

Skriptum zur Vorlesung

Mathematik für Molekulare Biologen

Christian Schmeiser¹

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Zahlensysteme, Grundrechnungsarten | 2 |
| 3 | Komplexe Zahlen, Polynome | 5 |
| 4 | Die Polardarstellung, Winkelfunktionen | 9 |
| 5 | Reelle Funktionen, Grenzwerte | 11 |
| 6 | Differentialrechnung, die Exponentialfunktion | 14 |
| 7 | Integration | 15 |
| 8 | Kleinste Fehlerquadrate | 15 |
| 9 | Differentialgleichungen – Reaktionskinetik | 15 |

1 Einleitung

Es ist das Ziel dieser Vorlesung, mit einigen mathematischen Methoden Bekanntschaft zu machen, die bei quantitativen Zugängen zur Molekularbiologie eingesetzt werden. Dazu sind als Vorbereitung einige mathematische Grundlagen notwendig, deren Behandlung den größeren Teil der Vorlesung (bis einschließlich Kapitel 7) in Anspruch nimmt.

Prinzipiell sind keinerlei mathematische Vorkenntnisse notwendig (nicht einmal solche aus der Schule). Allerdings werden HörerInnen, bei denen das wirklich der Fall ist, das Tempo wahrscheinlich als sehr hoch empfinden.

¹Institut für Mathematik, Universität Wien, Nordbergstraße 15, 1090 Wien, Austria.
christian.schmeiser@univie.ac.at

Die Standardschreibweise der Mengentheorie wird verwendet wie *das aufzählende Verfahren* zur Angabe von Mengen, z.B.

$$A = \{\text{mein Schlüsselbund, meine Geldbörse, mein Handy, mein Laptop}\},$$

sowie das *beschreibende Verfahren*, z.B.

$$B = \{x : x \text{ ist in meinem Rucksack}\}.$$

Die Aussage *x gehört zur Menge A* bzw. *x ist Element der Menge A* schreibt man als $x \in A$, ihre Verneinung als $x \notin A$. Die *leere Menge* $\{\}$ ist die Menge ohne Elemente. *Teilmengen*:

$$A \subset B$$

gilt genau dann, wenn jedes Element von *A* auch Element von *B* ist. *Vereinigungs- und Durchschnittsmengen*:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\},$$

wobei das *oder* in der Definition der Vereinigungsmenge ein inklusives *oder* ist. *Differenzmenge*:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

2 Zahlensysteme, Grundrechnungsarten

Die Menge der *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

ist *abgeschlossen* bezüglich der *Addition*, d.h. die Summe zweier beliebiger natürlicher Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl. Für die Umkehroperation zur Addition, die *Subtraktion*, gilt das nicht: $3 - 5$ ist keine natürliche Zahl. Um diesem Ausdruck Sinn zu geben, erweitert man auf die Menge der *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

die auch bezüglich der Subtraktion abgeschlossen ist.

Die Menge der natürlichen Zahlen ist auch bezüglich der *Multiplikation* abgeschlossen. Diese lässt sich auch auf die ganzen Zahlen erweitern (und zwar so, dass die wichtigsten Rechenregeln gültig bleiben). Wieder besteht das Problem, dass die Umkehroperation zur Multiplikation, die *Division* p/q

nicht für beliebige $p, q \in \mathbb{Z}$ wieder eine ganze Zahl ergibt. Als Konsequenz führt eine weitere Erweiterung auf die Menge der *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}.$$

Man beachte, dass damit die Abgeschlossenheit nur fast vollständig hergestellt ist: Division durch Null ist auch in \mathbb{Q} nicht erlaubt. Die rationalen Zahlen sind den Menschen schon seit langer Zeit bekannt, so bildeten sie z.B. das Zahlensystem der Pythagoräer.

