

Skriptum zur Vorlesung

Modellierung

Christian Schmeiser¹

Contents

1	Einleitung und Voraussetzungen	1
2	Zinsen, Kredite, Renten	1
3	Zeitdiskrete Populationsdynamik	11
4	Optimalsteuerung im Fischfang	17
5	Dimensionsanalyse	23
6	Störungsmethoden	28
7	Autoverkehr: Mikroskopische Modellierung	35
8	Autoverkehr: Makroskopische Modellierung	37

1 Einleitung und Voraussetzungen

In dieser Vorlesung sollen anhand von Beispielen einige Prinzipien der mathematischen Modellbildung erläutert werden. Die Beispiele sind zum Großteil den beiden Büchern [1], [2] entnommen, allerdings zumeist in veränderter Form.

Mathematische Voraussetzungen sind Grundkenntnisse der Differential- und Integralrechnung und der linearen Algebra, sowie elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es werden auch Bezüge zu fortgeschritteneren Gebieten wie z.B. gewöhnliche Differentialgleichungen hergestellt. Vorkenntnisse sind hier jedoch nicht notwendig.

¹Institut für Mathematik, Universität Wien, Nordbergstraße 15, 1090 Wien, Austria.
christian.schmeiser@univie.ac.at

References

- [1] R. Illner, C.S. Bohun, S. McCollum, T. van Roode, *Mathematical Modelling. A Case Studies Approach*, AMS, Providence, 2005.
- [2] J.D. Murray, *Mathematical Biology I: An Introduction*, 3rd edition, Springer, New York, 2002.

2 Zinsen, Kredite, Renten

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Fragen wie der Berechnung von Kreditraten oder dem momentanen Wert einer Rente.

Wir beginnen mit elementaren Aussagen zur Zinsenverrechnung. Sei P_0 das *Startkapital* auf einem Sparbuch, r die *Zinsenrate* (d.h. $r = 0,05$ bei 5% Zinsen) und $P_1(n)$ das Kapital nach n Jahren bei *jährlicher Verzinsung*. Dann gilt natürlich

$$P_1(1) = P_0(1 + r).$$

Diese Regel lässt sich auf zwei beliebige aufeinanderfolgende Jahre verallgemeinern:

$$P_1(n + 1) = P_1(n)(1 + r) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

was die Folge $\{P_1(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert. Die Rekursion kann explizit gelöst werden (Beweis: Vollständige Induktion):

$$P_1(n) = P_0(1 + r)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wie sieht es bei *halbjährlicher Verzinsung* aus (Kapital $P_2(n)$ nach n Jahren; halbjährliche Zinsenrate $r/2$)? Offensichtlich gilt

$$P_2(1) = P_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 = P_0 \left(1 + r + \frac{r^2}{4}\right) > P_1(1).$$

Das ist offensichtlich besser für den Bankkunden. Warum dann nicht gleich monatliche oder tägliche Verzinsung (oder überhaupt jede Sekunde)? Man nennt im obigen Fall r die *nominale* und $r + r^2/4$ die *effektive Zinsenrate*. Allgemein gilt, wenn man bei nominaler Zinsenrate r m Mal im Jahr verzinst:

$$P_m(t) = P_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}, \tag{1}$$

wobei genau genommen mt eine natürliche Zahl sein muss. Als Limes $m \rightarrow \infty$ erhält man *kontinuierliche Verzinsung*:

$$P_\infty(t) = P_0 e^{rt}, \quad (2)$$

weil mit $\varepsilon = r/m$

$$P_m(t) = P_0 \left[(1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon} \right]^{rt}$$

gilt und der Ausdruck in der eckigen Klammer für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die Eulersche Zahl e konvergiert. In die Formel (2) darf für t eine beliebige reelle Zahl eingesetzt werden. Die effektive Zinsrate bei kontinuierlicher Verzinsung und bei nominaler Zinsrate r ist $e^r - 1$.

Das Kapital wächst also exponentiell (ein Beweis, dass 'Geld arbeitet'?).

Kontinuierliche Verzinsung als Approximation

Die Formel (2) für kontinuierliche Verzinsung kann auch als Näherung für (1) gesehen werden für große Werte von $x_m = m/r$, d.h. bei häufiger Verzinsung und/oder kleinen Zinsen. Wie gut ist diese Näherung? Das hat damit zu tun, wie nahe bei e die Zahl $(1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}$ für kleine Werte von ε ist (wobei $\varepsilon = 1/x_m$ gesetzt wurde). Um den Fehler zu schätzen, brauchen wir die *lineare Approximation* der Funktion

$$f(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}$$

in der Nähe von $\varepsilon = 0$. Diese ist gegeben durch

$$f(\varepsilon) \approx f(0) + \varepsilon f'(0) = e + \varepsilon f'(0).$$

Eine längere Rechnung liefert $f'(0) = -e/2$ und daher die *Fehlerschätzung*

$$f(\varepsilon) - e \approx -\frac{\varepsilon e}{2}.$$

Zur Auswertung von (1) benötigen wir also

$$g(\varepsilon) := P_0 f(\varepsilon)^{rt}, \quad g'(\varepsilon) = P_0 r t f(\varepsilon)^{rt-1} f'(\varepsilon), \quad g'(0) = -P_0 \frac{rt}{2} e^{rt}.$$

Schließlich ergibt sich die Fehlerschätzung

$$P_\infty(t) - P_m(t) \approx P_0 \frac{r^2 t}{2m} e^{rt}, \quad (3)$$

Beispiel: 1000 Euro Startkapital auf 10 Jahre, 5% Zinsen
(alles auf Cent gerundet)

Verzinsung	m	$P_m(10)$	$P_\infty(10) - P_m(10)$	Fehlerformel (3)
Jährlich	1	1628,89 Euro	19,83 Euro	20,61 Euro
Monatlich	12	1647,01 Euro	1,71 Euro	1,72 Euro
Täglich	365	1648,66 Euro	0,06 Euro	0,06 Euro
Kontinuierlich	∞	1648,72 Euro	0 Euro	0 Euro

Der Grenzübergang im Modell

Die Formel (1) für $P_m(t)$ ist die Lösung des Modellproblems, das aus der Rekursion

$$P_m\left(t + \frac{1}{m}\right) = P_m(t) \left(1 + \frac{r}{m}\right)$$

und aus der Anfangsbedingung $P_m(0) = P_0$ besteht. Die Rekursion kann auch in der Form

$$\frac{P_m(t + 1/m) - P_m(t)}{1/m} = rP_m(t)$$

geschrieben werden. Auf der linken Seite steht nun ein Differenzenquotient, und der Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ ergibt formal die *Differentialgleichung*

$$P'_\infty(t) = rP_\infty(t)$$

und die Anfangsbedingung $P_\infty(0) = P_0$. *Formal* bedeutet, dass diese Vorgangsweise (noch) keinen rigoros bewiesenen Zusammenhang zwischen den Problemstellungen für $P_m(t)$ und für $P_\infty(t)$ herstellt.

Das Problem für $P_\infty(t)$ ist ein Anfangswertproblem für eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Es kann gelöst werden, indem man die Differentialgleichung durch $P_\infty(t)$ dividiert und dann bezüglich t integriert. Das ergibt

$$\ln P_\infty(t) = rt + c$$

mit der Integrationskonstanten c . Auswertung an $t = 0$ und Verwendung der Anfangsbedingung ergibt $c = \ln P_0$ und damit die Formel (2). Wir haben also den erwarteten Zusammenhang hergestellt: Löst man das Problem für $P_m(t)$ und führt dann den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ durch, so erhält man dasselbe Resultat, wie wenn man zuerst in der Problemstellung den Grenzübergang durchführt und dann löst.

Kreditrückzahlung

Nun betrachten wir die folgende Aufgabenstellung: Ein Kredit in der Höhe P_0 soll in der Zeit T abbezahlt werden, wobei die nominale jährliche Kreditzinsrate r ist. Dabei wird m -mal im Jahr verzinst und jeweils die konstante Rückzahlungsrate x_m/m bezahlt. Gesucht ist die Rückzahlung pro Jahr x_m , wenn alle anderen Größen vorgegeben sind. Die nach der Zeit t verbleibende Schuld $P_m(t)$ genügt der Rekursion

$$P_m\left(t + \frac{1}{m}\right) = P_m(t) \left(1 + \frac{r}{m}\right) - \frac{x_m}{m} \quad (4)$$

und der Anfangsbedingung $P_m(0) = P_0$. Die rechte Seite der Rekursion entsteht, indem man zur Schuld zum Zeitpunkt t die im Zeitraum von t bis $t + 1/m$ angefallenen Zinsen addiert und dann die Rückzahlung abzieht. Um dieses Problem zu lösen, verwenden wir Ideen aus der linearen Algebra. Die Rekursion ist eine inhomogene lineare Gleichung (mit Inhomogenität $-x_m/m$). Ihre allgemeine Lösung lässt sich daher darstellen als Summe aus einer *Partikulärlösung* und der *allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung*.

Die homogene Gleichung (d.h. mit $x_m = 0$) haben wir schon behandelt und gesehen, dass ihre allgemeine Lösung die Form $c(1 + r/m)^{mt}$ hat, wobei c eine beliebige Konstante ist. Wir müssen also nur mehr eine Partikulärlösung finden. Oft hilft ein geeigneter *Ansatz*, d.h. man sucht nach einer Partikulärlösung von einer bestimmten Form. Ein geeigneter Ansatz im Falle unserer Rekursion besteht darin, nach einer zeitunabhängigen Partikulärlösung zu suchen. Das ergibt $P_{m,p}(t) = x_m/r$. Diese Lösung der Rekursion erfüllt natürlich im allgemeinen nicht die Anfangsbedingung außer im Sonderfall $x_m = rP_0$. Diese Wahl der jährlichen Rückzahlung ergäbe daher $P_m(t) = P_0$ für alle t , d.h. die Rückzahlung bedeckt nur die anfallenden Zinsen, und es erfolgt keine Kapitaltilgung. Diese Rückzahlungsrate ist üblicherweise das absolute Minimum, worauf ein Kreditgeber besteht.

Nun zurück zur vollständigen Lösung der Anfangswertproblems: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Rekursion ist

$$P_m(t) = \frac{x_m}{r} + c \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt},$$

wobei die Konstante c beliebig gewählt werden kann. Wir benützen diese Freiheit, um die Anfangsbedingung zu erfüllen. Das ergibt $c = P_0 - x_m/r$ und daher

$$P_m(t) = \frac{x_m}{r} + \left(P_0 - \frac{x_m}{r}\right) \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

Jetzt können wir die ursprüngliche Aufgabenstellung lösen. Soll der Kredit zum Zeitpunkt T abbezahlt sein, dann ergibt sich für die Rückzahlungsrate die Gleichung

$$P_m(T) = \frac{x_m}{r} + \left(P_0 - \frac{x_m}{r}\right) \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT} = 0,$$

und damit

$$x_m = rP_0 \frac{(1 + r/m)^{mT}}{(1 + r/m)^{mT} - 1}.$$

Um die Plausibilität dieses Resultates zu überprüfen, betrachten wir Grenzfälle. Zunächst ergibt sich im Limes $T \rightarrow \infty$ das zu erwartende Resultat $x_m = rP_0$, d.h. die schon oben erwähnte Situation des reinen Zinsendienstes ohne Kapitaltilgung. Im Limes $r \rightarrow 0$ (d.h. keine Zinsen) berechnet man mit Hilfe der Regel von de l'Hopital ebenso ein plausibles Resultat: $x_m = P_0/T$.

Die Bestimmung von x_m wird in der Angewandten Mathematik als *inverses Problem* bezeichnet, weil x_m zunächst nicht als Unbekannte, sondern als Teil der Daten des *direkten Problems* (des Anfangswertproblems für die Rekursion (4)) auftritt. Die Aufgabe bestand darin, die Daten x_m so zu wählen, dass die Lösung $P_m(t)$ die Zusatzforderung $P_m(T) = 0$ erfüllt.

Schließlich betrachten wir dieselbe Aufgabenstellung im Limes der kontinuierlichen Verzinsung. Die Rekursion (4) kann in der Form

$$\frac{P_m(t + 1/m) - P_m(t)}{1/m} = rP_m(t) - x_m$$

geschrieben werden. Der formale Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ ergibt die Differentialgleichung

$$P'_\infty(t) = rP_\infty(t) - x_\infty,$$

deren Lösung die Anfangsbedingung $P_\infty(0) = P_0$ erfüllen muss. Zur Lösung dieses (direkten) Problems gehen wir wie oben vor: Die Differentialgleichung hat die Partikulärlösung $P_{\infty,p}(t) = x_\infty/r$ und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ce^{rt} mit einer beliebigen Konstante c . Addition der beiden und Verwendung der Anfangsbedingung liefert

$$P_\infty(t) = \frac{x_\infty}{r} + \left(P_0 - \frac{x_\infty}{r}\right) e^{rt}. \quad (5)$$

Die Forderung $P_\infty(T) = 0$ ergibt

$$x_\infty = rP_0 \frac{e^{rT}}{e^{rT} - 1}, \quad (6)$$

was für $T \rightarrow \infty$ und für $r \rightarrow 0$ dieselben Limiten hat wie x_m . Natürlich kann x_∞ auch direkt als $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m$ berechnet werden.

