Differentialgleichung ist dann:

$$x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t + \varphi_0) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_d \cdot t + \varphi_0)$$

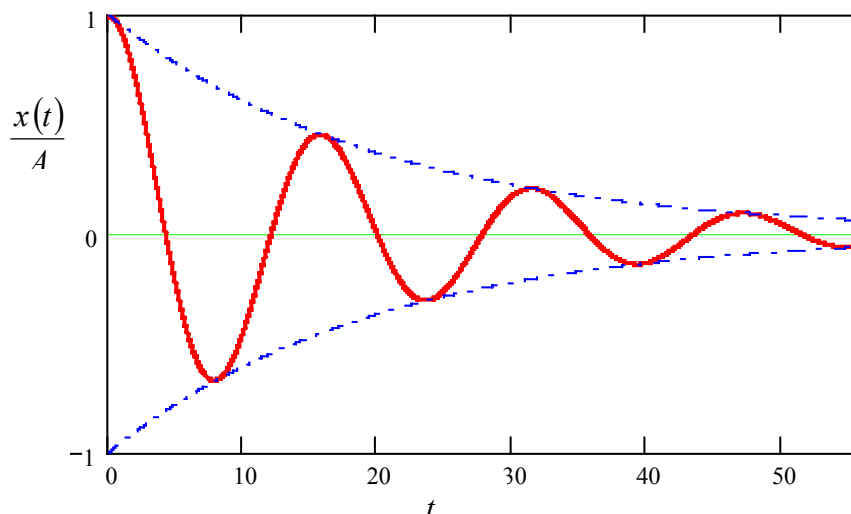
Die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung ist damit

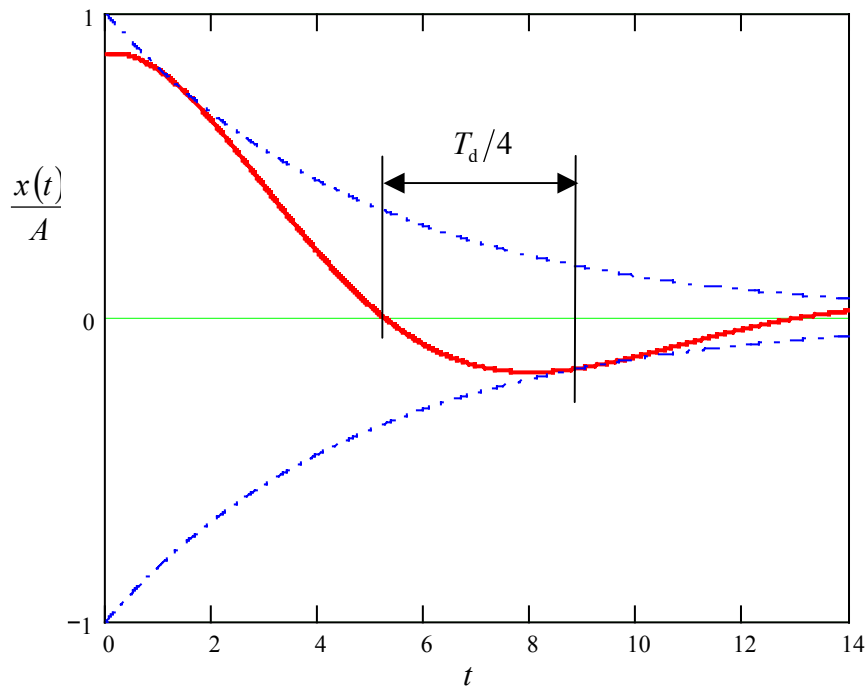
$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0.$$

Die Rechnung liefert also das beobachtete Verhalten, dass die Schwingungsdauer der freien gedämpften Schwingung größer ist als die Schwingungsdauer der freien ungedämpften Schwingung desselben Systems.

Bewegungsablauf:

Periodischer Fall





Erläuterung zum Kurvenverlauf:

Die Nullstellen und Berührungspunkte mit der Hüllkurve $\pm A \cdot e^{-\delta t}$ folgen im Abstand $\frac{T_d}{4}$ aufeinander.

Die Minima und Maxima der Schwingung fallen nicht mit den Berührungspunkten zusammen, sondern liegen davor.

Soll die Kurve bei $t = 0$ mit horizontaler Tangente (also mit $v(0) = 0$) beginnen, nimmt die Anfangsphase den Wert $\varphi_0 = -\arctan \frac{\delta}{\omega_d}$ an. Das bedeutet, dass $x(0) = A \frac{\omega_d}{\sqrt{\omega_d^2 + \delta^2}} < A$ wird.