So wie man durch fortgesetztes Addieren mit demselben Summanden auf das Multiplizieren kommen kann, führt das fortgesetzte Multiplizieren mit demselben Faktor auf das *Potenzieren*:

$$x^n = xx^{n-1} \quad \text{für } n \geq 2, \quad x^1 = x.$$

Bemerkung 1 *Das ist eine sogenannte **rekursive Definition**. Man beachte, dass auf diese Art x^n für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Der Grund ist das, was die natürlichen Zahlen im Kern ausmacht: Sie beginnen bei 1 und man erreicht jede von ihnen, indem man bei 1 zu Zählen beginnt.*

Hat man das Potenzieren definiert, ist man natürlich wieder an der Umkehroperation, dem *Wurzelziehen* interessiert. Als Beispiel betrachten wir die *Quadratwurzel*: Die Tatsachen, dass $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$ gilt, schreibt man auch als $1 = \sqrt{1}$ und $2 = \sqrt{4}$. Da 2 zwischen 1 und 4 liegt, erwarten wir, dass $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegt. Mithilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes (graphischer Beweis) können wir sogar ein geometrisches Konstruktionsverfahren für eine Strecke mit der Länge $\sqrt{2}$ (z.B. cm) angeben: Es ist die Länge der Diagonale eines Quadrates mit der Kantenlänge 1. Nach der Logik der pythagoräischen Mathematik muss es also eine rationale Zahl

$$p/q = \sqrt{2}$$

geben. Um $p, q \in \mathbb{N}$ eindeutig festzulegen, nehmen wir an, dass die Darstellung gekürzt ist, d.h. dass p und q keine gemeinsamen Teiler haben. Aus der obigen Gleichung folgt (durch Quadrieren und Multiplizieren mit q^2)

$$p^2 = 2q^2.$$

Daraus folgt aber, dass p^2 eine gerade Zahl ist, was weiter impliziert, dass p eine gerade Zahl ist. Wir können p daher darstellen als $p = 2r$ mit $r \in \mathbb{N}$. Setzen wir das in die obige Gleichung ein und dividieren diese durch 2, so ergibt sich

$$2r^2 = q^2.$$

Daraus folgt aber analog zu oben, dass q^2 und daher auch q eine gerade Zahl ist. Dass p und q beides gerade Zahlen sind, widerspricht aber unserer Annahme, dass die Darstellung p/q gekürzt ist. Dieses Argument zeigt, dass es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat 2 ist.

Diese katastrophale Erkenntnis des Mitglieds *Hippasus* der Pythagoräer wird das *Dilemma der griechischen Mathematik* genannt. Geometrisch gesehen zeigt es, dass das Einzeichnen aller Punkte, die den rationalen Zahlen entsprechen, auf einer Zahlengeraden Lücken hinterlässt. Heute bezeichnen wir diese Lücken als *irrationale Zahlen*, die wir zusätzlich in unser Zahlensystem aufnehmen, wodurch die Menge \mathbb{R} der *reellen Zahlen* entsteht.

Eine wesentliche Aussage über irrationale Zahlen ist, dass jede irrationale Zahl beliebig gut durch rationale Zahlen approximiert werden kann. Genauer heißt das, dass man eine beliebige irrationale Zahl und einen beliebig kleinen Fehler vorgeben kann, und dann immer eine rationale Zahl findet, deren Abstand zu der gegebenen irrationalen Zahl kleiner als der vorgegebene Fehler ist. Am Beispiel der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ werden wir dieses Resultat demonstrieren. Wir wissen schon, dass

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

gilt, d.h. beide rationalen Zahlen 1 und 2 haben höchstens den Abstand 1 von $\sqrt{2}$. Wir werden das sogenannte *Bisektionsverfahren* oder Halbierungsverfahren verwenden, um genauere Approximationen zu finden. In der Mitte zwischen 1 und 2 liegt $3/2$, und es gilt $(3/2)^2 = 9/4 > 8/4 = 2$. Daraus folgern wir

$$\frac{2}{2} < \sqrt{2} < \frac{3}{2},$$

woraus folgt, dass wir $\sqrt{2}$ schon bis auf einen Fehler $1/2$ approximiert haben. In der Mitte zwischen $2/2$ und $3/2$ liegt $(2/2 + 3/2)/2 = 5/4$, und es gilt $(5/4)^2 = 25/16 < 32/16 = 2$ und daher

$$\frac{5}{4} < \sqrt{2} < \frac{6}{4}.$$

Einen Schritt machen wir noch: $(5/4 + 6/4)/2 = 11/8$, $(11/8)^2 = 121/64 < 128/64 = 2$, woraus folgt

$$\frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{12}{8}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass sowohl $11/8$ als auch $12/8 = 3/2$ höchstens den Abstand $1/8$ von $\sqrt{2}$ haben. Da der Abstand in jedem Schritt halbiert wird, kann er beliebig klein gemacht werden.