Zeitlich veränderliche Zinsen

Ein für Kreditnehmer ärgerlicher Usus bei der Kreditvergabe besteht darin, dass sich der Kreditgeber oft eine Veränderung der Zinsen im Laufe der Rückzahlungsperiode vorbehält. Da diese Veränderungen nicht vorhersehbar sind, ist es dann prinzipiell unmöglich, eine konstante Rückzahlungsrate festzulegen. Die übliche Vorgangsweise besteht darin, dass die Rückzahlungsrate dauernd angepasst wird, und zwar unter der Annahme, dass die momentanen Zinsen in Zukunft konstant bleiben. Beim Zinsverlauf $r(t)$ und kontinuierlicher Verzinsung führt das auf die Wahl

$$x_\infty(t) = r(t)P_\infty(t) \frac{e^{r(t)(T-t)}}{e^{r(t)(T-t)} - 1}.$$

Das ist die oben hergeleitete Formel, wobei die momentane Schuld $P_\infty(t)$ als Anfangsschuld, die Restlaufzeit $T - t$ als Laufzeit und die momentane Zinsrate $r(t)$ als hypothetische konstante Rate für die Restlaufzeit eingesetzt wurde. Setzt man diese Wahl in die Differentialgleichung

$$P'_\infty(t) = r(t)P_\infty(t) - x_\infty(t)$$

ein, so ergibt sich

$$P'_\infty(t) = -\frac{r(t)}{e^{r(t)(T-t)} - 1} P_\infty(t),$$

d.h. eine homogene lineare Differentialgleichung, allerdings, zum Unterschied von oben, mit variablen Koeffizienten. Die Lösung erfolgt wieder durch Division durch $P_\infty(t)$ und anschließende Integration. Unter Verwendung der Anfangsbedingung $P_\infty(0) = P_0$ ergibt sich

$$P_\infty(t) = P_0 \exp\left(-\int_0^t \frac{r(s)}{e^{r(s)(T-s)} - 1} ds\right).$$

Nach unserer Vorgangsweise sollte der Kredit zum Zeitpunkt T abbezahlt sein, d.h. $P_\infty(T) = 0$. Das sieht auf den ersten Blick unmöglich aus, weil die Exponentialfunktion keine Nullstelle hat. Allerdings wird das Integral im Exponenten für $t = T$ ein divergentes uneigentliches Integral. Für $t \rightarrow T$ divergiert der Wert des Integrales gegen Unendlich, und $P_\infty(t)$ konvergiert gegen Null. Das läßt sich für den Fall konstanter Zinsen leicht zeigen, weil dann das Integral explizit berechnet werden kann. Mit ein bisschen Arbeit erhält man

$$\int_0^t \frac{r}{e^{r(T-s)} - 1} ds = -rt + \ln\left(\frac{e^{rT} - 1}{e^{r(T-t)} - 1}\right),$$

was wie angekündigt für $t \rightarrow T$ gegen Unendlich divergiert. Für den Schuldenverlauf bei konstanter Verzinsung folgt

$$P_\infty(t) = P_0 \frac{e^{rT} - e^{rt}}{e^{rT} - 1},$$

was man, wie zu erwarten war, auch durch Einsetzen von (6) in (5) erhält.

Renten

Als Rente bezeichnen wir die regelmäßige Auszahlung eines festen Betrages an eine Person bis zu ihrem Ableben. Es stellt sich die Frage nach einem sinnvollen Preis für diese Leistung.

Dazu benötigen wir den Begriff des *derzeitigen Werts*. Der derzeitige Wert einer Zahlung in der Höhe von $P(t)$ in t Jahren ist der Betrag, den ich jetzt besitzen muss, damit ich diese Zahlung garantieren kann. Da ich das Geld in der Zeit dazwischen auf ein Sparbuch legen kann, ergibt sich bei Verzinsung m -mal pro Jahr und konstanter nominaler Zinsrate r als derzeitiger Wert

$$P_{0,m} = \frac{P(t)}{(1 + r/m)^{mt}},$$

bzw., bei kontinuierlicher Verzinsung,

$$P_{0,\infty} = P(t)e^{-rt}.$$

Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass immer gleichzeitig verzinst und die Rente ausbezahlt wird, dann ist der derzeitige Wert einer Rente, bei der m -mal im Jahr für T Jahre der Betrag x/m ausbezahlt wird,

$$P_{0,m} = \sum_{i=1}^{mT} \frac{x}{m(1 + r/m)^i}.$$

Um in dieser Formel zum Limes $m \rightarrow \infty$ kontinuierlicher Verzinsung überzugehen, sind zwei Beobachtungen notwendig. Zunächst schreiben wir den Nenner des Summanden mit $\varepsilon = r/m$ um:

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^i = \left[(1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}\right]^{ri/m}.$$

Approximieren wir den Term in eckigen Klammern durch e , ergibt sich

$$P_{0,m} \approx x \sum_{i=1}^{mT} \exp\left(-r \frac{i}{m}\right) \frac{1}{m}.$$

Die Summe ist offensichtlich eine Riemannsumme, und mit $m \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$P_{0,\infty} = x \int_0^T e^{-rt} dt = \frac{x}{r} (1 - e^{-rT}) .$$

Mindestens diesen Preis muss der Anbieter der Rente verlangen. Das Problem ist allerdings, dass der Anbieter nicht weiß, wie lange der Käufer noch leben wird.

Wenn ein Prozess einerseits so komplex ist, dass ein von seinem Verlauf abhängiges Ereignis nicht präzise vorhergesagt werden kann, und wenn andererseits der Prozess oft auf ähnliche Art abläuft und jeweils das (Nicht) Eintreten des Ereignisses beobachtet werden kann, dann bietet sich die Verwendung von Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung an. In unserer Situation ist der Prozess das menschliche Leben, und das fragliche Ereignis ist der Tod.

Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* besteht aus einer Menge M (von *Elementarereignissen*) und einer Funktion W , die jeder Teilmenge A von M (jedem *Ereignis*) ihre (seine) *Wahrscheinlichkeit* $W(A) \in [0, 1]$ zuordnet. Dabei muss die Wahrscheinlichkeit 2 Eigenschaften haben. Zum einen muss $W(M) = 1$ gelten, zum anderen $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$, wenn $A \cap B = \{\}$. Das komplementäre Ereignis zu A (d.h. A tritt nicht ein) schreiben wir als \bar{A} . Es hat die Wahrscheinlichkeit $W(\bar{A}) = 1 - W(A)$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit*, dass A eintritt, unter der Annahme, dass B eintritt, ist gegeben durch

$$W(A|B) = \frac{W(A \cap B)}{W(B)} .$$

Die Ereignisse A und B heißen *unabhängig*, wenn die Wahrscheinlichkeit von A nicht vom Eintreten von B abhängt, d.h. wenn $W(A|B) = W(A)$ gilt bzw.

$$W(A \cap B) = W(A)W(B) .$$

Einen Wahrscheinlichkeitsraum mit höchstens abzählbarem M nennen wir *diskret*. Als Beispiele für *kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume* betrachten wir die Fälle $M = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. In diesem Fall nennen wir die Funktion

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W((t, t + \Delta t))}{\Delta t} ,$$

wenn sie existiert, die *Dichtefunktion* der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Eine *reelle Zufallsvariable* ist eine Abbildung $x : M \rightarrow \mathbb{R}$. Ist der Wahrscheinlichkeitsraum diskret, so ist ihr *Erwartungswert* definiert durch

$$E(x) := \sum_{m \in M} x(m)W(\{m\}) .$$

Im Fall $M = (a, b)$ und bei existierender Dichtefunktion gilt

$$E(x) = \int_a^b x(t)f(t)dt.$$

Die *Varianz* der Zufallsvariablen x ist definiert durch

$$V(x) = E((x - E(x))^2).$$

Im Folgenden arbeiten wir mit der *Überlebendenfunktion* $S(t)$, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit man mindestens t Jahre alt wird, und mit der Sterberate $h(t)$, die durch

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} W(A|B)$$

definiert ist, wobei A das Ereignis ist, dass man zwischen dem Alter t und dem Alter $t + \Delta t$ stirbt, und B das Ereignis ist, dass man mit dem Alter t noch lebt. Ein einfaches, wenn auch unrealistisches, Modell ist eine konstante Sterberate $h(t) = \lambda$.

Klarerweise gilt

$$S(t + \Delta t) = W(\bar{A} \cap B) = W(\bar{A}|B)W(B) = W(\bar{A}|B)S(t),$$

und daher

$$S(t + \Delta t) - S(t) = (W(\bar{A}|B) - 1)S(t) = -W(A|B)S(t).$$

Division durch Δt und der Limes $\Delta t \rightarrow 0$ liefern

$$S'(t) = -h(t)S(t).$$

Mit der Anfangsbedingung $S(0) = 1$ ergibt das

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(\tau)d\tau\right),$$

mit einer konstanten Sterberate also $S(t) = e^{-\lambda t}$.

Mit der obigen Notation ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Alter zwischen t und $t + \Delta t$ Jahren zu sterben, gegeben durch $W(A \cap B) = W(A|B)W(B)$. Die Dichtefunktion für den Ablebenszeitpunkt ist daher $f(t) = h(t)S(t)$. Der Erwartungswert des Ablebenszeitpunktes T (die *mittlere Lebenserwartung*) ist damit

$$E(T) = \int_0^\infty tf(t)dt.$$

Mit einer konstanten Sterberate ergibt sich $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $E(T) = 1/\lambda$ und $V(T) = 1/\lambda^2$.

Für die Rente mit kontinuierlicher Verzinsung erhält man

$$E(P_{0,\infty}) = \frac{x}{r} \int_0^\infty (1 - e^{-rt}) f(t) dt,$$

z.B. mit konstanter Sterberate $E(P_{0,\infty}) = x/(\lambda+r)$. Das sollte ein vernünftiger Mindestpreis für eine Rente sein. Um das dabei entstehende Risiko für den Verkäufer abzuschätzen, ist die Varianz $V(P_{0,\infty})$ eine wichtige Information. Bei konstanter Sterberate berechnet man

$$V(P_{0,\infty}) = \frac{\lambda x^2}{(\lambda + r)^2(\lambda + 2r)}.$$

3 Zeitdiskrete Populationsdynamik

Populationsdynamik ist eines der klassischen Anwendungsgebiete der Mathematik in der Biologie. Wir werden uns in diesem Abschnitt mit Modellen zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Anzahl von Individuen einer bestimmten Spezies von Lebewesen beschäftigen. Die Einschränkungen, die wir uns dabei auferlegen, bestehen erstens darin, dass wir nur eine Spezies beschreiben und nicht, wie es bei ökologischen Fragestellungen wichtig wäre, die Interaktion zwischen verschiedenen Spezies. Zum zweiten verwenden wir als Kenngröße nur die Anzahl von Individuen, ohne individuelle Eigenschaften zu berücksichtigen, wie das bei Modellen für *strukturierte Populationen* der Fall wäre. Als dritte Annahme in diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Spezies, bei denen es keine oder nur eine geringe zeitliche Überlappung zwischen den Generationen gibt. In diesem Fall ist eine zeitlich diskrete Beschreibung angebracht.

Die einfachste Modellannahme besteht darin, dass die Größe N_{k+1} der Population in der $(k+1)$ -ten Generation nur von der Größe der Population in der k -ten Generation abhängt, d.h. dass eine Rekursion der Form

$$N_{k+1} = f(N_k) \tag{7}$$

gilt. Das einfachste Modell ergibt sich bei Annahme einer konstanten Geburtenrate r : $f(N) = rN$. In diesem Fall haben wir die Rekursion schon im vorigen Abschnitt gelöst: $N_k = N_0 r^k$, d.h. je nach dem, ob r größer oder kleiner als 1 ist, wächst die Population entweder exponentiell, oder sie stirbt aus. Im Fall $r > 1$ kann das Modell keinesfalls für eine Beschreibung des Langzeitverhaltens geeignet sein, weil in einer beschränkten Umwelt keine Population unbeschränkt wachsen kann.

Die Fibonaccifolge

Als kleinen historischen Einschub beschreiben wir die Resultate einer der ersten Arbeiten zur Mathematischen Biologie. Im Jahr 1202 veröffentlichte *Leonardo von Pisa* (genannt *Fibonacci*) ein Buch über Arithmetik, in dem er über ein einfaches Modell zur Fortpflanzung von Kaninchen schreibt. Die Modellannahme besteht darin, dass Kaninchen einen Monat nach ihrer Geburt geschlechtsreif werden, dass jedes Paar (männlich + weiblich) einen weiteren Monat später ein Paar zur Welt bringt und das dann auch jeden weiteren Monat tut (Vorsicht: Falsche Erklärung im Buch von Murray). Solange keine Kaninchen sterben, führt diese Modellannahme auf die Rekursion

$$N_{k+1} = N_k + N_{k-1}$$

für die Anzahl N_k der Paare in der k -ten Generation. Im Unterschied zu (7) handelt es sich hier um eine *zweistufige Rekursion*, bei der die Populationgröße nicht nur von der vorhergehenden Generation, sondern auch von der Generation davor abhängt. Beginnt man mit einem Paar von neugeborenen Kaninchen, d.h. $N_0 = 1$, dann werden nach einem Monat noch keine zusätzlichen Kaninchen geboren, d.h. $N_1 = 1$. Ab dem zweiten Monat kann die Rekursion verwendet werden und produziert die sogenannte *Fibonaccifolge*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Im Folgenden werden wir eine explizite Formel für das allgemeine Glied herleiten. Wir beginnen mit der Beobachtung, dass die Fibonacci-Rekursion

$$u_{k+1} = u_k + u_{k-1}, \quad k \geq 1 \tag{8}$$

ein (unendliches) System homogener linearer Gleichungen ist. Die Menge aller Lösungen bildet daher einen Vektorraum. Da u_0 und u_1 beliebig vorgegeben werden dürfen und jede Lösung dadurch eindeutig bestimmt wird, muss dieser Vektorraum zweidimensional sein. Eine Basis $\{\{a_k\}, \{b_k\}\}$ kann durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= 0, & a_{k+1} &= a_k + a_{k-1}, & k &\geq 1, \\ b_0 &= 0, & b_1 &= 1, & b_{k+1} &= b_k + b_{k-1}, & k &\geq 1, \end{aligned}$$

bestimmt werden, was $a_k = N_{k-2}$ und $b_k = N_{k-1}$ für $k \geq 2$ ergibt. Jede Lösung der Rekursion hat dann die Darstellung

$$u_k = u_0 a_k + u_1 b_k, \quad k \geq 0.$$

Das ist aber nur beschränkt hilfreich, weil wir keine explizite Darstellung für a_k und b_k haben. Wir suchen daher eine explizit berechenbare Basis. Motiviert durch die allgemeine Lösung linearer einstufiger Rekursionen machen wir den Ansatz $u_k = \lambda^k$ und versuchen λ so zu bestimmen, dass die Rekursion gelöst wird. Das führt auf die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Wir waren also erfolgreich und haben die explizit gegebene Basis $\{\{\lambda_1^k\}, \{\lambda_2^k\}\}$ gefunden. Damit lässt sich jede Lösung der Rekursion in der Form

$$u_k = c\lambda_1^k + d\lambda_2^k$$

schreiben mit geeigneten Konstanten c und d . Insbesondere ergibt sich für die Fibonaccifolge

$$N_k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \lambda_1^k + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \lambda_2^k.$$

Für das Verhalten nach vielen Generationen ist es wichtig, dass $|\lambda_1| > 1$ und $|\lambda_2| < 1$ gilt. Für große k haben wir daher

$$N_k \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \lambda_1^k,$$

d.h. die Fibonaccifolge verhält sich näherungsweise wie die Lösungen der einstufigen Rekursion $u_{k+1} = \lambda_1 u_k$.