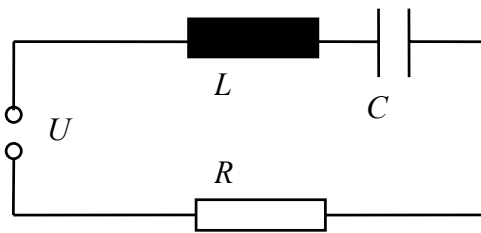
Für das Verhältnis der Auslenkungen zweier Schwingungszustände, die um die Schwingungsdauer T_d auseinander liegen, erhält man:

$$\frac{x(t)}{x(t + T_d)} = \frac{A \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0)}{A \cdot e^{-\delta(t+T_d)} \cos(\omega_d t + \varphi_0 + 2\pi)} = e^{\delta T_d}$$

Der Logarithmus davon wird als **logarithmisches Dekrement** bezeichnet und ist ein Maß für das Abklingen der Schwingung:

$$\Lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t + T_d)} = \delta T_d$$

◆ *Experiment gedämpfte elektromagnetische Schwingung (Reihenschwingkreis):*



Schwingungs-Differentialgleichung

$$\ddot{i} + \frac{R}{L} \dot{i} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \delta = \frac{R}{2L}$$

Durch Variation des Widerstandes wird das Abklingverhalten verändert.

b) Aperiodischer Fall, $\omega_0 < \delta$ (Kriechfall)

Wie wir gesehen haben, ist der Lösungsansatz einer Schwingung mit abnehmender Amplitude nur dann gerechtfertigt, wenn die Dämpfung klein ist, d.h. wenn $\omega_0 > \delta$ ist. Für große Dämpfung erhält man keine Schwingung mehr, die Auslenkung $x(t)$ geht irgendwie asymptotisch gegen Null.

◆ *Experiment Federpendel mit Wirbelstrombremse:*

Am Federpendel hängt ein Aluminiumstreifen, der sich zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten bewegt. Durch Vergrößerung des Spulenstromes kann die Abklingkonstante soweit erhöht werden, dass der aperiodische Fall erreicht wird.

In diesem Fall kann der Lösungsansatz

$$x(t) = A e^{-\lambda t}$$

versucht werden.

Differenzieren und Einsetzen in die Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung ergibt:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 x(t)$$

$$\lambda^2 - 2\delta \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad \text{für } \delta > \omega_0$$

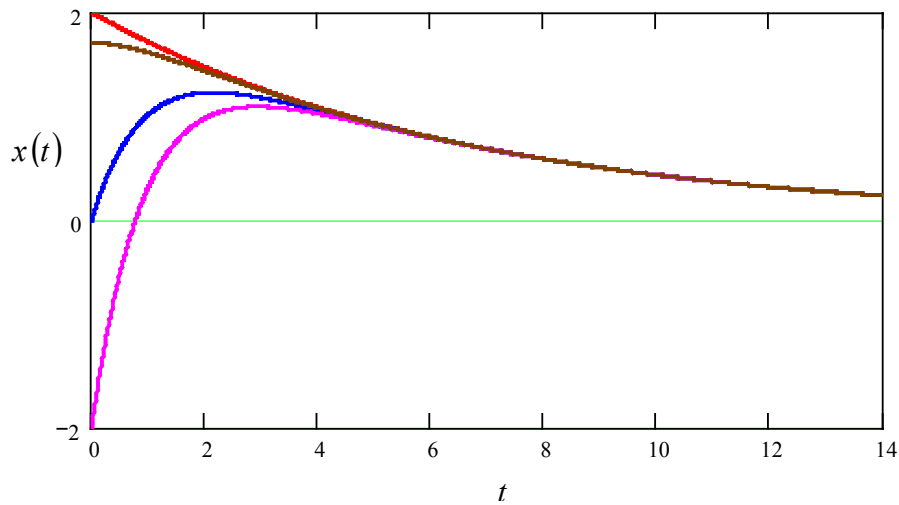
Die Lösung der Differentialgleichung erhält damit die Form

$$x(t) = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

Bewegungsablauf:

Je nach Wahl der Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich z.B. die folgenden Kurvenverläufe:

Aperiodischer Fall



Die Kurven beschreiben (von oben nach unten): Auslenken und Anstoßen in Richtung auf die Ruhelage, Auslenken und Loslassen, Anstoßen in der Ruhelage, Auslenken und (kräftiges) Anstoßen in Richtung auf die Ruhelage.