Die wichtigsten Teilmengen von \mathbb{R} sind *Intervalle*, die an ihren Enden *offen* oder *abgeschlossen* sein können:

$$\begin{aligned} (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, & [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, & (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}. \end{aligned}$$

Intervalle können auch *unbeschränkt* sein:

$$\begin{aligned} (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, & [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\ (-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, & (-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}. \end{aligned}$$

3 Komplexe Zahlen, Polynome

Leider haben wir mit der Einführung der reellen Zahlen das Problem des Quadratwurzelziehens noch nicht vollständig gelöst, weil das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ sein kann. Es gibt daher keine reelle Zahl x , für die $x^2 = -1$ gilt. Um diesem Problem Herr zu werden, ist eine kühne (aber simple) Idee notwendig: Man postuliert einfach, dass es eine solche Zahl gibt und gibt ihr einen Namen. Der Name i bezeichnet ab nun eine Zahl, für die

$$i^2 = -1 \tag{1}$$

gilt. Diese Zahl wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet. Damit diese Erweiterung des Zahlenraumes in unserem Sinne brauchbar wird, ist aber die Abgeschlossenheit bezüglich aller Grundrechnungsarten notwendig. Es müssen also auch Ausdrücke wie $1 + i$ oder $5i$ definiert sein. Das führt auf die Definition der Menge der *komplexen Zahlen*

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ bezeichnen wir die beiden reellen Zahlen $\operatorname{Re}(z) = a$ und $\operatorname{Im}(z) = b$ als *Realteil* und *Imaginärteil*. Jede reelle Zahl z kann auch komplexe Zahl mit $\operatorname{Im}(z) = 0$ angesehen werden. Die Menge aller *rein imaginären* Zahlen mit $\operatorname{Re}(z) = 0$ liefert Quadratwurzeln für alle negativen reellen Zahlen. Sei nämlich $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$. Dann existiert $\sqrt{-x} \in \mathbb{R}$ und für die rein imaginäre Zahl $z = i\sqrt{-x}$ gilt

$$z^2 = \left(i\sqrt{-x}\right)^2 = i^2 \left(\sqrt{-x}\right)^2 = (-1) \cdot (-x) = x.$$

Wie oben erwähnt, können die reellen Zahlen als Punkte auf einer Zahlengeraden geometrisch interpretiert werden. Ähnlich gibt es für die komplexen

Zahlen eine geometrische Interpretation als Punkte in einer Ebene, die in diesem Zusammenhang als *Gaußsche Zahlenebene* bezeichnet wird. Dabei verwendet man ein kartesisches (d.h. rechtwinkeliges) Koordinatensystem und identifiziert die komplexe Zahl $z = a + ib$ mit dem Punkt mit den Koordinaten (a, b) . Die a -Achse wird als *reelle Achse* und die b -Achse als *imaginäre Achse* bezeichnet. Die reelle Achse repräsentiert die Menge der reellen Zahlen als Teilmenge von \mathbb{C} und die imaginäre Achse die Menge der rein imaginären Zahlen.

Als Erweiterung für den Begriff des Betrages einer reellen Zahl definieren wir den Betrag einer komplexen Zahl geometrisch als ihren Abstand vom Ursprung in der Gaußschen Zahlenebene, den wir mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes aus Realteil und Imaginärteil berechnen können:

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Beim Rechnen praktisch ist oft die *konjugiert komplexe Zahl* \bar{z} zu einer komplexen Zahl $z = a + ib$, die geometrisch durch Spiegelung an der reellen Achse definiert wird:

$$\bar{z} := a - ib.$$

Als Beispiel für ihre Verwendung sei die Identität $|z|^2 = z\bar{z}$ angeführt.