Die logistische Abbildung

Wir kehren zurück zu einstufigen Rekursionen als Populationsmodelle und zu der Überlegung, dass das Modell (7) mit der linearen Funktion $f(N) = rN$ ein unrealistisches unbeschränktes Wachstum prognostiziert. In einer beschränkten Umwelt scheint es vernünftig anzunehmen, dass die Geburtenrate von der Größe der Population abhängt und für größere Populationen kleiner wird. Im einfachsten Modell dieser Art ersetzt man die konstante Geburtenrate r durch $r(1 - N_k/N_{max})$, wodurch sich als rechte Seite von (7) die *logistische Abbildung* $f(N) = rN(1 - N/N_{max})$ ergibt:

$$N_{k+1} = rN_k \left(1 - \frac{N_k}{N_{max}}\right).$$

Man sieht sofort, dass der größte Wert, den die Anzahl der Individuen sinnvollerweise annehmen darf, N_{max} ist, weil sich ansonsten für die nächste Generation eine negative Populationsgröße ergäbe. Es ist daher auch sinnvoll zu fordern, dass die Funktion f das Intervall $[0, N_{max}]$ in sich selbst abbildet. Das führt auf die Einschränkung $r \leq 4$ für die Geburtenrate kleiner Populationen. Die Skalierung $u_k := N_k/N_{max}$ führt auf die vereinfachte Rekursion

$$u_{k+1} = ru_k(1 - u_k), \quad (9)$$

mit der wir uns eine Weile beschäftigen werden. Zum Unterschied von den bisher betrachteten Rekursionen ist (9) *nichtlinear*. Man kann daher nicht erwarten, explizite Formeln für die allgemeine Lösung zu finden. Wir werden stattdessen versuchen *qualitative* Aussagen über das Langzeitverhalten von Lösungen zu machen. Dabei machen wir immer die Grundannahmen

$$0 < r \leq 4, \quad 0 \leq u_0 \leq 1.$$

Diese garantieren, dass $0 \leq u_k \leq 1$ für alle $k \geq 0$ gilt.

Es stellt sich heraus, dass das Langzeitverhalten typischer Lösungen stark vom Parameter r abhängt. Leicht zu verstehen ist die Situation für $r < 1$. Da offensichtlich $u_{k+1} \leq ru_k$ gilt, kann man mit vollständiger Induktion leicht zeigen, dass $u_k \leq r^k u_0$ gilt, woraus folgt, dass alle Lösungen gegen 0 konvergieren. Die Population stirbt also aus.

An dieser Stelle ist es angebracht, Begriffe aus der Theorie der *dynamischen Systeme* einzuführen. Die Rekursion (9) mit der Einschränkung $0 < r \leq 4$ ist ein Beispiel für ein dynamisches System auf dem *Zustandsraum* $[0, 1]$. Das bedeutet, dass durch die Rekursion für jeden Anfangszustand u_0 aus dem Zustandsraum eine im Zustandsraum verlaufende zeitliche Dynamik bestimmt wird. Mit $u_0 = 0$ liefert die Rekursion die konstante Lösung $u_k = 0$, $k \geq 0$. Man sagt daher, 0 ist ein *stationärer Punkt*. Stationäre Punkte sind also Lösungen \bar{u} der Gleichung $\bar{u} = r\bar{u}(1 - \bar{u})$.

Eine wichtige Frage im Zusammenhang mit stationären Punkten ist die nach ihrer *Stabilität*. Dabei geht es darum, wie das dynamische System auf kleine Störungen reagiert, d.h. wie die Dynamik für einen Anfangszustand verläuft, der nahe am stationären Punkt liegt. Man sagt, der stationäre Punkt ist stabil, wenn eine in der Nähe des stationären Punktes beginnende Dynamik in der Nähe des stationären Punktes bleibt. Genauer (aber ziemlich umständlich):

Definition 1 *Der stationäre Punkt \bar{u} heißt stabil, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle u_0 aus dem Zustandsraum mit $|u_0 - \bar{u}| < \delta$*

gilt, dass $|u_k - \bar{u}| < \varepsilon$, $k \geq 0$. Ein stationärer Punkt, der nicht stabil ist, heißt **instabil**.

In einer strengeren Version wird verlangt, dass jede in der Nähe des stationären Punktes beginnende Dynamik zum stationären Punkt konvergiert:

Definition 2 Der stationäre Punkt \bar{u} heißt **asymptotisch stabil**, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle u_0 aus dem Zustandsraum mit $|u_0 - \bar{u}| < \delta$ gilt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \bar{u}$.

Unsere obigen Überlegungen zeigen, dass der stationäre Punkt $\bar{u} = 0$ für $r < 1$ asymptotisch stabil ist.

Wenn wir eine allgemeine einstufige Rekursion

$$u_{k+1} = f(u_k) \tag{10}$$

mit einem stationären Punkt $\bar{u} = f(\bar{u})$ betrachten und die Stabilität von \bar{u} untersuchen wollen, dann bietet sich an, die Funktion f in der Nähe des stationären Punktes linear zu approximieren. Mit $v_k = u_k - \bar{u}$ führt das auf die näherungsweise Rekursion

$$v_{k+1} = f'(\bar{u})v_k.$$

Das nennen wir die *Linearisierung* von (10) an $u = \bar{u}$. Die explizite Lösung $v_k = f'(\bar{u})^k v_0$ der linearisierten Rekursion macht das folgende Resultat plausibel:

Satz 1 Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ zweimal stetig differenzierbar. Der stationäre Punkt \bar{u} der Rekursion (10) ist asymptotisch stabil, wenn $|f'(\bar{u})| < 1$ gilt. Im Fall $|f'(\bar{u})| > 1$ ist er instabil.

Beweis: Mit der Definition $v_k = u_k - \bar{u}$ folgt aus der Taylorsche Formel

$$v_{k+1} = f(u_k) - f(\bar{u}) = f'(\bar{u})v_k + f''(\tilde{u}_k)v_k^2/2, \tag{11}$$

mit $\tilde{u}_k \in [a, b]$. Wegen der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gilt $|f''(\tilde{u}_k)| \leq M$, und daher

$$|v_{k+1}| \leq |v_k| (|f'(\bar{u})| + |v_k|M/2).$$

Sei nun $|f'(\bar{u})| < 1$. Dann wählen wir $\delta := (1 - |f'(\bar{u})|)/M$ und $r := (1 + |f'(\bar{u})|)/2 < 1$. Mit vollständiger Induktion ist jetzt leicht zu zeigen, dass aus $|v_0| \leq \delta$ die Abschätzung $|v_k| \leq r^k \delta \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ folgt, womit die erste Aussage des Satzes bewiesen ist.

Im Fall $|f'(\bar{u})| > 1$ beginnen wir wieder bei (11) und folgern

$$|v_{k+1}| \geq |v_k|(|f'(\bar{u})| - |v_k|M/2).$$

Für $|v_k| \leq \varepsilon := (|f'(\bar{u})| - 1)/M$ und $r := (1 + |f'(\bar{u})|)/2 > 1$ gilt dann

$$|v_{k+1}| \geq r|v_k|,$$

woraus folgt, dass auch bei beliebig kleinem $|v_0|$ nach endlich vielen Schritten $|v_k| > \varepsilon$ erreicht wird, was gleichbedeutend mit der Instabilität von \bar{u} ist.

■

Bemerkung 1 *Im kritischen Fall $|f'(\bar{u})| = 1$ ist jedes Stabilitätsverhalten möglich, wie die Beispiele $u_{k+1} = u_k(1 \pm u_k)$ und $u_{k+1} = u_k$ mit $[a, b] = [0, 1]$ und $\bar{u} = 0$ zeigen.*

Wenden wir uns wieder der Rekursion (9) zu. Satz 1 liefert die Aussage, dass bei wachsenden Werten des Parameters r an der Stelle $r = 1$ der stationäre Punkt $\bar{u}_1 = 0$ seine Stabilität verliert.

Definition 3 *Betrachtet man ein dynamisches System, das von Parametern abhängt, dann ist ein **Verzweigungspunkt** ein Punkt im Parameterraum, in dessen beliebig kleiner Umgebung das dynamische System qualitativ unterschiedliches Langzeitverhalten besitzt.*

Offensichtlich ist $r = 1$ ein Verzweigungspunkt für (9). Zum besseren Verständnis trägt die Betrachtung des zweiten stationären Punktes $\bar{u}_2 = 1 - 1/r$ bei, der nur für $r \geq 1$ im Zustandsraum liegt. Am Verzweigungspunkt fallen die beiden stationären Punkte zusammen. Die Identität $f'(\bar{u}_2) = 2 - r$ zeigt, dass \bar{u}_2 für $1 < r < 3$ asymptotisch stabil ist. Am Verzweigungspunkt $r = 1$ findet ein *Stabilitätsaustausch* zwischen den beiden stationären Punkten $\bar{u}_1 = 0$ und $\bar{u}_2 = 1 - 1/r$ statt.

Am zweiten Verzweigungspunkt $r = 3$ verliert auch der stationäre Punkt \bar{u}_2 seine Stabilität. Das Verhalten des dynamischen Systems für $r > 3$ kann verstanden werden, indem man Folgen $z_k := u_{2k}$, $k \geq 0$, analysiert. Diese lösen die Rekursion

$$z_{k+1} = ru_{2k-1}(1 - u_{2k-1}) = r^2 z_k(1 - z_k)(1 - rz_k(1 - z_k)). \quad (12)$$

Diese besitzt natürlich auch die stationären Punkte $\bar{u}_1 = 0$ und $\bar{u}_2 = 1 - 1/r$. Darüber hinaus existieren für diese Rekursion für $r > 3$ die zwei weiteren stationären Punkte

$$\bar{z}_{3,4} = \frac{1}{2r} \left(1 + r \pm \sqrt{(r+1)(r-3)} \right).$$

Man überprüft leicht dass $\bar{z}_3 = f(\bar{z}_4)$ und $\bar{z}_4 = f(\bar{z}_3)$ gilt, d.h. die beiden Punkte \bar{z}_3 und \bar{z}_4 bilden einen *periodischen Orbit mit Periode 2* der ursprünglichen Rekursion (9). Man beachte, dass am Verzweigungspunkt $r = 3$ der periodische Orbit aus dem stationären Punkt \bar{u}_2 entsteht: $\bar{u}_2 = \bar{z}_3 = \bar{z}_4 = 2/3$ für $r = 3$.

Die im Folgenden beschriebenen weiteren Resultate sind nicht mehr so einfach nachzurechnen. Zunächst kann man zeigen, dass \bar{z}_3 und \bar{z}_4 für $r > 3$ als stationäre Punkte von (12) asymptotisch stabil sind, so lange r nahe genug bei 3 bleibt. Das impliziert *asymptotische Stabilität des periodischen Orbits* der Rekursion (9), wobei die Bedeutung dieser Aussage auch ohne exakte Definition klar sein sollte. Diese Stabilität geht bei einer weiteren Verzweigung an der Stelle $r = r_4$ verloren. Die Verzweigung ist ähnlich der an der Stelle $r = 3$: Aus den beiden stationären Punkten \bar{z}_3 und \bar{z}_4 der zweimal iterierten Abbildung $f \circ f$ entstehen jeweils zwei neue stabile stationäre Punkte der viermal iterierten Abbildung $f \circ f \circ f \circ f$, die zusammen einen stabilen periodischen Orbit der Periode 4 von (9) bilden. Das, was bei der Verzweigung passiert, nennt man *Periodenverdopplung*. Für größer werdende Werte von r geht es weiter mit einer Folge von Periodenverdopplungen an den Verzweigungspunkten $r_4 < r_8 < r_{16} < \dots$. Diese Folge konvergiert gegen den Wert $r_c < 4$. Betrachtet man eine typische von (9) mit $r > r_c$ erzeugte Folge, dann scheint ihr Langzeitverhalten keinerlei Gesetzmäßigkeit zu folgen. Diese Tatsache war eine sensationelle Entdeckung (der 1970er-Jahre) und wurde als *deterministisches Chaos* bezeichnet. Als explizites Beispiel für eine Folge mit chaotischem Verhalten sei

$$u_k = \sin^2(2^k)$$

angeführt, eine Lösung von (9) mit $r = 4$.

4 Optimalsteuerung im Fischfang

In diesem Abschnitt geht es um Ertragsmaximierung im Fischfang, wobei ein unendlicher Zeithorizont angenommen wird, was zu nachhaltigen Fangstrategien führen wird. Ausgangspunkt muss ein Modell für die Dynamik der Fischpopulation sein. Anders als im vorigen Abschnitt werden wir unseren Überlegungen ein zeitkontinuierliches Modell zugrunde legen.

Das Populationsmodell und die maximale nachhaltige Fangrate

Wir nehmen an, dass die Dynamik der Größe $N(t)$ der Fischpopulation ohne Fischfang durch die Differentialgleichung

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{N_c} \right) \quad (13)$$

beschrieben werden kann, wobei r die Differenz zwischen der Geburten- und der Sterberate kleiner Populationen ist und N_c eine kritische Populationsgröße, bei deren Überschreitung die Sterberate größer als die Geburtenrate wird. Mit einer Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ kann die Lösung

$$N(t) = \frac{N_0 N_c}{N_0 + (N_c - N_0)e^{-rt}}$$

berechnet werden, die offensichtlich für jeden positiven Anfangswert gegen den (asymptotisch stabilen) stationären Punkt N_c konvergiert. Für dieses Resultat ist die explizite Lösung gar nicht notwendig. Ein Studium des Vorzeichens der rechten Seite von (13) hätte genügt. Die Dynamik des kontinuierlichen logistischen Modells ist also wesentlich einfacher als im diskreten Fall.

Ein Modell, das den Effekt des Fischfanges mit beschreibt, ergibt sich mit der Fangrate $h(t)$, der Anzahl der zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit gefangenen Fische:

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{N_c} \right) - h(t). \quad (14)$$

Als *nachhaltige Fangrate* bezeichnen wir eine Konstante h , die nicht zum Aussterben der Fische führt. Das gilt offensichtlich für $h \leq h_{max} = rN_c/4$ (maximale nachhaltige Fangrate).

Es stellt sich die Frage, wie man die maximale Fangrate realisiert. Am naheliegendsten ist es natürlich, $h = h_{max}$ festzulegen. Man sieht aber leicht, dass das einerseits unvernünftig und andererseits unrealistisch wäre. Unvernünftig, weil dann die rechte Seite von (14) außer am stationären Punkt $N = N_c/2$ immer negativ wäre, d.h. der stationäre Punkt wäre instabil, und die Population würde in der Praxis aussterben. Unrealistisch, weil die Realisierung von $h = h_{max}$ bei immer kleinerer Populationsgröße immer größeren Aufwand bedeuten würde, der aber in der Praxis beschränkt ist.