c) Aperiodischer Grenzfall, $\omega_0 = \delta$

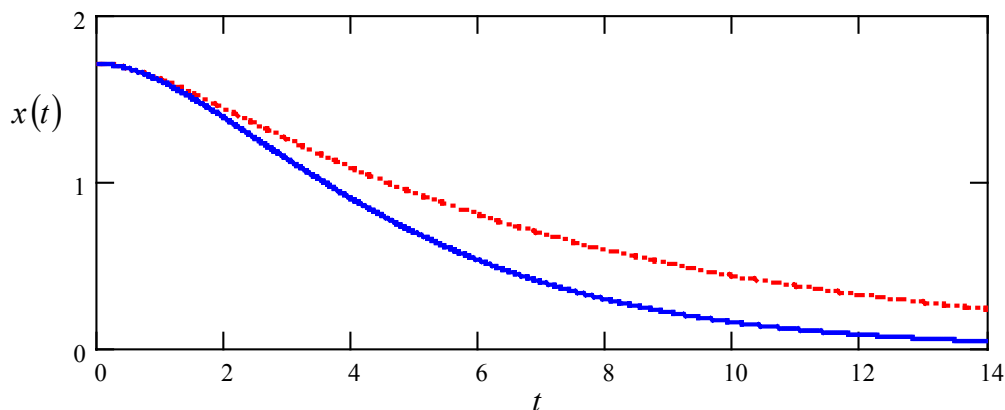
Beim aperiodischen Grenzfall tritt gerade keine Schwingung mehr auf, die Auslenkung geht schnellstmöglich auf Null zurück.

Die Ort-Zeit-Funktion lautet hier:

$$x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

Bewegungsablauf:

Aperiodischer Grenzfall

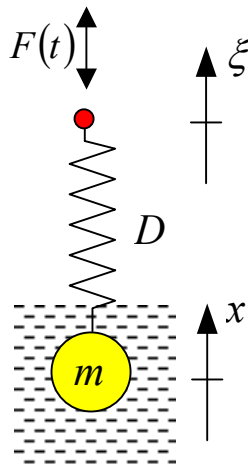


Die durchgezogene Kurve ist die für den Grenzfall $\delta = \omega_0$. Zum Vergleich gibt die gestrichelte Kurve den Bewegungsablauf für $\delta > \omega_0$ wieder. ω_0 ist für beide Kurven gleich.

Der aperiodische Grenzfall ist vor allem von technischer Bedeutung, da in diesem Fall die Gleichgewichtslage schnellstmöglich erreicht wird. Bei technische Dämpfungselementen versucht man, den aperiodischen Grenzfall so gut wie möglich zu erreichen.

2.3 Die erzwungene Schwingung

◆ *Experiment angeregtes gedämpftes Federpendel:*



Ein gedämpftes Federpendel wird an seinem oberen Ende durch eine periodische Kraft angeregt und führt eine erzwungene Schwingung aus. Es werden die Amplitude der erzwungenen Schwingung und die Phasenlage der erzwungenen Schwingung relativ zur Erregung für verschiedene Erregerfrequenzen beobachtet.

Das Experiment zeigt, dass sich für eine bestimmte Erregerfrequenz ω nach einer gewissen Zeit (Einschwingvorgang) eine stationäre⁷ Schwingung einstellt. Die Schwingung hat dieselbe Frequenz ω wie die anregende Kraft, eine konstante Amplitude $A(\omega)$ und eine konstante Phasenverschiebung $\varphi_0(\omega)$ gegenüber der anregenden Kraft.

Betrachtet man die Amplitude $A(\omega)$ für verschiedene Erregerfrequenzen, so stellt man fest, dass die Amplitude zunächst (bei $\omega = 0$) einen endlichen Wert hat, mit zunehmender Erregerfrequenz wächst, ein Maximum (Resonanz) durchläuft, schließlich wieder abnimmt und für große Erregerfrequenzen gegen Null geht. Bei kleinen Erregerfrequenzen schwingen Erreger und Oszillator mit gleicher Phase, die Phasenverschiebung beträgt bei der Eigenfrequenz des Oszillators (das ist annähernd die Resonanzfrequenz) gerade $-\frac{\pi}{2}$, und bei großen Erregerfrequenzen schwingen Erreger und Oszillator gegenphasig.

Die Bewegungsgleichung für den Oszillator hat mit der erregenden Kraft $F(t)$ nun die Form:

$$m\ddot{x} = -Dx - \rho\dot{x} + F(t)$$

$$\ddot{x} + \frac{\rho}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = \frac{1}{m}F(t) \quad \text{Mit den bereits eingeführten Abkürzungen erhält man:}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t)$$

Die Kraft $F(t)$ soll sich periodisch nach einer Kosinusfunktion ändern:

$$F(t) = F_0 \cdot \cos \omega t$$

Als Lösungsansatz für die stationäre Schwingung verwenden wir die Funktion

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi_0(\omega)) = A \cos \varphi$$

Die Größe ω bezeichnet hier jeweils die Erregerfrequenz. Der Lösungsansatz beschreibt das beobachtete Verhalten: Der Oszillator führt bei einer bestimmten Erregerfrequenz eine Schwingung mit konstanter Amplitude und einer bestimmten festen Phasendifferenz zur Erre-

⁷ Stationär: zeitlich unveränderlich infolge eines statischen oder dynamischen Gleichgewichtszustandes

gerschwingung aus. Bei Änderung der Erregerfrequenz ändern sich Amplitude und Phasenverschiebung der erzwungenen Schwingung.