Wie erhofft, ist die Menge der komplexen Zahlen abgeschlossen bezüglich der Grundrechnungsarten (abgesehen von der Division durch Null, die in den reellen Zahlen auch schon verboten war), wobei diese erst zu definieren sind. Dazu sind aber nur die üblichen Rechengesetze und die Beziehung (1) notwendig:

$$\textbf{Addition:} \quad (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

d.h. bei der Addition zweier komplexer Zahlen sind einfach die Realteile und die Imaginärteile zu addieren. Analog:

$$\textbf{Subtraktion:} \quad (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d).$$

Etwas komplizierter wird es bei der

$$\textbf{Multiplikation:} \quad (a+ib)(c+id) = ac+i^2bd+ibc+iad = (ac-bd)+i(ad+bc),$$

und noch etwas komplizierter bei der **Division**, bei der wir mit der konjugiert Komplexen des Nenners erweitern, um diesen reell zu machen:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Das funktioniert natürlich nur, wenn zumindest eine der beiden reellen Zahlen c und d verschieden von Null ist, d.h. $c + id \neq 0$.

Offensichtlich sind i und $-i$ zwei verschiedene Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 1 = 0$. Für allgemeinere quadratische Gleichungen der Form

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{2}$$

mit reellen Koeffizienten $a \neq 0, b, c$ verwendet man zunächst *quadratische Ergänzung*:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z \right) + c = a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Die Gleichung (2) kann daher in der Form

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

geschrieben werden. Wurzelziehen liefert die Lösungsformel

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

und daher zwei reelle Lösungen, wenn $b^2 - 4ac > 0$ gilt. Lassen wir auch komplexe Lösungen zu, dann gibt es auch im Fall $b^2 - 4ac < 0$ zwei Lösungen, nämlich

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Man rechnet leicht nach, dass sich in beiden Fällen die linke Seite der Gleichung (2) faktorisieren lässt als

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Das gilt auch im Grenzfall $b^2 - 4ac = 0$ mit $z_1 = z_2 = -b/(2a)$. In diesem Fall nennt man $-b/(2a)$ eine *doppelte Lösung*. Wenn man diese auch doppelt zählt, ergibt sich das Resultat, dass eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten immer 2 komplexe Lösungen hat. Das lässt sich in zwei Richtungen verallgemeinern: Auf Gleichungen mit komplexen Koeffizienten und auf Gleichungen höherer Ordnung.

Dazu definieren wir zunächst den Begriff des Polynoms: Ein *Polynom n -ten Grades mit komplexen Koeffizienten* ist ein Ausdruck der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Eine Lösung z der Gleichung $p(z) = 0$ nennt man eine *Nullstelle* des Polynoms. Das wesentliche Grundresultat (das nicht so leicht zu beweisen ist) ist

Satz 1 *Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten und mindestens ersten Grades besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Für das Weitere benötigen wir die (leicht nachzurechnende) Identität

$$z^k - z_1^k = (z - z_1)(z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \cdots + z z_1^{k-2} + z_1^{k-1})$$

Sei nun z_1 eine Nullstelle des Polynoms p , d.h. $p(z_1) = 0$. Dann gilt wegen der obigen Gleichung

$$p(z) = p(z) - p(z_1) = \sum_{k=0}^n a_k (z^k - z_1^k) = (z - z_1)q(z),$$

wobei q ein Polynom $(n - 1)$ -sten Grades ist. Diese Rechnung und Satz 1 ermöglichen für jedes Polynom p mit Grad $n \geq 1$ die folgende Vorgangsweise: Der Satz 1 garantiert, dass p eine Nullstelle $z_1 \in \mathbb{C}$ besitzt. Dasselbe gilt für $q(z) = p(z)/(z - z_1)$, wenn $n \geq 2$ gilt. Nach n Schritten ist ein Polynom mit Grad Null, d.h. eine Konstante, und zwar a_n , übrig. Diese Ergebnisse kann man zusammenfassen im *Fundamentalsatz der Algebra*:

Satz 2 *Jedes Polynom n -ten Grades mit komplexen Koeffizienten besitzt n Nullstellen z_1, \dots, z_n (Mehrfachnennungen möglich) und kann in der Form*

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

geschrieben werden.

Bei Polynomen zweiten Grades mit reellen Koeffizienten haben wir gesehen, dass im Fall komplexer Nullstellen diese als konjugiert komplexes Paar auftreten. Auch diese Eigenschaft kann verallgemeinert werden.