Ein sinnvollerer Zugang scheint es zu sein, einen bestimmten Aufwand (z.B. Anzahl von Fangschiffen und Dauer von Fangperioden) festzulegen, der zu einer Fangrate führt, die proportional zur Populationsgröße ist. Mit der Wahl $h(t) = rx(t)/2$ wird der stationäre Punkt $N = N_c/2$ von (14) global asymptotisch stabil, d.h. es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_{max}$ für jede positive Anfangspopulationsgröße.

Ertragsoptimierung

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass der Aufwand beim Fischfang zeitabhängig innerhalb bestimmter Grenzen frei bestimmt werden kann und dass die Fangrate proportional zu diesem Aufwand und zur Größe der Population ist. Mit dem Aufwand $u(t)$ ergibt sich das Anfangswertproblem

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{N_c}\right) - u(t)N(t), \quad N(0) = N_0. \quad (15)$$

Außerdem nehmen wir

$$0 \leq u(t) \leq u_{max}, \quad \text{für } t \geq 0, \quad (16)$$

an, d.h. dass es einen maximalen möglichen Aufwand gibt. Die Aufgabenstellung ist nun, den Aufwand so zu bestimmen, dass der Ertrag maximal wird. Da wir mit dem Fangaufwand die Fischpopulation steuern, heißt eine derartige Problemstellung ein *Optimalsteuerungsproblem*. Natürlich müssen wir noch festlegen, was wir mit Ertrag meinen. Wir verwenden die Summe der derzeitigen Werte aller zukünftigen Erträge, wobei wir einen festen Zinssatz δ verwenden. Berücksichtigt man auch die Kosten, die durch den Fangaufwand verursacht werden, so ist das Modell

$$J[u] = \int_0^{\infty} [u(t)N(t) - \alpha u(t)]e^{-\delta t} dt$$

(mit einer positiven Konstanten α) für den Gesamtertrag plausibel. Die Aufgabe ist also, eine Funktion $u(t)$ mit den Einschränkungen (16) so zu bestimmen, dass J maximal wird, wobei für gegebenes $u(t)$ die Funktion $N(t)$ die eindeutige Lösung von (15) ist. In dieser Extremwertaufgabe ist die Unbekannte eine Funktion. Man kann $N(t)$ als implizit durch $u(t)$ bestimmt ansehen (wir werden deswegen auch die Notation $N[u](t)$ verwenden), oder mit zwei unbekannt Funktionen $u(t)$ und $N(t)$ arbeiten, wobei dann (15) die Rolle einer Nebenbedingung spielt.

Nach dem, was wir über Extremwertaufgaben wissen, sollten wir die 'Ableitung von J nach $u(t)$ ' gleich Null setzen. Was bedeutet es aber, nach

einer Funktion zu differenzieren? Wir behelfen uns mit dem Trick, *Richtungsableitungen* zu berechnen. Eine Richtung im Raum der Steuerungsfunktionen ist durch eine Funktion $v(t)$ gegeben. Wenn $u(t)$ die gesuchte Optimalsteuerung ist, dann muss

$$j(\varepsilon) := J[u + \varepsilon v] = \int_0^\infty [(u(t) + \varepsilon v(t))N[u + \varepsilon v](t) - \alpha(u(t) + \varepsilon v(t))]e^{-\delta t} dt$$

ein Maximum an der Stelle $\varepsilon = 0$ besitzen. Die Idee ist nun, $j'(0) = 0$ für jede Richtung $v(t)$ zu fordern (d.h. den 'Gradienten' von J gleich Null zu setzen). Um die Rechnung durchführen, brauchen wir

$$M(t) = \frac{d}{d\varepsilon} N[u + \varepsilon v](t) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Durch Differenzieren nach ε im Problem

$$N[u + \varepsilon v]' = rN[u + \varepsilon v] \left(1 - \frac{N[u + \varepsilon v]}{N_c}\right) - (u + \varepsilon v)N[u + \varepsilon v], \quad N[u + \varepsilon v](0) = N_0$$

erhalten wir

$$M' = r \left(1 - \frac{2N[u]}{N_c}\right) M - uM - vN[u], \quad M(0) = 0. \quad (17)$$

Offensichtlich gilt

$$j'(0) = \int_0^\infty [u(t)M(t) + v(t)N[u](t) - \alpha v(t)]e^{-\delta t} dt$$

Wir verwenden (17), um v aus diesem Ausdruck zu eliminieren:

$$j'(0) = \int_0^\infty \left[\frac{\alpha u M}{N} + \frac{r}{N} (N - \alpha) \left(1 - \frac{2N[u]}{N_c}\right) M - \frac{N - \alpha}{N} M' \right] e^{-\delta t} dt$$

Für den letzten Summanden in der großen eckigen Klammer integrieren wir partiell:

$$\int_0^\infty \frac{N - \alpha}{N} M' e^{-\delta t} dt = \int_0^\infty \left[\delta \frac{N - \alpha}{N} - \frac{\alpha N'}{N^2} \right] M e^{-\delta t} dt.$$

Der Randterm an $t = 0$ verschwindet wegen der Anfangsbedingung in (17). Das Weglassen des Randtermes an $t = \infty$ kann auch plausibel gemacht werden. Die (etwas längliche) Argumentation lassen wir aus. Schließlich ergibt sich

$$j'(0) = \int_0^\infty \left[r + \frac{\alpha r}{N_c} - \frac{2rN}{N_c} - \delta \frac{N - \alpha}{N} \right] M e^{-\delta t} dt.$$

Die Tatsache, dass $v(t)$ beliebig gewählt werden kann zusammen mit (17) bedeutet, dass im Wesentlichen stattdessen auch $M(t)$ beliebig gewählt werden kann. Unter der Annahme, dass M und N stetig sind, zeigt man leicht, dass $j'(0) = 0$ für alle $M(t)$ nur dann stimmen kann, wenn die eckige Klammer identisch Null ist. Das führt auf eine quadratische Gleichung mit der einzigen nichtnegativen Lösung

$$N[u](t) = N_{opt} := \frac{1}{4} \left(N_c + \alpha - \frac{\delta N_c}{r} + \sqrt{\left(N_c + \alpha - \frac{\delta N_c}{r} \right)^2 + \frac{8\alpha\delta N_c}{r}} \right).$$

Die optimale Größe der Fischpopulation ist also stationär. Der optimale Aufwand ergibt sich damit aus (15):

$$u = u_{opt} := r \left(1 - \frac{N_{opt}}{N_c} \right).$$

Diese formalen Resultate lassen noch einige Fragen offen. Zunächst ist zu überprüfen, ob der berechnete optimale Aufwand im erlaubten Bereich liegt. Damit u_{opt} nichtnegativ ist, ist $N_{opt} \leq N_c$ notwendig, was genau dann gilt, wenn $\alpha \leq N_c$. Die Interpretation für dieses Resultat ist die folgende: Wenn die Kosten, die der Fangaufwand verursacht, zu groß sind (d.h. $\alpha > N_c$), dann zahlt es sich überhaupt nicht aus zu fischen, d.h. die optimale Lösung ist das *Randextremum* $u = 0$. Ähnlich die umgekehrte Situation: Ist $u_{opt} > u_{max}$, dann wird der beste Ertrag erzielt, wenn man mit maximalem Aufwand $u = u_{max}$ fischt.

Eine zweites offenes Problem ist, dass die berechnete optimale Populationsgröße im Allgemeinen nicht die Anfangsbedingung erfüllt, d.h. $P_{opt} \neq P_0$. Die (plausible aber hier nicht rigoros gerechtfertigte) Lösung besteht darin, dass man wieder die Extremwerte des Aufwandes verwendet, um die optimale Populationsgröße möglichst schnell zu erreichen. Ist also $P_0 > P_{opt}$, dann ist die optimale Fangrate

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{für } t < t_0, \\ u_{opt} & \text{für } t > t_0, \end{cases}$$

wobei t_0 so gewählt wird, dass $N(t_0) = N_{opt}$ und damit $N(t) = N_{opt}$ für $t \geq t_0$ gilt. Ist andererseits $P_0 < P_{opt}$, dann ist die optimale Fangrate

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_0, \\ u_{opt} & \text{für } t > t_0, \end{cases}$$

wobei t_0 wie oben gewählt wird. Dieses Szenario zeigt, dass für überfischte Gewässer ein Fangstopp schon aus rein wirtschaftlichen Überlegungen angebracht sein kann.

Noch eine Frage: Warum ist N_{opt} nicht gleich $N_c/2$ (die Populationsgröße, die die maximale nachhaltige Fangrate ergibt)? Die Formel für N_{opt} zeigt, dass zwei Effekte zu diesem zunächst überraschenden Resultat beitragen: Die Abzinsung zukünftiger Gewinne mit der Zinsrate δ und die Kosten, die der Fangaufwand verursacht (beschrieben durch den Parameter α). Für $\delta = \alpha = 0$ ergibt sich $N_{opt} = N_c/2$. Um die beiden Effekte zu trennen, beachten wir zunächst

$$N_{opt} = \frac{N_c}{2} \left(1 - \frac{\delta}{r}\right), \quad \text{für } \alpha = 0.$$

Die Abzinsung machte die optimale Populationsgröße also kleiner. Das führt bei $P_0 < P_{opt}$ dazu, dass der Fangstopp in der optimalen Strategie kürzer wird. Es zahlt sich also aus, etwas früher Gewinne zu machen, obwohl die späteren Gewinne dadurch etwas kleiner werden. Bei $P_0 > P_{opt}$ bleibt man länger beim maximalen Aufwand und macht dadurch etwas länger hohe Gewinne, wieder auf Kosten der späteren Gewinne, was aber aufgrund der Abzinsung nicht so stark ins Gewicht fällt.

Der Effekt der Kosten wird in

$$N_{opt} = \frac{N_c + \alpha}{2}, \quad \text{für } \delta = 0,$$

deutlich. Die erhöhte optimale Populationsgröße wird durch kleineren Aufwand erreicht, was Kosten spart.

Eine letzte Frage: Warum werden trotz unserer Resultate die Meere leergefischt? Mögliche Antwort: Weil die dafür Verantwortlichen einen beschränkten Planungshorizont haben. Betrachten wir ein vereinfachtes Beispiel mit endlichem Planungshorizont, wo der Gesamtertrag durch

$$J = \int_0^T u(t)N(t) \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt$$

gegeben ist, d.h. wir vernachlässigen der Einfachheit halber die Kosten und verwenden eine Abzinsung, die Erträgen nach dem Zeitpunkt T keinen Wert zuschreibt. Eine Rechnung analog zu oben ergibt

$$N_{opt} = N_c \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r(T-t)}\right).$$

Die Fische sterben also aus, bevor noch der Zeitpunkt T erreicht wird. Das würde natürlich einen Aufwand erfordern, der unbeschränkt wächst, wenn

es ans endgültige Ausrotten der Fische geht. Das Resultat ist daher nicht ganz realistisch, macht aber die obige Antwort plausibel.

5 Dimensionsanalyse

Im Jahr 1945 wurde zu Testzwecken in Los Alamos die Atombombe *Trinity* gezündet. Alle Daten wurden geheim gehalten. Zwei Jahre später wurde ein Film der Explosion veröffentlicht, alle anderen Daten blieben geheim. Dem englischen Physiker Sir G.I. Taylor gelang es, mit Hilfe dieses Filmes und den Prinzipien der Dimensionsanalyse eine erstaunlich genaue Schätzung der bei der Explosion freigesetzten Energie zu berechnen. In diesem Abschnitt werden die Prinzipien der Dimensionsanalyse präsentiert und es werden die Taylorschen Berechnungen nachvollzogen.

Ein klassisches Beispiel: Das reibungsfreie Pendel

Gibt man sich große Mühe, bei der Konstruktion eines Pendels Reibungseffekte möglichst zu eliminieren, dann beobachtet man annähernd periodische Schwingungen. Wir stellen uns die Aufgabe, die Dauer T der Periode einer solchen Schwingung zu berechnen, wenn der Anfangszustand des Pendels dadurch festgelegt ist, dass das Pendel in waagrechter Lage ist und die Geschwindigkeit Null hat. Das Pendel wird beschleunigt durch die Gravitationswechselwirkung mit der Erde, wobei wir eine konstante Gravitationsbeschleunigung g annehmen. Diese Annahme ist gerechtfertigt, wenn die Länge L des Pendels klein ist im Vergleich zu seinem Abstand vom Erdmittelpunkt (siehe nächstes Kapitel). Weiters nehmen wir an, dass die Masse der Pendelstange klein ist im Vergleich zu der am Ende des Pendels angebrachten Masse M , sodass die Masse der Stange vernachlässigt werden kann.

Es ist plausibel, dass die gesuchte Periode T nur von den Größen g , L , und M abhängt:

$$T = f(g, L, M)$$

Was lässt sich daraus schließen? Zunächst werden wir uns über die Dimension (bzw. Einheiten) der auftretenden Größen klar. Verwenden wir das CGS-System (Zentimeter-Gramm-Sekunden), dann gilt

$$[T] = \text{s}, \quad [g] = \text{cm s}^{-2}, \quad [L] = \text{cm}, \quad [M] = \text{g},$$

wobei $[X]$ die *Einheit von X* bezeichnet. Als nächsten Schritt beobachten wir, dass die Größe $T_s := T\sqrt{g/L}$ dimensionslos ist, d.h. $[T_s] = 1$. Daraus

folgt, dass auch

$$f_s(g, L, M) := \sqrt{\frac{g}{L}} f(g, L, M)$$

dimensionslos ist. Das bedeutet aber, dass sich der Wert von f_s nicht ändern darf, wenn wir uns statt einer oder mehrerer der drei Grundeinheiten cm, g bzw. s für andere Einheiten für Länge, Masse bzw. Zeit entscheiden. Ändern wir beispielsweise die Einheit für die Masse, dann verändert sich nur das dritte Argument von f_s . Das bedeutet, dass f_s unabhängig von m sein muss. Ändern der Zeiteinheit ergibt analog, dass f_s unabhängig von g ist. Schließlich variieren wir noch die Längeneinheit, um Unabhängigkeit von L zu zeigen. Damit ist klar, dass es eine dimensionslose (Natur-)Konstante T_s geben muss, sodass

$$T = T_s \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (18)$$

gilt. Bis auf die Bestimmung der Konstanten T_s haben wir das Problem gelöst. Zur vollständigen Lösung genügt z.B. ein Experiment mit einem einzigen Pendel und eine Messung der Periodendauer.