Einsetzen des Lösungsansatzes in die Differentialgleichung (unter Beachtung der Abkürzung $\varphi = \omega t + \varphi_0$; $\dot{\varphi} = \omega$) ergibt:

$$-\omega^2 A \cos \varphi - 2\delta \omega A \sin \varphi + \omega_0^2 A \cos \varphi = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \varphi - 2\delta \omega A \sin \varphi - \frac{F_0}{m} \cos \omega t = 0$$

Für das weitere Auflösen dieser Gleichung müssen die beiden Winkelfunktionen $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ mit Hilfe von Additionstheoremen⁸ zerlegt werden:

$$\cos \varphi = \cos \omega t \cos \varphi_0 - \sin \omega t \sin \varphi_0$$

$$\sin \varphi = \sin \omega t \cos \varphi_0 + \cos \omega t \sin \varphi_0$$

Einsetzen in die oben stehende Gleichung und Sortieren nach Gliedern mit $\sin \omega t$ bzw. $\cos \omega t$ ergibt schließlich:

$$\cos \omega t \left[A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi_0 - 2\delta \omega A \sin \varphi_0 - \frac{F_0}{m} \right] - \sin \omega t \left[A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi_0 + 2\delta \omega A \cos \varphi_0 \right] = 0$$

Damit diese Gleichung für beliebige Zeiten erfüllt ist, müssen wieder beide Ausdrücke in den eckigen Klammern gleich Null sein.

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi_0 + 2\delta \omega A \cos \varphi_0 = 0$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{2\delta \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\boxed{\varphi_0 = \arctan \frac{2\delta \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

und $A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi_0 - 2\delta \omega A \sin \varphi_0 = \frac{F_0}{m}$

$$A \cos \varphi_0 (\omega_0^2 - \omega^2 - 2\delta \omega \tan \varphi_0) = \frac{F_0}{m}.$$

Mit $\cos \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}}$ und Einsetzen des obigen Ausdruckes für $\tan \varphi_0$

erhält man zunächst

$$A \left(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\delta \omega \frac{2\delta \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) = \frac{F_0}{m} \sqrt{1 + \frac{4\delta^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

und nach Multiplikation mit $(\omega_0^2 - \omega^2)$

⁸ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$$A\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right] = \frac{F_0}{m} \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}.$$

Durch Umstellen der Gleichung ergibt sich schließlich die Amplitude $A(\omega)$ der stationären erzwungenen Schwingung:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Das komplette Weg-Zeit-Gesetz für den stationären Schwingungszustand lautet damit:

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cdot \cos\left(\omega t + \arctan\frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

Diskussion der Lösung:

1. Amplitude als Funktion der Anregungsfrequenz

Maximale Amplitude (Resonanz)

Damit für $\omega = \omega_r$ die Amplitude maximal wird, muss gelten:

$$\left.\frac{dA}{d\omega}\right|_{\omega_r} = 0$$

Die Ableitung dieser Funktion ist recht unhandlich. Man sieht aber leicht, dass A maximal wird, wenn der Nenner minimal ist. Man kann noch weiter gehen und sagen, dass es ausreicht, wenn der Radikand minimal wird.

$$\frac{dR}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 \right] = 2(\omega^2 - \omega_0^2) \cdot 2\omega + 4\delta^2 \cdot 2\omega$$

Minimum:

$$\left.\frac{dR}{d\omega}\right|_{\omega_r} = 0$$

$$4\omega_r(\omega_r^2 - \omega_0^2) + 8\delta^2\omega_r = 0$$

Die Trivallösung lautet hier

$$\omega_{r1} = 0.$$

Wenn ω_r nicht Null sein soll, kann durch $4\omega_r$ dividiert werden:

$$\omega_r^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 = 0$$

Man erhält als zweite Lösung

$$\omega_{r2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Das ist aber nur dann eine Lösung der Gleichung, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist, d.h. für

$$2\delta^2 \leq \omega_0^2 \quad \text{bzw.} \quad \delta \leq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Einsetzen der Lösungen in den Ausdruck für die Amplitude zeigt, dass nur die zweite Lösung tatsächlich eine Resonanz beschreibt.

Für $\omega_{r1} = 0$ erhält man die Amplitude

$$A(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{D}.$$

Man kann zeigen, dass das gerade die Amplitude der Erregung ist. Wenn die Erregerfrequenz gleich Null ist, durchläuft das System nur Gleichgewichtszustände, die schwingende Masse folgt der Bewegung des Erregers.

Im zweiten Fall wird die Amplitude

$$A(\omega_{r2}) = \frac{F_0}{m\omega_0 2\delta \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}}$$

Da nur die zweite Lösung eine Resonanz beschreibt, soll im Weiteren der Index „2“ weggelassen werden. Die Resonanzfrequenz wird mit ω_r bezeichnet.