Satz 3 *Polynome mit reellen Koeffizienten haben eine gerade Anzahl komplexer (genauer: nicht reeller) Nullstellen, die nur als konjugiert komplexe Paare auftreten.*

4 Die Polardarstellung, Winkelfunktionen

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, manche Rechnungen mit komplexen Zahlen zu erleichtern. Zunächst stellen wir fest, dass ein Punkt in der Gaußschen Zahlenebene auch beschrieben werden kann, indem man einerseits den Abstand r des Punktes vom Ursprung und andererseits den Winkel φ zwischen der reellen Achse und der Geraden durch den Punkt und den Ursprung angibt. Man nennt das die *Polardarstellung einer komplexen Zahl* und das Paar (r, φ) die *Polarkoordinaten*. Dabei verwenden wir als Maß für den Winkel die Bogenlänge auf dem Einheitskreis. Um einen Zusammenhang zu der Darstellung mit Real- und Imaginärteil herzustellen, brauchen wir *Winkelfunktionen*: Für Punkte mit Abstand $r = 1$ vom Ursprung (d.h. Punkte auf dem *Einheitskreis*) und mit Winkel φ nennt man den Realteil den *Cosinus* von φ bzw. $\cos \varphi$, und den Imaginärteil den *Sinus* von φ bzw. $\sin \varphi$. Aus dem Pythagoräischen Lehrsatz folgt daher

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1. \quad (3)$$

Weitere Eigenschaften von Sinus und Cosinus, die sich aus der Definition ergeben: Sinus ist *ungerade* und Cosinus *gerade*:

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi, \quad \cos(-\varphi) = \cos \varphi.$$

Sinus und Cosinus sind *periodisch mit Periode 2π* (Umfang des Einheitskreises):

$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin \varphi, \quad \cos(\varphi + 2\pi) = \cos \varphi.$$

Sinus und Cosinus gehen auseinander durch Verschiebung hervor:

$$\sin(\varphi + \pi/2) = \cos \varphi.$$

Spezielle Werte:

| φ | $\sin \varphi$ | $\cos \varphi$ |
|-----------|----------------|----------------|
| 0 | 0 | 1 |
| $\pi/4$ | $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ |
| $\pi/2$ | 1 | 0 |
| $3\pi/4$ | $1/\sqrt{2}$ | $-1/\sqrt{2}$ |
| π | 0 | -1 |

Für die Zahl z mit den Polarkoordinaten (r, φ) gilt

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Re}(z) = r \cos \varphi, \quad \operatorname{Im}(z) = r \sin \varphi.$$

Kann man umgekehrt auch die Polarkoordinaten aus Real- und Imaginärteil berechnen? Sei $z = a + bi$. Dann gilt

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} =: \tan \varphi,$$

wobei die rechte Seite der *Tangens* von φ ist. Bei der Verwendung der zweiten Gleichung ist allerdings Vorsicht geboten. Sie definiert den korrekten Winkel nicht eindeutig. Für die beiden Zahlen $z = a + bi$ und $-z = -a - bi$ ergibt sich derselbe Wert für $\tan \varphi$. Die auf den meisten Taschenrechnern vorhandene Funktion *Arcustangens* liefert für $\arctan(b/a)$ immer Werte zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$, d.h. im 1. oder 4. Quadranten. Liegt z im 2. ($a < 0$, $b > 0$) oder 3. ($a, b < 0$) Quadranten, dann ist der korrekte Winkel gegeben durch

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + \pi.$$

Beispiel: $z = -1 + i$ im 2. Quadranten, $a = -1$, $b = 1$. Es gilt $r = \sqrt{2}$, $\tan \varphi = -1$ und daher

$$\varphi = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

Wichtige Rechenregeln für die Winkelfunktionen sind die *Summensätze*:

Satz 4

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi, \quad (4)$$

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi. \quad (5)$$

Wir bringen einen Beweis für den Cosinus-Sommensatz: Auf dem Einheitskreis betrachten wir die Punkte $A = (1, 0)$, $B = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $C = (\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi))$ und $D = (\cos \psi, -\sin \psi)$. Dann gilt $\overline{AC} = \overline{BD}$, was gleichbedeutend ist mit

$$(\cos(\varphi + \psi) - 1)^2 + \sin^2(\varphi + \psi) = (\cos \varphi - \cos \psi)^2 + (\sin \varphi + \sin \psi)^2.$$

Ausmultiplizieren der Quadrate und Verwendung der Rechenregel (3) ergibt (5).