Um unser Vertrauen in das Resultat zu stärken, betrachten wir ein mathematisches Modell für das Pendel. Bezeichnen wir den Winkel zwischen dem Pendel und dem Lot zum Zeitpunkt t mit $\varphi(t)$, dann ist die Beschleunigung des Pendels in tangentialer Richtung durch $L\varphi''(t)$ und die tangentiale Komponente der Gravitationskraft durch $-Mg \sin \varphi(t)$ gegeben. Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz folgt also die Differentialgleichung

$$ML\varphi''(t) = -Mg \sin \varphi(t).$$

Die obige Beschreibung des Anfangszustandes ergibt die Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi'(0) = 0.$$

Mit der Transformation $t_s = t\sqrt{L/g}$, $\varphi_s(t_s) = \varphi(t_s\sqrt{g/L})$ ergibt sich das dimensionslose, sogar parameterfreie, Problem

$$\varphi_s''(t_s) = -\sin \varphi_s(t_s), \quad \varphi_s(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_s'(0) = 0,$$

womit das Resultat (18) bestätigt ist. Nach einiger Rechnung ergibt sich für die dimensionslose Dauer der Periode die Formel

$$T_s = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}}.$$

Grundlagen der Dimensionsanalyse

Unser Ausgangspunkt ist eine durch eine Gleichung

$$F(W_1, \dots, W_n) = 0 \quad (19)$$

beschriebene Beziehung zwischen messbaren Größen W_1, \dots, W_n . Wir konzentrieren uns auf Einheiten für diese Größen. Das SI-System (das internationale Einheitensystem) verwendet 7 Grundeinheiten und zwar Meter ($m = L_1$) für Länge, Kilogramm ($kg = L_2$) für Masse, Sekunde ($s = L_3$) für Zeit, Ampere ($A = L_4$) für Stromstärke, Kelvin ($K = L_5$) für Temperatur, Mol ($mol = L_6$) für Stoffmenge und Candela ($cd = L_7$) für Lichtstärke.

Die wichtigste Voraussetzung für das Weitere, die man als Axiom der Dimensionsanalyse sehen kann, ist die Annahme, dass die Dimension jeder messbaren Größe in der Form

$$[W_i] = L_1^{\alpha_{i1}} \dots L_7^{\alpha_{i7}} = \prod_{j=1}^7 L_j^{\alpha_{ij}}$$

geschrieben werden kann, mit reellen (üblicherweise rationalen) Exponenten α_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq 7$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $[F(W_1, \dots, W_n)] = 1$ annehmen, weil die Gleichung (19) nur mit einer entsprechenden Größe multipliziert werden müßte, um F dimensionslos zu machen. Fassen wir die Exponenten in einer Matrix $A := (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 7}$ zusammen, dann gilt natürlich

$$m := \text{Rang}(A) \leq \min\{n, 7\}.$$

Jede Zeile von A entspricht einer Variablen. Wir wählen nun m linear unabhängige Zeilen mit den Nummern $i(k)$, $1 \leq k \leq m$, aus und nennen $P_k = W_{i(k)}$ *primäre Variablen*. Die eventuell verbleibenden restlichen Variablen $S_l = W_{i(l)}$, $m+1 \leq l \leq n$, heißen *sekundäre Variablen*. Die Zeilen der Matrix A mit den Nummern $i(m+1)$ bis $i(n)$ können als Linearkombinationen der Zeilen mit den Nummern $i(1)$ bis $i(m)$ dargestellt werden:

$$\alpha_{i(l)j} = \sum_{k=1}^m \beta_{lk} \alpha_{i(k)j}, \quad m+1 \leq l \leq n, \quad 1 \leq j \leq 7.$$

Als Konsequenz ergibt sich für die Einheiten

$$[S_l] = \left[\prod_{k=1}^m P_k^{\beta_{lk}} \right], \quad m+1 \leq l \leq n,$$

d.h. die SI-Grundeinheiten L_1, \dots, L_7 können durch die primären Variablen P_1, \dots, P_m ersetzt werden. Von den letzteren kann es nicht mehr als 7 und auch nicht mehr als die Gesamtzahl n der Variablen geben. Es wird sich als vorteilhaft erweisen, statt Verwendung der SI-Einheiten *intrinsische Referenzgrößen* als Einheiten zu verwenden, das sind aus den Variablen des Problems berechenbare Größen mit der richtigen SI-Dimension. Die obige Gleichung zeigt, dass es für jede sekundäre Variable eine aus den primären Variablen berechnete intrinsische Referenzgröße gibt. Die Verwendung der intrinsischen Referenzgrößen als Einheiten führt auf die Definition der dimensionslosen (skalierten) Versionen (bzw. Maßzahlen) der sekundären Variablen

$$S_{l,s} := \frac{S}{\bar{S}_l}, \quad \bar{S}_l = \prod_{k=1}^m P_k^{\beta_{lk}}.$$

Schließlich kann die Gleichung (19) umgeschrieben werden in der Form

$$\begin{aligned} &F_s(P_1, \dots, P_m, S_{m+1,s}, \dots, S_{n,s}) \\ &:= F(P_1, \dots, P_m, S_{m+1,s} \bar{S}_{m+1}, \dots, S_{n,s} \bar{S}_n) = 0. \end{aligned}$$

Verändern wir nun die SI-Einheiten (z.B. durch Ersetzen von Meter durch Zentimeter), dann verändern sich die Werte von P_1, \dots, P_m , aber nicht die Werte von $S_{m+1,s}, \dots, S_{n,s}$. Insbesondere können für jedes $k = 1, \dots, m$ die SI-Einheiten so verändert werden, dass sich P_k verändert, aber alle anderen $P_{k'}$ mit $k' \neq k$ unverändert bleiben. Da der Wert von $F_s = 0$ sich dabei nicht verändern darf, muss F_s von P_1, \dots, P_m unabhängig sein, d.h.

$$F_s = F_s(S_{m+1,s}, \dots, S_{n,s}) = 0.$$

Die ursprüngliche Gleichung wurde durch eine Beziehung mit weniger Variablen ersetzt. Dieses Resultat wird als Buckingham II-Theorem bezeichnet. Es wurde in den Jahren 1914/15 vom Physiker Edgar Buckingham formuliert. Der Name erklärt sich dadurch, dass die dimensionslosen Größen von Buckingham mit Π bezeichnet wurden.

Kehren wir zurück zum Pendel. Ordnen wir die dort auftretenden Variablen in der Reihenfolge T, g, L, M , dann ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $m = \text{Rang}(A) = 3$. Eine zulässige Wahl der primären Variablen ist $P_1 = g$, $P_2 = L$, $P_3 = M$. Die erste Zeile entspricht der einzigen sekundären Variablen T . Diese Zeile kann als Linearkombination der zweiten und der dritten Zeile geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die irrelevanten letzten 4 Koordinaten jeweils weggelassen wurden. Daraus folgt

$$[T] = [P_1^{-1/2} P_2^{1/2}] = \left[\sqrt{\frac{L}{g}} \right],$$

d.h. $\sqrt{L/g}$ ist eine intrinsische Referenzzeit und die Beziehung zwischen T, g, L, M hängt nur von der dimensionslosen Größe $T_s = T\sqrt{g/L}$ ab, wie schon oben gesagt.

Die von einer Atombombe freigesetzte Energie

Aus dem zu Anfang erwähnten Film von der Explosion der Atombombe konnte man den Radius r der Stoßwelle zu verschiedenen Zeitpunkten t ablesen. Sir Taylor nahm an, dass die Ausbreitung der Stoßwelle bestimmt wird durch die freigesetzte Energie E sowie durch die Dichte ϱ und den Druck p der Luft. Wie schon im Pendelbeispiel benötigt man für die Einheiten all dieser Größen nur die ersten drei SI-Grundeinheiten m, kg und s:

$$[r] = m, \quad [t] = s, \quad [E] = kg m^2 s^{-2}, \quad [\varrho] = kg m^{-3}, \quad [p] = kg m^{-1} s^{-2},$$

und wir lassen deswegen die trivialen letzten 4 Spalten der Matrix A weg:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich entsteht durch Streichung der ersten und der letzten Zeile eine reguläre Matrix. Daher dürfen wir t , E und ϱ als primäre Variable verwenden. Die erste Zeile können wir als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und die letzte als

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{6}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

aus den mittleren drei darstellen. Damit sind eine intrinsische Referenzlänge und ein intrinsischer Referenzdruck gegeben durch

$$\left(\frac{t^2 E}{\varrho}\right)^{1/5} \quad \text{und} \quad \left(\frac{E^2 \varrho^3}{t^6}\right)^{1/5}.$$

Der dimensionslose Radius kann nur vom dimensionslosen Druck abhängen:

$$r = \left(\frac{t^2 E}{\varrho}\right)^{1/5} F\left(p \left(\frac{t^6}{E^2 \varrho^3}\right)^{1/5}\right),$$

mit einer unbekanntem Funktion F . Soweit die Resultate der Dimensionsanalyse.

Taylor's weitere Vorgangsweise bestand darin, das Argument von F durch Null zu approximieren. Diese Approximation kann im Nachhinein gerechtfertigt werden, sobald ein Schätzwert für E berechnet wurde. Aus Experimenten mit kleinen Sprengsätzen schloss Taylor, dass $F(0) = 1$ eine gute Approximation ist. Daraus ergibt sich die approximative Gleichung

$$E = \frac{\varrho r^5}{t^2}.$$

Da die Dichte der Atmosphäre in Bodennähe nur schwach variiert, hatte Taylor eine gute Schätzung für ϱ zur Verfügung. Weiters lieferte der Film eine Reihe von (r, t) -Wertepaaren. Nach einer Mittelung der resultierenden Schätzwerte für die Energie, ermittelte Taylor $E \approx 19.2$ Kilotonnen. Später wurde bekanntgegeben, dass der wahre Wert $E = 21$ Kilotonnen betragen hatte.

6 Störungsmethoden

Skalierung und formales Grenzproblem

Wir betrachten die Bewegung eines Körpers, der von der Erdoberfläche senkrecht in die Höhe geworfen wird und interessieren uns für den Zeitpunkt T^* , an dem er wieder zur Erdoberfläche zurückkehrt. Der Körper

bewegt sich nur auf einem vom Erdmittelpunkt ausgehenden Strahl. Den Abstand von der Erdoberfläche zum Zeitpunkt t^* bezeichnen wir mit $x^*(t^*)$. Dann ist x^* Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} = -\frac{gR^2}{(x^* + R)^2}, \quad (20)$$

$$x^*(0) = 0, \quad \frac{dx^*}{dt^*}(0) = V, \quad (21)$$

wobei g die Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche, R der Erdradius und V die Anfangsgeschwindigkeit ist. Luftwiderstand wurde im obigen Problem vernachlässigt. Der Aufschlagzeitpunkt $T^* > 0$ ist Lösung der Gleichung $x^*(T^*) = 0$.

Wir wählen R als charakteristische Länge, d.h. als intrinsische Referenzgröße für x^* , und R/V als charakteristische Zeit. Wir führen also die dimensionslosen Variablen

$$y = \frac{x^*}{R}, \quad \tau = \frac{t^*}{R/V}$$

ein. Das dimensionslose Problem hat dann die Form

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -\frac{1}{(y+1)^2}, \quad (22)$$

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 1, \quad (23)$$

mit dem dimensionslosen Parameter

$$\varepsilon = \frac{V^2}{gR}.$$

Wir nehmen an, dass ε klein ist (als Formel: $\varepsilon \ll 1$), d.h. $V^2 \ll gR$, bzw. $V \ll \sqrt{gR} \approx 6000 \text{ms}^{-1}$. Die Idee ist, die Kleinheit des Parameters ε bei der Lösung des Problems zu nutzen. Man könnte hoffen, dass das Problem mit $\varepsilon = 0$ ein geeignetes Näherungsproblem ist. Für (22), (23) funktioniert das offensichtlich nicht.

Da die Wahl der intrinsischen Referenzgrößen nicht eindeutig ist, liegt der Verdacht nahe, dass da eine Verbesserung möglich ist.

Eine zweite Möglichkeit für die Einführung von dimensionslosen Variablen ist

$$z = \frac{x^*}{R}, \quad \tau = \frac{t^*}{\sqrt{R/g}}.$$

Nun erhält das Problem die Form

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = -\frac{1}{(z+1)^2},$$

$$z(0) = 0, \quad \frac{dz}{d\tau}(0) = \sqrt{\varepsilon}.$$

Das zeigt einerseits, dass durch eine andere Wahl von Referenzgrößen der dimensionslose Parameter an eine andere Stelle 'befördert' werden kann. Andererseits ist uns auch damit nicht wirklich geholfen, weil die Lösung des 'Näherungsproblems' mit $\varepsilon = 0$ jetzt negativ ist, d.h. der nach oben geworfene Körper bewegt sich von Anfang an nach unten.

Eine einfache Überlegung führt auf eine geeignete Skalierung des Problems (20), (21) für $\varepsilon \ll 1$. Es ist naheliegend, R für die Konstruktion der Referenzgrößen nicht zu verwenden. Damit ergeben sich die Referenzlänge V^2/g und die Referenzzeit V/g . Bei Verwendung der dimensionslosen Variablen

$$x = \frac{x^*}{V^2/g}, \quad t = \frac{t^*}{V/g},$$

erhält das Problem die Form

$$\frac{d^2 x^\varepsilon}{dt^2} = -\frac{1}{(\varepsilon x^\varepsilon + 1)^2}, \quad (24)$$

$$x^\varepsilon(0) = 0, \quad \frac{dx^\varepsilon}{dt}(0) = 1. \quad (25)$$

Das reduzierte Problem (mit $\varepsilon = 0$)

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = -1,$$

$$x_0(0) = 0, \quad \frac{dx_0}{dt}(0) = 1,$$

hat die Lösung $x_0(t) = t - t^2/2$, die den Aufschlagzeitpunkt $T^* = 2V/g$ vorhersagt. Die verwendete Näherung entspricht der vereinfachenden Annahme, daß die durch die Gravitation verursachte Beschleunigung unabhängig vom Abstand von der Erdoberfläche ist. Die Tatsache, daß das reduzierte Problem eine sinnvoll erscheinende Lösung liefert, läßt die Hoffnung zu, daß diese auch wirklich eine Approximation für die Lösung des vollen Problems (24), (25) darstellt.

Genauer gesagt stellt sich die Frage, ob aus der Existenz der formalen Näherungslösung x_0 auf die Existenz einer Lösung x^ε des Problems (24),

(25) und deren Konvergenz für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen x_0 geschlossen werden darf, wobei noch geklärt werden müsste, was Konvergenz genau bedeutet. Bevor wir uns dieser Frage zuwenden, beschäftigen wir uns mit der Berechnung von Korrekturtermen zur Verbesserung der Genauigkeit der Approximation x_0 .