Das Verhältnis der Amplitude bei der Resonanzfrequenz zur Amplitude bei $\omega = 0$ bezeichnet man als **Resonanzüberhöhung**:

$$\frac{A(\omega_r)}{A(0)} = \frac{\omega_0}{2\delta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}}$$

Für kleine Dämpfung, d.h. $\delta \ll \omega_0$, wird $\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \ll 1$ und

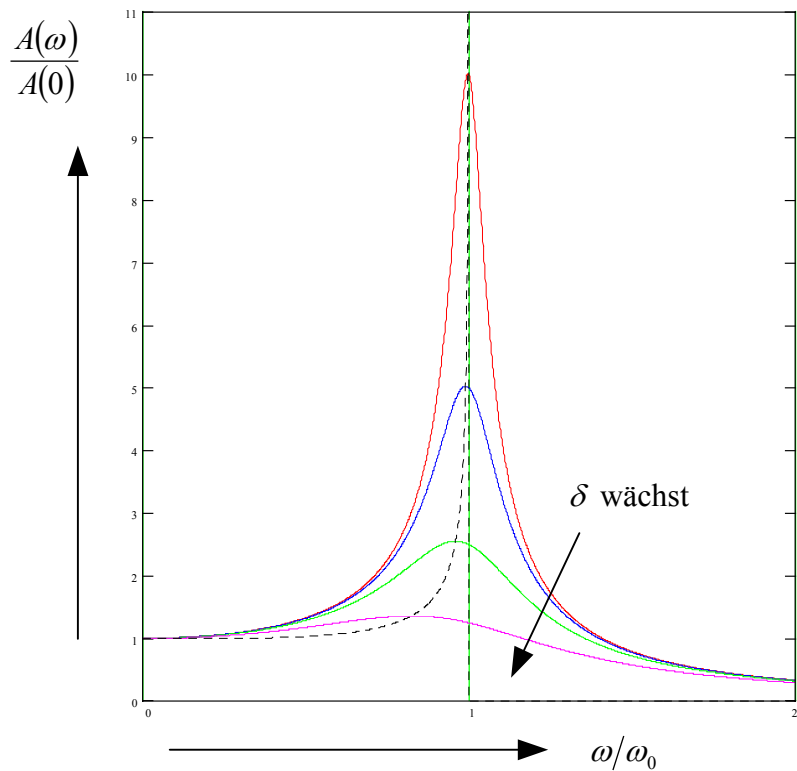
$$\frac{A(\omega_r)}{A(0)} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\pi}{\Lambda} \quad (\Lambda = \delta T : \text{logarithmisches Dekrement})$$

Die sogenannte Resonanzkatastrophe erhält man für

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{A(\omega_r)}{A(0)} = \infty$$

Grafische Darstellung:**Schwingungsamplitude als Funktion der Erregerfrequenz**

Die gestrichelte Linie verbindet die Resonanzmaxima: Mit wachsender Dämpfung werden die Maxima niedriger und verschieben sich zu kleineren Erregerfrequenzen.

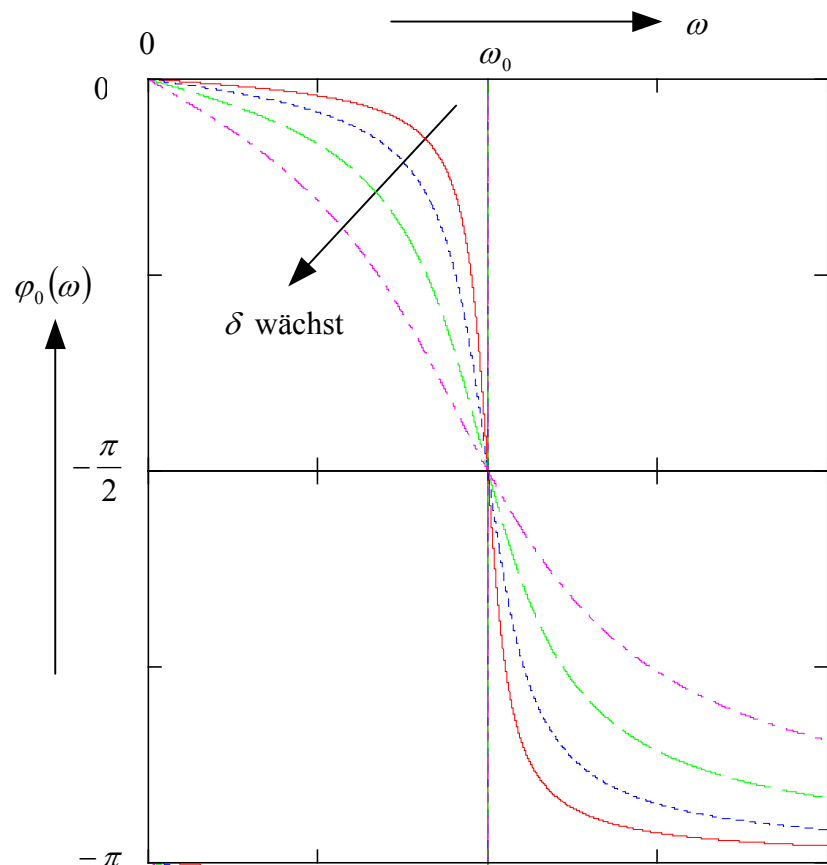
**2. Phase als Funktion der Anregungsfrequenz**

Für die Phasenverschiebung zwischen erzwungener Schwingung und Erregung hatten wir erhalten

$$\varphi_0 = \arctan \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Grafische Darstellung:**Phasenverschiebung als Funktion der Erregerfrequenz**

Bei der Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators ω_0 ist die Phasenverschiebung immer $-\pi/2$, unabhängig von der Dämpfung.



◆ *Experiment erzwungene Schwingung mit Anzeige des Phasenwinkels*

Leistungsbetrachtung

Wir multiplizieren wieder die Bewegungsgleichung mit \dot{x} , woraus folgt:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{D}{2} x^2 \right] = -\rho \dot{x}^2 + \dot{x} F(t)$$

$$\frac{dW}{dt} = -\rho \dot{x}^2 + \dot{x} F(t)$$

$$W = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{D}{2} x^2 = \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{D}{2} A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Einsetzen von $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ (d.h. $D = m \omega_0^2$) ergibt:

$$W = \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Wegen der unterschiedlichen Faktoren vor den Winkelfunktionen lässt sich dieser Ausdruck nicht weiter zusammenfassen. Man kann aber den zeitlichen Mittelwert der Gesamtenergie bilden. Für die mittlere Gesamtenergie erhält man dann den zeitunabhängigen Ausdruck

$$\overline{W} = \frac{1}{T} \int_0^T W dt = \frac{1}{2} A^2 \left[\frac{m}{2} \omega^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 \right] = \frac{m}{4} A^2 (\omega^2 + \omega_0^2),$$

und die zeitliche Änderung der mittleren Gesamtenergie ergibt sich damit als

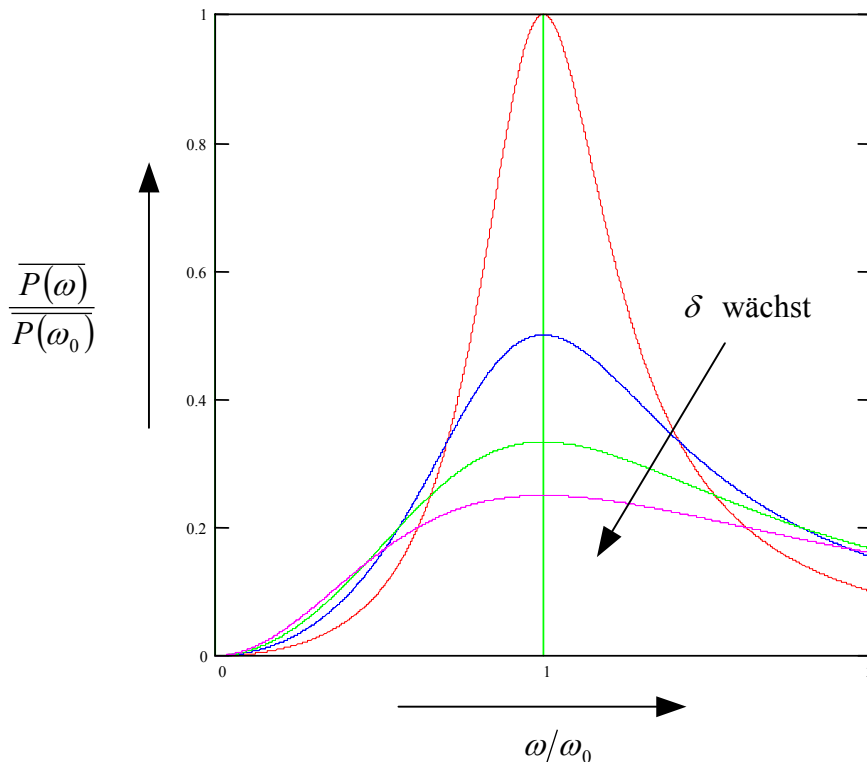
$$\boxed{\frac{d\overline{W}}{dt} = \underbrace{-\overline{\rho \dot{x}^2}}_{\substack{\text{durch Reibung} \\ \text{verbrauchte}}} + \underbrace{\overline{\dot{x} F(t)}}_{\substack{\text{dem System} \\ \text{zugeführte}}} = 0,}$$

mittlere Leistung $\overline{P(\omega)}$

wobei $\overline{\dot{x} F(t)} = \overline{P(\omega)}$ die dem System zugeführte mittlere Leistung und $-\overline{\rho \dot{x}^2}$ die durch Reibung verbrauchte mittlere Leistung sind. Man erkennt, dass im zeitlichen Mittelwert dem Oszillator gerade so viel Leistung durch den Erreger zugeführt wird, wie durch Reibung verbraucht wird.