Asymptotische Entwicklungen

Wir versuchen eine formale asymptotische Entwicklung für die Lösung von (24), (25) zu konstruieren. Substitution des Ansatzes

$$x^\varepsilon = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + O(\varepsilon^3)$$

in das Problem liefert

$$\begin{aligned} x_0'' + \varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'' + O(\varepsilon^3) &= - \left(1 + \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + O(\varepsilon^4) \right)^{-2}, \\ x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + \varepsilon^2 x_2(0) + O(\varepsilon^3) &= 0, \\ x_0'(0) + \varepsilon x_1'(0) + \varepsilon^2 x_2'(0) + O(\varepsilon^3) &= 1. \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die binomische Reihe

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k, \quad \text{für } |z| < 1, \quad \text{mit } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdots (\alpha - k + 1)}{k!},$$

um die rechte Seite der Differentialgleichung um $\varepsilon = 0$ zu entwickeln:

$$- \left(1 + \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + O(\varepsilon^4) \right)^{-2} = -1 + \varepsilon 2x_0 + \varepsilon^2 (2x_1 - 3x_0^2) + O(\varepsilon^3)$$

Koeffizientenvergleich liefert eine Folge von Problemen für die Bestimmung der x_k .

Koeffizienten von ε^0 :

$$x_0'' = -1, \quad x_0(0) = 0, \quad x_0'(0) = 1.$$

Koeffizienten von ε^1 :

$$x_1'' = 2x_0, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Koeffizienten von ε^2 :

$$x_2'' = 2x_1 - 3x_0^2, \quad x_2(0) = x_2'(0) = 0.$$

Das Problem für x_0 ist das reduzierte Problem, das wir bereits gelöst haben:

$$x_0(t) = t - \frac{t^2}{2}$$

Für die weiteren Koeffizienten ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{t^3}{3} \left(1 - \frac{1}{4}t\right), \\ x_2(t) &= -\frac{t^4}{4} \left(1 - \frac{11}{15}t + \frac{11}{90}t^2\right). \end{aligned}$$

Wir erhalten also die formale Entwicklung

$$x^\varepsilon(t) = t - \frac{t^2}{2} + \varepsilon \frac{t^3}{3} \left(1 - \frac{1}{4}t\right) - \varepsilon^2 \frac{t^4}{4} \left(1 - \frac{11}{15}t + \frac{11}{90}t^2\right) + O(\varepsilon^3).$$

Es ist offensichtlich, dass beliebig viele weitere Korrekturterme der Form $\varepsilon^k x_k(t)$ berechnet werden könnten. Das ist ein für Anwendungen zufriedenstellendes Resultat. Genaugenommen wissen wir allerdings noch nicht, ob die obige Beziehung für die Lösung von (24), (25) wirklich gültig ist. Ja wir haben uns noch nicht einmal überlegt, ob für (24), (25) eine Lösung existiert.

Gültigkeit asymptotischer Näherungen

Angenommen, wir hätten

$$x_{as}^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^n \varepsilon^k x_k(t)$$

berechnet. Dann gilt

$$x_{as}^\varepsilon(t)'' = -(1 + \varepsilon x_{as}^\varepsilon(t))^{-2} + \varepsilon^{n+1} \varrho^\varepsilon(t)$$

mit einer beschränkten Funktion $\varrho^\varepsilon(t)$. Was heißt das genauer? Zunächst müssen wir uns auf ein Zeitintervall einigen. Wir wählen $t \in [0, 3]$, weil zu erwarten ist, dass für kleine ε der Aufschlagszeitpunkt ($T = 2$ für $\varepsilon = 0$) in diesem Intervall liegt. Langwierige aber nicht schwierige Rechnung zeigt, dass es eine Konstante M gibt, sodass

$$\|\varrho^\varepsilon\| := \sup_{0 \leq t \leq 3} |\varrho(t)| \leq M \quad \text{für } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

wobei ε_0 klein genug gewählt werden muss. Die Zahl $\|\varrho^\varepsilon\|$ ist ein Maß für die Größe der Funktion ϱ^ε und heißt *Supremumnorm von ϱ^ε* . Da wir annehmen, dass der Fehler bei der Approximation von x^ε durch x_{as}^ε von der Größenordnung $O(\varepsilon^{n+1})$ ist definieren wir

$$x^\varepsilon(t) - x_{as}^\varepsilon(t) = \varepsilon^{n+1}r(t), \quad 0 \leq t \leq 3,$$

d.h. wir ersetzen die Unbekannte x^ε durch die neue Unbekannte r . Einsetzen ergibt die Differentialgleichung

$$r'' = -\varrho^\varepsilon + g^\varepsilon(r, t), \quad \text{mit } g^\varepsilon(r, t) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \left[\frac{1}{(1 + \varepsilon x_{as}^\varepsilon)^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon x_{as}^\varepsilon + \varepsilon^{n+2}r)^2} \right],$$

wobei g^ε die Eigenschaften

$$g^\varepsilon(0, t) = 0, \quad g^\varepsilon(r, t) - g^\varepsilon(\hat{r}, t) = \frac{2\varepsilon(r - \hat{r})}{(1 + \varepsilon x_{as}^\varepsilon + \varepsilon^{n+2}\tilde{r})^3}$$

hat, wobei \tilde{r} zwischen \hat{r} und r liegt. Weiters muss r die Anfangsbedingungen $r(0) = r'(0) = 0$ erfüllen, woraus die Integralgleichung

$$r(t) = \int_0^t \int_0^{t'} [-\varrho^\varepsilon(t'') + g^\varepsilon(r(t''), t'')] dt'' dt'$$

abgeleitet werden kann. Führen wir für die rechte Seite die Abkürzung $F[r](t)$ ein, dann hat die Integralgleichung die Form eines Fixpunktproblems $r = F[r]$. Setzen wir

$$r_0(t) = - \int_0^t \int_0^{t'} \varrho^\varepsilon(t'') dt'' dt',$$

dann folgt

$$|r_0(t)| \leq \int_0^t \int_0^{t'} |\varrho^\varepsilon(t'')| dt'' dt' \leq \int_0^t \int_0^{t'} M dt'' dt' = \frac{9M}{2},$$

und daher $\|r_0\| \leq 9M/2$. Das motiviert uns dazu, nach r in der Menge

$$\mathcal{S} := \{r \in C([0, 3]) : \|r\| \leq 5M\}$$

zu suchen, wobei $C([0, 3])$ die Menge der auf dem Intervall $[0, 3]$ stetigen Funktionen ist. Für $r \in \mathcal{S}$ gilt

$$\begin{aligned} |F[r](t)| &\leq |r_0(t)| + \varepsilon \int_0^t \int_0^{t'} \frac{2|r(t'')|}{(1 + \varepsilon x_{as}^\varepsilon(t'') + \varepsilon^{n+2}\tilde{r}(t''))^3} dt'' dt' \\ &\leq \frac{9M}{2} + \varepsilon c \leq 5M \end{aligned}$$

mit einer von ε unabhängigen konstanten c . Dafür muss ε klein genug sein, d.h. wir machen den erlaubten Maximalwert ε_0 eventuell noch kleiner. Eine Konsequenz aus dieser Abschätzung ist, dass F die Menge \mathcal{S} in sich selbst abbildet.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von F folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} |F[r](t) - F[\hat{r}](t)| &\leq \int_0^t \int_0^{t'} |g^\varepsilon(r(t''), t'') - g^\varepsilon(\hat{r}(t''), t'')| dt'' dt' \\ &\leq 2\varepsilon \int_0^t \int_0^{t'} \frac{|r(t'') - \hat{r}(t'')|}{(1 + \varepsilon x_{as}^\varepsilon(t'') + \varepsilon^{n+2} \tilde{r}(t''))^3} dt'' dt' \\ &\leq \varepsilon c \|r - \hat{r}\|, \end{aligned}$$

und damit

$$\|F[r] - F[\hat{r}]\| \leq L \|r - \hat{r}\| \quad \text{mit } L := \varepsilon c < 1,$$

wobei dafür ε_0 noch einmal kleiner gemacht werden muss. Man sagt: F ist eine *Kontraktion* in der Menge \mathcal{S} , was eine Abkürzung für *Lipschitzstetigkeit mit Lipschitzkonstante kleiner als 1* ist.

Nun definieren wir rekursiv eine Folge $\{r_k\} \subset \mathcal{S}$ durch $r_{n+1} = F[r_n]$. Das erste Folgenglied r_0 wurde oben definiert. Wir wollen zeigen, dass die Folge gegen einen Fixpunkt von F konvergiert. Dazu beweisen wir zunächst die Eigenschaft einer Cauchyfolge. Wir beginnen mit

$$\|r_n - r_{n+1}\| = \|F[r_{n-1}] - F[r_n]\| \leq L \|r_{n-1} - r_n\| \leq L^n \|r_0 - r_1\|.$$

Für $m > n$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \|r_n - r_m\| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|r_k - r_{k+1}\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k \|r_0 - r_1\| \\ &\leq L^n \|r_0 - r_1\| \sum_{k=0}^{m-1-n} L^k \leq L^n \frac{\|r_0 - r_1\|}{1 - L}, \end{aligned}$$

und daraus, dass $\{r_n\}$ eine Cauchyfolge ist. Das gilt bezüglich der Supremumnorm, und daher natürlich auch punktweise:

$$|r_n(t) - r_m(t)| \leq cL^n \quad \text{für } 0 \leq t \leq 3.$$

Die Folge konvergiert daher punktweise gegen eine Grenzfunktion $r(t)$. Lässt man in der obigen Ungleichung $m \rightarrow \infty$, so folgt

$$\|r_n - r\| = \sup_{0 \leq t \leq 3} |r_n(t) - r(t)| \leq cL^n,$$

d.h. gleichmäßige Konvergenz von $\{r_n\}$ gegen r . Daher ist r stetig und damit $r \in \mathcal{S}$, weil man auch in der Ungleichung $\|r_n\| \leq 5M$ zum Limes übergehen kann. Da F bezüglich der Supremumnorm stetig ist, ist dieser Grenzübergang auch in der Rekursion $r_{n+1} = F[r_n]$ erlaubt, was zeigt, dass r wirklich die Gleichung $r = F[r]$ erfüllt.

Wir haben damit auch Existenz einer Lösung x^ε von (24) und (25) und die Approximationseigenschaft

$$\|x^\varepsilon - x_{as}^\varepsilon\| \leq 5M\varepsilon^{n+1}$$

gezeigt.

Schließlich gilt noch ein Eindeigkeitsresultat: r ist die einzige Lösung in \mathcal{S} . Angenommen, es gäbe eine zweite Lösung $\hat{r} = F[\hat{r}]$. Dann folgt $r = \hat{r}$ aus der Abschätzung

$$\|r - \hat{r}\| = \|F[r] - F[\hat{r}]\| \leq L\|r - \hat{r}\|.$$

Zusammenfassend halten wir fest, dass wir das Problem für den Fehler in die abstrakte Form eines Fixpunktproblemles gebracht haben. Unsere Vorgangsweise enthält den Beweis des *Banachschen Fixpunktsatzes*, der die Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten von Kontraktionen garantiert.

7 Autoverkehr: Mikroskopische Modellierung

In diesem Abschnitt geht es um dynamische Modelle für den Straßenverkehr unter stark vereinfachenden Annahmen. Wir beschäftigen uns mit einspurigen Einbahnstraßen ohne Kreuzungen bzw. Zu- oder Abfahrten. Autos und Autofahrer werden als identisch angenommen, was ihre für die Verkehrsdynamik relevanten Eigenschaften betrifft.

Alle Autos haben die Länge L . Die Position auf der Straße wird mit $x \in \mathbb{R}$ parametrisiert, wobei wachsende x -Richtung die Fahrtrichtung ist. Die Autos werden in der Reihenfolge des Passierens einer bestimmten Stelle nummeriert. Die Position des vorderen Endes des j -ten Autos zum Zeitpunkt t wird mit $x_j(t)$ bezeichnet, und es muss daher $x_{j-1}(t) - x_j(t) \geq L$ gelten. Will man die Situation in der Mitte einer Autoschlange beschreiben, könnte man $j \in \mathbb{Z}$ zulassen. Für die Beschreibung des Anfangs einer Kolonne wäre $j \geq 0$ möglich. Man kann sich natürlich auch auf eine endliche Anzahl von Fahrzeugen, d.h. $0 \leq j \leq N$, beschränken.

Nimmt man an, dass jeder Autofahrer eine Reaktionszeit τ hat, dann ist es plausibel, die Beschleunigung $x_j''(t)$ von Beobachtungen zum Zeitpunkt

$t - \tau$ abhängig zu machen. Insbesondere nehmen wir an, dass die Beschleunigung proportional zum beobachteten Unterschied zwischen der eigenen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Autos davor ist. Die Reaktion sollte bei kleinerem Abstand zum Auto davor stärker ausfallen. Ein Modell, das diese Überlegungen berücksichtigt, ist

$$x_j''(t + \tau) = v_0 \frac{x'_{j-1}(t) - x'_j(t)}{x_{j-1}(t) - x_j(t) - L}.$$

Die Skalierung: $x_j \rightarrow Lx_j$, $t \rightarrow Lt/v_0$ gibt

$$x_j''(t + \varepsilon) = \frac{x'_{j-1}(t) - x'_j(t)}{x_{j-1}(t) - x_j(t) - 1},$$

mit dem dimensionslosen Parameter $\varepsilon = v_0\tau/L$. Integration führt auf

$$x'_j(t + \varepsilon) = \ln(x_{j-1}(t) - x_j(t) - 1) + v_1,$$

wobei die Unabhängigkeit der Integrationskonstanten v_1 von j mit der Modellierungsannahme der identischen Fahrzeuge begründet werden kann. Eine Lösung besteht darin, dass alle Autos im gleichen Abstand $D - 1 > 0$ mit derselben Geschwindigkeit \bar{v} fahren: $x_j(t) = \bar{v}t - Dj$, $j \in \mathbb{Z}$, wobei $\bar{v} = \ln(D - 1) + v_1$ gelten muss.

Mängel des Modells sind, dass für kleine Fahrzeugabstände $D - 1$ negative Geschwindigkeiten auftreten und dass die Geschwindigkeit für $D \rightarrow \infty$ unbeschränkt ist.