Durch Einsetzen von $\overline{\dot{x}^2}$ und der Amplitude A erhält man für die im zeitlichen Mittel zugeführte Leistung als Funktion der Erregerfrequenz:

$$\boxed{\overline{P(\omega)} = \overline{\rho \dot{x}^2} = \rho \frac{A^2 \omega^2}{2} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{F_0}{m} \right)^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}}$$



Das Maximum für diesen Ausdruck (Leistungsresonanzmaximum) liegt bei $\omega = \omega_0$, d.h. die dem System zugeführte mittlere Leistung wird maximal, wenn die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz des freien ungedämpften Oszillators ist.

Als Resonanzbreite $\Delta\omega$ bezeichnet man die Breite der Leistungskurve in halber Höhe des Maximums.

Durch Berechnung der Anregungsfrequenzen, bei denen die mittlere

Leistung halb so groß wie die mittlere Leistung bei der Eigenfrequenz ist, erhält man leicht die Resonanzbreite oder Halbwertsbreite der Leistungskurve:

$$\Delta\omega = 2\delta = \frac{\rho}{m}$$

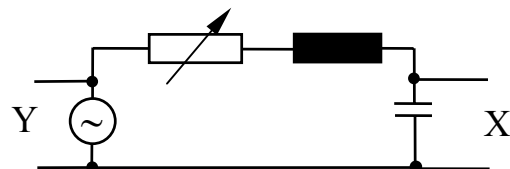
◆ *Experiment Reihenschwingkreis:*

Die Beziehungen zu Amplitude und Phase einer erzwungenen Schwingung werden demonstriert. [Erläuterung: Die Differentialgleichung für den Schwingkreis ergibt sich aus der 2. Kirchhoff'schen Regel (Maschensatz): Für jeden geschlossenen Kreis eines Netzes von linearen Leitern ist die Summe der Teilspannungen an den Widerständen gleich der Summe der eingprägten Spannungen (Urspannungen) der Spannungsquellen.]

$$U_a = U_R - U_L + U_C$$

$$U_a = IR + L\dot{I} + \frac{Q}{C} \quad \text{mit } I = \dot{Q}$$

$$U_a = R\dot{Q} + L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q$$



2.4 Gekoppelte Oszillatoren

◆ *Experiment gekoppelte Stangenpendel:*
 Zwei gleiche Stangenpendel werden mit einer Feder gekoppelt. Wird eines der Pendel zum Schwingen angeregt, überträgt die Kopplungsfeder die Energie auf das zweite Pendel, sodass dieses ebenfalls zu schwingen beginnt. Schließlich kommt das erste Pendel zur Ruhe, während das zweite mit der Amplitude schwingt, mit der die Schwingung des ersten begonnen hatte. Der Vorgang wiederholt sich in umgekehrter Richtung.

Häufig kommen Kopplungen schwingungsfähiger Systeme vor. Ähnlich wie bei der erzwungenen Schwingung wird dabei einem Oszillator Energie zugeführt. Die Energie stammt aber hier von einem anderen Oszillator, dessen Gesamtenergie folglich abnimmt. Da die Oszillatoren aber miteinander verbunden sind, wird ständig die Energie zwischen den beteiligten Oszillatoren hin- und hertransportiert.

Für die gekoppelten Stangenpendel und ähnliche Systeme ergeben sich Ort-Zeit-Funktionen in der Form (s. grafische Darstellung auf der nächsten Seite):

$$s_1(t) = A \sin \bar{\omega} t \cdot \cos \frac{\Delta \omega}{2} t$$

$$s_2(t) = -A \cos \bar{\omega} t \cdot \sin \frac{\Delta \omega}{2} t$$

Zur Erklärung dieses Verhaltens muss man zunächst klären, welche Eigenfrequenzen das System, bestehend aus den beiden Stangenpendeln und der Kopplungsfeder, hat. Die erste Eigenfrequenz erhält man, wenn man die beiden Pendel im Gleichtakt schwingen lässt. In diesem Fall bleibt die Feder wirkungslos, und man erhält die Eigenfrequenz ω_1 , die gleich der Eigenfrequenz der freien ungedämpften Schwingung jedes der beiden Pendel ist, d.h.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