Wir untersuchen die Stabilität der Equilibriumslösung, indem wir die Störungen $\xi_j(t) = x_j(t) - \bar{v}t + Dj$ einführen, die die Gleichungen

$$\xi'_j(t + \varepsilon) = \ln(D - 1 + \xi_{j-1}(t) - \xi_j(t)) - \ln(D - 1)$$

lösen. Verwenden wir auf der rechten Seite die lineare Approximation $\ln(D - 1 + z) \approx \ln(D - 1) + z/(D - 1)$, dann ergibt sich die linearisierte Gleichung

$$\xi'_j(t + \varepsilon) = \frac{\xi_{j-1}(t) - \xi_j(t)}{D - 1}.$$

Suchen wir nach Lösungen der Form $\xi_j(t) = e^{\lambda t} z_j$, $\lambda, z_j \in \mathbb{C}$, dann müssen λ und die Folge $\{z_j\}$ die Gleichungen

$$(\lambda e^{\lambda \varepsilon} (D - 1) + 1) z_j = z_{j-1}$$

erfüllen. Wir beschränken uns auf Störungen, die entlang der Straße nicht unbeschränkt wachsen. Daher muss der Faktor auf der linken Seite den Betrag 1 haben, d.h. $z_j = e^{ijk}$ mit $k \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda e^{\lambda \varepsilon} (D - 1) + 1 = e^{-ik}.$$

Für $\varepsilon = 0$ ergibt sich

$$\lambda = \frac{\cos k - 1 - i \sin k}{D - 1},$$

d.h. $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ und damit linearisierte Stabilität der Equilibriumslösung unter der betrachteten Klasse von Störungen (man beachte $|e^{\lambda t}| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t}$). Für $\varepsilon > 0$ kann λ nicht explizit berechnet werden. Sucht man nach einer asymptotischen Entwicklung für kleine Werte von k , so erhält man

$$\lambda = \frac{-ik}{D - 1} + \frac{k^2}{D - 1} \left(\frac{\varepsilon}{D - 1} - \frac{1}{2} \right) + O(k^3),$$

was bedeutet, dass man für $2\varepsilon > D - 1$ Werte von λ mit positivem Realteil und damit Instabilität erhält. Das Resultat ist plausibel: Größerer Fahrzeugabstand verzeiht langsamere Reaktion.

8 Autoverkehr: Makroskopische Modellierung

Die makroskopische Dichte – Das "fundamentale Diagramm"

Betrachtet man die Straße aus einer so großen Entfernung, dass der typische Abstand zwischen zwei Fahrzeugen sehr klein erscheint, dann liegt es nahe, eine Beschreibung der Fahrzeugdynamik zu wählen, in der die Fahrzeuge nicht individuell, sondern als entlang der Straße verteilte Masse beschrieben werden. Das ist die Grundidee der *Kontinuumsmechanik*, die viele Anwendungen in der Physik besitzt. Beispiele sind die Beschreibung der Dynamik von Gasen und Flüssigkeiten (*Strömungsmechanik*), sowie der Verformung von ausgedehnten Festkörpern (wie z.B. in der *Elastizitätstheorie*).

An die Herleitung von kontinuumsmechanischen Modellen kann man einerseits so herangehen, dass man von einer verteilten Masse als Hypothese ausgeht und dabei die mikroskopische Struktur (in unserem Fall die Existenz einzelner Fahrzeuge) "vergisst". Andererseits kann man versuchen kontinuumsmechanische Modelle durch einen systematischen Grenzübergang (den *makroskopischen Limes*) aus mikroskopischen Modellen herzuleiten. Im besten Fall kann man beweisen, dass das kontinuumsmechanische makroskopische Modell das mikroskopische Modell approximiert.

Wir werden im Folgenden für die Modellierung des Straßenverkehrs vom mikroskopischen Modell ausgehen, allerdings den makroskopischen Limes nicht rigoros durchführen. Die wesentliche Grundannahme besteht darin, dass zwei stark unterschiedliche Längenskalen verwendet werden. Wir nehmen an, dass der typische Abstand zwischen zwei Fahrzeugen von der Größenordnung der Fahrzeuglänge L ist. Weiters sei X eine typische Länge eines beobachteten Intervalls der Straße, wobei $\delta := L/X \ll 1$ angenommen wird. Die Anzahl $N_{a,b}$ der Fahrzeuge auf einem Intervall (aX, bX) mit moderaten (dimensionslosen) a, b ist dann von der Größenordnung $O(1/\delta)$. Wir definieren daher $M_{a,b} := \delta N_{a,b}$. Zu einem Zeitpunkt t suchen wir die nächsten Fahrzeugpositionen zu aX und bX , d.h.

$$x_{m+1} < aX \leq x_m, \quad x_{n+1} \leq bX < x_n,$$

und daher

$$a = \frac{x_m}{X} + O(\delta), \quad b = \frac{x_n}{X} + O(\delta).$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} M_{a,b} &= \delta(m-n) = \delta \sum_{j=n+1}^m \frac{x_{j-1} - x_j}{x_{j-1} - x_j} = \sum_{j=n+1}^m \frac{x_{j-1} - x_j}{X} \frac{L}{x_{j-1} - x_j} \\ &= \int_{x_m/X}^{x_n/X} \varrho_\delta(y) dy, \end{aligned}$$

mit der stückweise konstanten dimensionslosen Dichtefunktion

$$\varrho_\delta(y) = \frac{L}{x_{j-1} - x_j} \quad \text{für } \frac{x_{j-1}}{X} < y < \frac{x_j}{X}.$$

Der Subscript δ deutet darauf hin, dass die Längen der Teilintervalle die Größenordnung $O(\delta)$ besitzen. Nehmen wir nun an, dass in einem geeigneten Sinn $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varrho_\delta = \varrho$ gilt, dann gibt der Limes $\delta \rightarrow 0$ den Ausdruck $\int_a^b \varrho(y) dy$ für die in der Einheit $1/\delta$ gemessene Fahrzeuganzahl im Intervall (a, b) . Wir sind also bei einer kontinuumsmechanischen Beschreibung der Verteilung der Fahrzeuge angelangt.

Um die Dynamik zu beschreiben, verwenden wir Information aus dem mikroskopischen Modell des vorigen Abschnittes. Die dort verwendete Modellgleichung liefert eine skalierte Geschwindigkeit. Zu beachten ist dabei, dass wir jetzt eine andere Längenskalierung gewählt haben, die sich um den Faktor δ von der des vorigen Abschnittes unterscheidet. Wenn wir

auch die Zeitskalierung entsprechend ändern, d.h. $t \rightarrow Xt/v_0$ in der Notation des vorigen Abschnittes, dann kann das Modell jetzt so interpretiert werden: Die Geschwindigkeit $v(t + \delta\varepsilon, y)$ eines zum Zeitpunkt $t + \delta\varepsilon$ am Ort y befindlichen Fahrzeuges ist von der Dichte $\varrho_\delta(t, y)$ abhängig, und zwar liefert das mikroskopische Modell den Zusammenhang $v(t + \delta\varepsilon, y) = \ln(1/\varrho_\delta(t, y) - 1) + v_1$.

Im makroskopischen Limes $\delta \rightarrow 0$ gilt, dass zu einem Zeitpunkt und an einem Ort, wo die Fahrzeugdichte den Wert ϱ hat, die Fahrzeuge mit der Geschwindigkeit $v(\varrho) = \ln(1/\varrho - 1) + v_1$ fahren. Die Beziehung zwischen v und ϱ wird das *fundamentale Diagramm* genannt. In der Praxis wird dieses oft durch Messungen bestimmt. Im Unterschied zu unserem bisherigen (unzulänglichen) Modell wird üblicherweise angenommen, dass $v(\varrho)$ die Eigenschaften

$$v(0) = v_{max}, \quad v(\varrho_{max}) = 0, \quad v'(\varrho) \leq 0,$$

hat. Das einfachste Modell dieser Art, mit dem wir uns im Folgenden beschäftigen werden, hat die Form

$$v(\varrho) = v_{max} \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{max}} \right). \quad (26)$$

Will man diese Beziehung durch Beobachtungen schätzen, so müsste man Dichte und Geschwindigkeit simultan beobachten können. Geschwindigkeitsmessungen sind leicht möglich. Wie die Dichte gemessen werden sollte, ist nicht so einfach. Statt dessen wird zumeist eine andere, leicht zu beobachtende Größe gemessen, nämlich der *Fluss*, d.h. die Anzahl $f(t, y)$ der an der Stelle y zur Zeit t pro Zeiteinheit vorbeikommenden Fahrzeuge.

Damit die Beobachtung von f etwas bringt, müssen wir es mit den bisher verwendeten Größen in Beziehung bringen. Eine Grundannahme, die bei der Modellierung in der Kontinuumsmechanik immer verwendet wird, ist die Stetigkeit der vorkommenden Größen. Das bedeutet zum Beispiel, dass die Geschwindigkeit aller Fahrzeuge, die sich nahe der Zeit t in der Nähe des Punktes y befinden, durch $v(\varrho(t, y))$ approximiert werden kann. Wenn wir daher den Fluss $f(t, y)$ dadurch schätzen wollen, dass wir die Anzahl der in einem kurzen Zeitintervall $(t, t + \Delta t)$ an der Stelle y vorbeikommenden Fahrzeuge berechnen, dann dürfen wir näherungsweise annehmen, dass diese Fahrzeuge alle die Geschwindigkeit $v(\varrho(t, y))$ haben. Es handelt sich daher genau um die Fahrzeuge, die sich zum Zeitpunkt t im Intervall $(y - v(\varrho(t, y))\Delta t, y)$ befinden. Verwenden wir die Stetigkeitsannahme noch einmal, und zwar jetzt für die Dichte, dann können wir annehmen, dass

in diesem kurzen Intervall die Dichte fast konstant gleich $\varrho(t, y)$ ist. Die gesuchte Anzahl der Fahrzeuge ist daher ungefähr $\varrho(t, y)v(\varrho(t, y))\Delta t$, wobei diese Schätzung immer genauer wird, je kleiner Δt ist. Division durch Δt (und $\Delta t \rightarrow 0$) ergibt daher, dass der Fluss wie die Geschwindigkeit nur von der lokalen Dichte abhängt:

$$f(\varrho) = \varrho v(\varrho).$$

Messungen von f und v ergeben damit auch Werte für ϱ und damit Punkte auf dem fundamentalen Diagramm (Dieser Name wird übrigens manchmal auch für die Beziehung zwischen f und ϱ verwendet).

Eine praktisch relevante Frage ist, wie der Fluss möglichst groß gemacht werden kann. Für das obige Beispiel hat der Fluss

$$f(\varrho) = \varrho v_{max} \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{max}} \right)$$

ein Maximum an der Stelle $\varrho = \varrho_{max}/2$.

Die Kontinuitätsgleichung

Bisher haben wir noch kein vollständiges Kontinuumsmodell, nämlich eine Vorschrift dafür, wie sich die Dichte $\varrho(t, x)$ mit der Zeit entwickelt (Wir verwenden wieder x als Symbol für die Ortsvariable, weil das allgemein üblich ist). Eine solche Vorschrift wird sich einfach daraus ergeben, dass wir über den Aufenthalt der Fahrzeuge buchführen. Die Grundüberlegung ist einfach: Wodurch kann sich die Anzahl der Fahrzeuge in einem festen Intervall (a, b) ändern? Natürlich einerseits dadurch, dass Fahrzeuge bei $x = a$ in das Intervall hineinfahren, und andererseits dadurch, dass sie an $x = b$ das Intervall verlassen. Betrachten wir die Änderung der Fahrzeuganzahl pro Zeit, dann ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \varrho(t, x) dx = f(\varrho(t, a)) - f(\varrho(t, b)). \quad (27)$$

Das ist (zusammen mit dem fundamentalen Diagramm) das Grundgesetz, das die Dynamik bestimmt. Die rechte Seite erinnert an den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Verwenden wir diesen und bringen alles auf die linke Seite, so ergibt sich

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial f(\varrho)}{\partial x}(t, x) \right) dx = 0. \quad (28)$$

Das Modellierungsprinzip der Stetigkeit der vorkommenden Größen wenden wir jetzt auf den Integranden an. Wir nehmen an, dass dieser für jedes t eine stetige Funktion von x ist.

Lemma 1 Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $\int_a^b h(x)dx = 0$ für alle $a < b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Indirekt: Sei $h(x_0) \neq 0$, und zwar o.B.d.A. $h(x_0) > 0$. Dann gibt es wegen der Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen $a < x_0 < b$, sodass h auf dem Intervall (a, b) positiv ist, und daher $\int_a^b h(x)dx > 0$. Widerspruch!

■

Als Konsequenz aus dem Lemma erhalten wir die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial f(\varrho)}{\partial x} = 0, \quad (29)$$

eine *partielle Differentialgleichung* für die unbekannte Funktion $\varrho(t, x)$. Sie ist nichtlinear, weil $f(\varrho)$ im Allgemeinen eine nichtlineare Funktion ist. Ausdifferenzieren des zweiten Terms zeigt allerdings,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + f'(\varrho) \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0, \quad (30)$$

dass die Gleichung *quasilinear*, d.h. linear in den Ableitungen von ϱ , ist.

Die Charakteristikenmethode

Es scheint plausibel, dass die Anfangsbedingung

$$\varrho(0, x) = \varrho_0(x)$$

mit gegebener Anfangsdichte ϱ_0 eine geeignete Zusatzbedingung ist, um die Lösung eindeutig festzulegen. Wir wollen das zunächst an einem einfacheren, linearen Problem demonstrieren, indem wir annehmen, dass die Geschwindigkeit der Fahrzeuge konstant und gleich v_0 ist. Es ist leicht zu sehen, dass jede *wandernde Welle*

$$\varrho(t, x) = \hat{\varrho}(x - v_0 t) \quad (31)$$

mit Wellengeschwindigkeit v_0 und differenzierbarem Profil $\hat{\varrho}$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0 \quad (32)$$

ist. Ist daher die Anfangsdichte ϱ_0 differenzierbar, dann ist $\varrho(t, x) = \varrho_0(x - v_0 t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Ist das die einzige Lösung, wie zu erwarten wäre? Wir werden das beweisen, indem wir zeigen, dass durch (31) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben ist. Dazu führen wir die Koordinatentransformation $\xi = x - v_0 t$, d.h. $\hat{\varrho}(t, \xi) = \varrho(t, \xi + v_0 t)$, durch. Die Kettenregel ergibt

$$\frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0,$$

und damit $\hat{\varrho} = \hat{\varrho}(\xi)$, was wir zeigen wollten. Einsetzen in die Anfangsbedingung liefert $\hat{\varrho} = \varrho_0$, d.h. die oben angegebene Lösung ist die einzige.

Nun wenden wir uns wieder der nichtlinearen Gleichung (29) bzw. (30) zu. Zur Lösung der linearen Gleichung haben wir eine Koordinatentransformation $x = X(t, \xi)$ so geschickt gewählt, dass $\hat{\varrho}(t, \xi) = \varrho(t, X(t, \xi))$ unabhängig von t wurde. Versuchen wir dasselbe für die nichtlineare Gleichung (30), dann ergibt sich

$$\frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0,$$

wenn wir $X(t, \xi)$ so wählen, dass

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t, \xi) = f'(\hat{\varrho}(\xi))$$

gilt. Verwenden wir zusätzlich die Anfangsbedingung $X(0, \xi) = \xi$, so folgt $X(t, \xi) = f'(\varrho_0(\xi))t + \xi$, weil wegen der Anfangsbedingung $\hat{\varrho} = \varrho_0$ gelten muss. Könnten wir die Beziehung $x = f'(\varrho_0(\xi))t + \xi$ zwischen x und ξ invertieren, d.h. $\xi = \Xi(t, x)$ explizit berechnen, dann hätten wir das Problem explizit gelöst:

$$\varrho(t, x) = \varrho_0(\Xi(t, x)).$$

Damit haben wir die sogenannte *Charakteristikenmethode* zur Lösung quasilinear partieller Differentialgleichungen erster Ordnung kennengelernt. Die Methode verdankt ihren Namen den Charakteristiken, das sind die Kurven in der (t, x) -Ebene, die sich für konstantes ξ ergeben. In unserem Fall handelt es sich dabei offensichtlich um Geraden, die jeweils durch den Punkt $(t, x) = (0, \xi)$ gehen, und deren Anstieg (bzw. Geschwindigkeit) durch $f'(\varrho_0(\xi))$ gegeben ist. Die Signifikanz der Charakteristiken liegt darin, dass die Lösung entlang dieser Geraden konstant ist.

Auch wenn die Gleichung $x = f'(\varrho_0(\xi))t + \xi$ nicht explizit nach ξ aufgelöst werden kann, sind theoretische Aussagen möglich. Sind f' und ϱ_0 glatt

genug (z.B. stetig differenzierbar), dann kann der Hauptsatz über implizite Funktionen angewandt werden, um die Existenz von $\Xi(t, x)$ für kleine Werte von t zu beweisen. Es ergibt sich die Taylorentwicklung $\Xi(t, x) = x - f'(\varrho_0(x))t + O(t^2)$.

Außerdem kann das Problem "geometrisch gelöst" werden, indem man von jedem Punkt $(0, \xi)$ aus die entsprechende Charakteristik zeichnet, die ja eine Niveaulinie der Lösung ist.

Betrachten wir eine Situation, in der ϱ_0 fast konstant ist, sodass zum Beispiel nur eine kleine lokale Störung einer sonst konstanten Dichte $\bar{\varrho}$ vorliegt. In diesem Fall haben alle Charakteristiken fast dieselbe Geschwindigkeit $f'(\bar{\varrho})$, und die Störung wandert mit dieser Geschwindigkeit. Wegen $f(\varrho) = \varrho v(\varrho)$ und $f'(\varrho) = v(\varrho) + \varrho v'(\varrho)$ ist diese Geschwindigkeit nicht gleich der Geschwindigkeit der Fahrzeuge sondern wegen $v'(\varrho) \leq 0$ im allgemeinen kleiner. Das bedeutet, dass die Störung den Fahrzeugen "entgegenkommt". Für das Modell (26) und $\varrho > \varrho_{max}/2$ gilt das sogar ohne Anführungszeichen, weil dann

$$f'(\varrho) = v_{max} \left(1 - \frac{2\varrho}{\varrho_{max}} \right) < 0.$$

Im allgemeinen haben die Charakteristiken unterschiedliche Geschwindigkeiten. Wir unterscheiden zwei typische Situationen: Ist $f'(\varrho_0(\xi))$ eine monoton wachsende Funktion von ξ , dann bewegen sich die Charakteristiken auseinander. Die rechte Seite der Gleichung $x = f'(\varrho_0(\xi))t + \xi$ ist für alle $t \geq 0$ streng monoton wachsend in ξ und $\Xi(t, x)$ daher für alle $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, wohldefiniert. Wir haben damit eine *globale* (d.h. für alle Zeiten existierende) Lösung gefunden. Anders ist die Situation, wenn es zumindest ein Paar $\xi_1 < \xi_2$ von ξ -Werten gibt, sodass $f'(\varrho_0(\xi_1)) > f'(\varrho_0(\xi_2))$ gilt. In diesem Fall holt die am Punkt $(0, \xi_1)$ beginnende Charakteristik die am Punkt $(0, \xi_2)$ beginnende nach endlicher Zeit ein. Am Schnittpunkt müsste die Lösung gleichzeitig die beiden verschiedenen Werte $\varrho_0(\xi_1)$ und $\varrho_0(\xi_2)$ annehmen. Die Lösung wird also nach endlicher Zeit unstetig.

Wie die obige Gleichung zeigt, ist für das Modell (26) f' streng monoton fallend. Der günstige erste Fall tritt dann ein, wenn ϱ_0 fallend ist, wenn also in Fahrtrichtung die Verkehrsdichte immer kleiner wird. Gibt es allerdings ein ξ -Intervall (ξ_1, ξ_2) , indem die Verkehrsdichte ansteigt, dann rücken die beiden an den Endpunkten startenden Charakteristiken immer näher, wodurch der Anstieg der Verkehrsdichte immer steiler wird, bis schließlich die Dichte eine Sprungstelle hat, nach der die Lösung nicht mehr fortgesetzt werden kann.

Schwächere Lösungen

Beschäftigen wir uns noch einmal mit der linearen Gleichung (32). Wie schon gesagt, muss ϱ_0 differenzierbar sein, damit man $\varrho_0(x - v_0t)$ in die Differentialgleichung einsetzen kann. Andererseits wird ein Anwender mit dieser Lösung auch für weniger glatte ϱ_0 zufrieden sein. Wie geht man als Mathematiker mit dieser Situation um? Eine Möglichkeit ist, uns daran zu erinnern, dass wir die Differentialgleichung (32) eigentlich aus der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \varrho(t, x) dx = v_0(\varrho(t, a) - \varrho(t, b)), \quad \forall a < b, \quad (33)$$

hergeleitet haben. Diese Gleichung erfordert wesentlich weniger Glattheit von ϱ . Sei zum Beispiel $\hat{\varrho}(\xi)$ glatt bis auf eine Sprungstelle an $\xi = \xi_0$, sei $\varrho(t, x) = \hat{\varrho}(x - v_0t)$ und sei $a < \xi_0 + v_0t < b$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b \varrho(t, x) dx &= \frac{d}{dt} \int_a^b \hat{\varrho}(x - v_0t) dx = \frac{d}{dt} \int_{a-v_0t}^{b-v_0t} \hat{\varrho}(\xi) d\xi \\ &= v_0(\hat{\varrho}(a - v_0t) - \hat{\varrho}(b - v_0t)) = v_0(\varrho(t, a) - \varrho(t, b)). \end{aligned}$$

In Intervallen (a, b) mit $a \geq \xi_0 + v_0t$ oder $b \leq \xi_0 + v_0t$ gilt ohnehin die Differentialgleichung und damit auch (33). Man könnte sagen, dass (33) eine *schwächere Formulierung* der Differentialgleichung (32) ist. Natürlich können auch mehrere Sprungstellen von $\hat{\varrho}$ zugelassen werden (zumindest solange sie sich nicht häufen).

Erinnern wir uns an die unangenehme Situation am Ende des letzten Abschnittes, wo eine Fortsetzung der Lösung mit der Charakteristikenmethode ab einem gewissen Zeitpunkt nicht möglich war, dann drängt sich die Frage auf, ob nach diesem Zeitpunkt vielleicht eine schwächere Lösung existiert, die (27) erfüllt, aber nicht in (29) eingesetzt werden kann.

An dieser Stelle schieben wir ein Beispiel ein. Wir betrachten das Modell (26) mit einer Umskalierung $x \rightarrow \bar{x}x$, $t \rightarrow \bar{t}t$, $\varrho \rightarrow \varrho_{max}\varrho$ mit $\bar{x}/\bar{t} = v_{max}$:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho(1 - \varrho)}{\partial x} = 0.$$

Wir lösen das Anfangswertproblem mit einer Anfangsdichte der Form

$$\varrho_0(x) = \begin{cases} \varrho_l, & \text{für } x < 0, \\ \varrho_l + (\varrho_r - \varrho_l)x/L, & \text{für } 0 \leq x \leq L, \\ \varrho_r, & \text{für } x > L. \end{cases} \quad (34)$$

Die Charakteristikenmethode liefert unter anderem

$$\xi = \frac{x - t + 2t\varrho_l}{1 - 2t(\varrho_r - \varrho_l)/L},$$

für $0 \leq \xi \leq L$, und damit

$$\varrho(t, x) = \begin{cases} \varrho_l, & \text{für } x < t(1 - 2\varrho_l), \\ \frac{L\varrho_l + (x-t)(\varrho_r - \varrho_l)}{L - 2t(\varrho_r - \varrho_l)}, & \text{für } t(1 - 2\varrho_l) \leq x \leq L + t(1 - 2\varrho_r), \\ \varrho_r, & \text{für } x > L + t(1 - 2\varrho_r). \end{cases}$$

Für $\varrho_r \leq \varrho_l$ kann diese Formel für alle $t > 0$ verwendet werden. Für $\varrho_r > \varrho_l$ schneiden einander alle Charakteristiken mit $0 \leq \xi \leq 1$ im kritischen Punkt

$$(t_c, x_c) = \left(\frac{L}{2(\varrho_r - \varrho_l)}, \frac{L(1 - 2\varrho_l)}{2\varrho_r - 2\varrho_l} \right).$$

Für die Lösung gilt dann

$$\varrho(t_c^-, x) = \begin{cases} \varrho_l, & \text{für } x < x_c, \\ \varrho_r, & \text{für } x > x_c. \end{cases}$$

der Bereich der linearen Variation ist zum Zeitpunkt $t = t_c$ verschwunden, und die Dichte hat eine Sprungstelle. Für eine mögliche Fortsetzung der Lösung spielt die obige Funktion die Rolle einer Anfangsbedingung. Ein Anfangswertproblem, bei dem die Anfangsdaten stückweise konstant mit einer Sprungstelle sind, nennt man ein *Riemannproblem*. Eine Fortsetzung der Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmethode ist nicht möglich. Allerdings kann für $t > t_c$ eine schwächere Lösung existieren. Wie diese aussehen könnte, kann man erraten, wenn man an den Fall $\varrho_r = 1$ denkt. Das bedeutet, dass sich zum Zeitpunkt t_c rechts von x_c eine stehende Kolonne von Fahrzeugen befindet, während von links eine fahrende Kolonne mit Dichte $\varrho_l < 1$ ankommt. Was wird wohl passieren? Jedes ankommende Fahrzeug bleibt stehen, wenn es auf die Kolonne trifft, und diese wächst mit einer Geschwindigkeit $s < 0$ nach links. In Formeln ausgedrückt, als Ansatz für eine mögliche schwächere Lösung:

$$\varrho(t, x) = \begin{cases} \varrho_l, & \text{für } x < x_c + s(t - t_c), \\ \varrho_r, & \text{für } x > x_c + s(t - t_c). \end{cases} \quad \text{für } t > t_c. \quad (35)$$

Einsetzen in (27) mit $a < x_c + s(t - t_c) < b$ liefert

$$s(\varrho_l - \varrho_r) = f(\varrho_l) - f(\varrho_r) = \varrho_l(1 - \varrho_l) - \varrho_r(1 - \varrho_r), \quad (36)$$

und daher

$$s = 1 - \varrho_l - \varrho_r.$$

Mit dieser Wahl von s ist durch (35) wirklich eine schwächere Lösung gegeben. Man nennt eine solche Lösung eine *Stoßwelle* und s die durch die *Rankine-Hugoniot-Bedingung* (36) bestimmte *Stoßgeschwindigkeit*. Man beachte, dass die Stoßgeschwindigkeit zwischen den Geschwindigkeiten der Charakteristiken links und rechts von der Stoßwelle liegt:

$$1 - 2\varrho_r < 1 - \varrho_l - \varrho_r < 1 - 2\varrho_l.$$

Für $\varrho_l < \varrho_r$ laufen also die Charakteristiken von beiden Seiten in die Stoßwelle hinein. Wir beobachten allerdings, dass die Stoßwelle auch für $\varrho_l > \varrho_r$ eine schwächere Lösung darstellt. Wenn zum Beispiel $\varrho_l = 1$ und $\varrho_r = 0$ gilt, was der Situation entspricht, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Ampel von rot auf grün geschaltet wird, dann sagt die Stoßwellenlösung voraus, dass gar nichts passiert ($s = 0$). Im Unterschied zum umgekehrten Fall $\varrho_l = 0$ und $\varrho_r = 1$ (Ende einer stehenden Kolonne mit leerer Straße dahinter), ist diese Lösung natürlich unbefriedigend. Offensichtlich hat unser mathematisches Modell Schwierigkeiten damit, zwischen vorderen und hinteren Enden von Kolonnen zu unterscheiden.

Für kleine Werte von L kann man die Anfangsbedingung (34) als Regularisierung der Anfangsdaten eines Riemannproblems sehen. Für den Fall $\varrho_l > \varrho_r$ kann man in der Lösung den Grenzübergang $L \rightarrow 0$ durchführen und erhält

$$\varrho(t, x) = \begin{cases} \varrho_l, & \text{für } x < t(1 - 2\varrho_l), \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{t}\right), & \text{für } t(1 - 2\varrho_l) \leq x \leq t(1 - 2\varrho_r), \\ \varrho_r, & \text{für } x > t(1 - 2\varrho_r). \end{cases}$$

Der Ursprung ist Schnittpunkt von Charakteristiken mit allen Geschwindigkeiten zwischen $f'(\varrho_l) = 1 - 2\varrho_l$ und $f'(\varrho_r) = 1 - 2\varrho_r$. Eine solche Lösung nennt man *Verdünnungswelle*. Sie stellt eine befriedigende Lösung für das Problem der grün werdenden Ampel dar. Aus mathematischer Sicht ist die mangelnde Eindeutigkeit, die wir durch die Konstruktion einer zweiten Lösung neben der Stoßwelle gezeigt haben, natürlich eine Herausforderung, der wir uns aber im Rahmen dieser Vorlesung aus Zeitgründen nicht mehr stellen können.