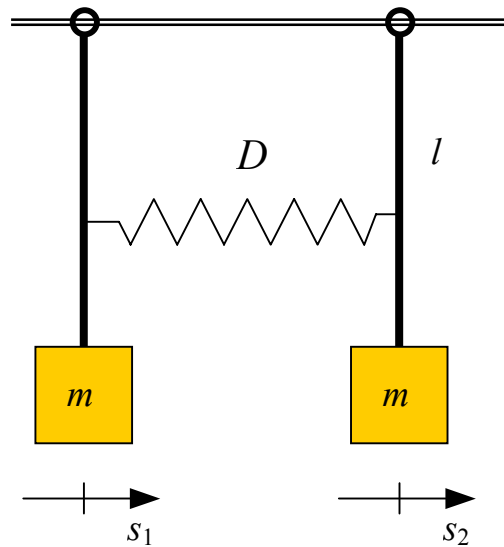
Die zweite Eigenfrequenz ergibt sich, wenn beide Pendel gegeneinander schwingen. Man erhält dann für die rücktreibende Kraft eine Zusatzkraft durch die Kopplungsfeder. Die entsprechende Eigenfrequenz ergibt sich dann als

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}}.$$

Betrachtet man wieder den Ablauf der gekoppelten Schwingung der beiden Pendel, erkennt man, dass die beiden Oszillatoren mit einer Frequenz schwingen, die der mittleren Frequenz beider Eigenfrequenzen

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

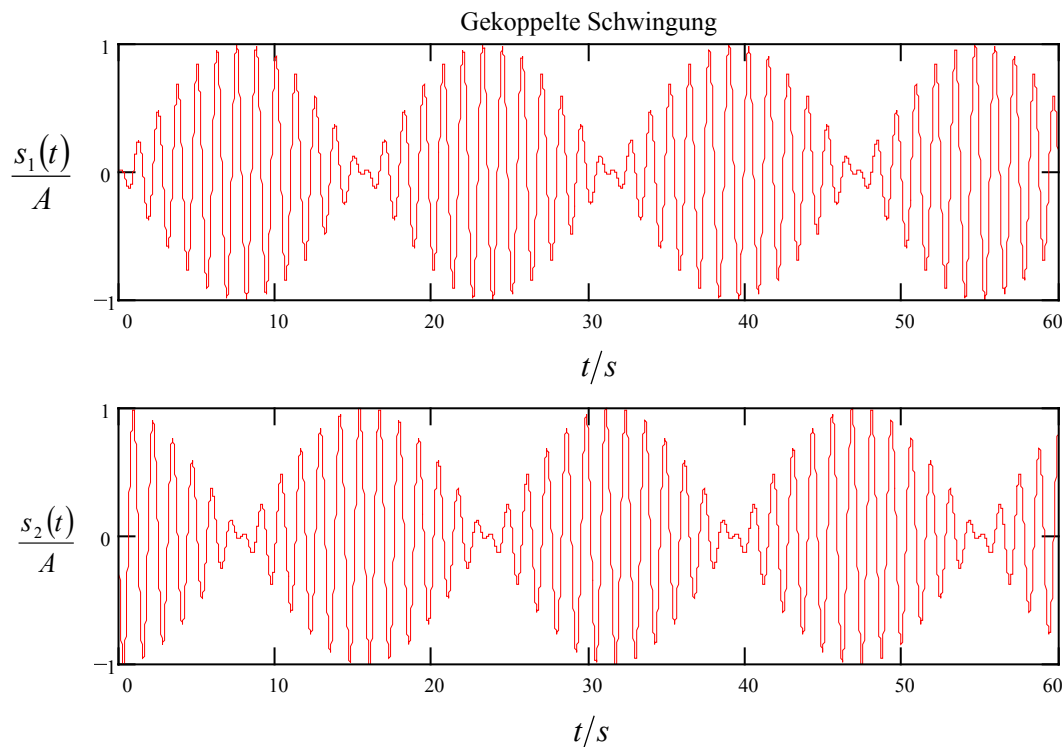
entspricht. Die Amplitude der Schwingung ändert sich mit der Frequenz



$$\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

Diese Änderung der Amplitude bezeichnet man als **Schwebung**. Mit der Schwebungsfrequenz wird die Energie von einem zum anderen Oszillator transportiert.

Bewegungsablauf:



◆ Experiment gekoppelte Fadenpendel:

Zwei aneinander hängende gleich lange Fadenpendel mit unterschiedlichen Massen werden zur Schwingung angeregt. Durch die Kopplung der Pendel wird die Energie zwischen beiden übertragen. Wegen der unterschiedlichen Massen ist bei gleicher Energie die Amplitude der Schwingung des Pendels mit der größeren Masse wesentlich kleiner als die der Schwingung des Pendels mit der kleinen Masse. So kommt es, dass immer dann, wenn die Energie auf das Pendel mit der großen Masse übertragen wurde, die Bewegung des ganzen Systems scheinbar zum Stillstand kommt.

Ändert man den Aufbau so, dass das untere Pendel in einer Wanne mit Wasser schwingt, also eine gedämpfte Schwingung ausführt, sieht man die grundsätzliche Wirkungsweise einiger technischer Anwendungen gekoppelter Oszillatoren: Die Schwingungsenergie wird von einem Oszillator zum anderen übertragen und dort durch Reibung als mechanische Energie vernichtet.