Verwendet man die Summensätze, dann zeigt sich, dass die Polardarstellung die Multiplikation komplexer Zahlen einfach macht: Für $z_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z_2 = \varrho(\cos \psi + i \sin \psi)$ gilt

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r\varrho(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + i(\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi)) \\ &= r\varrho(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)). \end{aligned}$$

Um 2 komplexe Zahlen zu multiplizieren, muss man also die Beträge multiplizieren und die Winkel addieren. Als Konsequenz ergibt sich für Potenzen von $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Als Abschluss dieses Kapitels berechnen wir die Nullstellen spezieller Polynome der Form $p(z) = z^n - w$, wobei $w \neq 0$ eine beliebige gegebene komplexe Zahl ist. Die Nullstellen nennen wir die *n-ten Wurzeln* von w . Wenn z bzw. w die Polarkoordinaten (r, φ) bzw. (ϱ, ψ) besitzen, dann muss also

$$r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = \varrho(\cos \psi + i \sin \psi)$$

gelten. Offensichtlich lässt sich diese Gleichung durch die Wahl $r = \sqrt[n]{\varrho}$ und $\varphi = \psi/n$ erfüllen. Der Fundamentalsatz der Algebra sagt allerdings die Existenz von n *n-ten Wurzeln* voraus. Weitere Wurzeln kann man finden, indem man sich die Periodizität der Winkelfunktionen zunutze macht. Da

$$r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = r^n(\cos(n\varphi + 2k\pi) + i \sin(n\varphi + 2k\pi)), \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z},$$

gilt, ergibt jede Wahl

$$r = \sqrt[n]{\varrho}, \quad \varphi_k = \frac{\psi + 2k\pi}{n}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ eine *n-te Wurzel* von w . Unter den entsprechenden komplexen Zahlen gibt es allerdings nur n verschiedene, nämlich

$$z_k = \sqrt[n]{\varrho} \left(\cos \left(\frac{\psi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\psi + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Diese bilden ein dem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{\varrho}$ eingeschriebenes regelmäßiges n -Eck.

5 Reelle Funktionen, Grenzwerte

Eine *Funktion* $f : A \rightarrow B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element x der *Definitionsmenge* A eindeutig ein Element y der *Wertemenge* B zuordnet. Man verwendet die Schreibweise $y = f(x)$. Für *reelle Funktionen* gilt $A, B \subset \mathbb{R}$. Zumeist geht man von der Abbildungsvorschrift aus, also z.B. $f(x) = x^2$. In diesem Fall kann man $A = \mathbb{R}$, $B = [0, \infty)$ wählen, wobei die *maximale Definitionsmenge* und dann die *minimale Wertemenge* gewählt wurde.

Beispiele:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = B = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
2. $f(x) = \tan x$, $A = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \mathbb{R}$.

Der *Graph* einer reellen Funktion $f : A \rightarrow B$ ist die Menge

$$\{(x, y) : x \in A, y = f(x)\},$$

d.h. eine Menge von Punkten in der (x, y) -Ebene, für die der y -Wert jeweils das Bild des entsprechenden x -Wertes ist. Eine Skizze des Graphen ist zumeist eine gute Illustration der wesentlichen Eigenschaften einer Funktion.

Beispiele für Funktionseigenschaften:

- Eine Funktion f heißt (*streng*) *monoton wachsend*, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt, dass $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$) gilt. Sie heißt (*streng*) *monoton fallend*, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt, dass $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) gilt.
- Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt *beschränkt*, wenn die (minimale Werte) Menge $\{y = f(x) : x \in A\}$ beschränkt ist.
- Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt *gerade* (bzw. *ungerade*), wenn für jedes $x \in A$ auch $-x \in A$ und $f(x) = f(-x)$ (bzw. $f(x) = -f(-x)$) gilt.
- Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow B$ heißt *periodisch mit Periode* $p > 0$, wenn $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wenn ich um 10 Uhr in Wien abfahre und um 13 Uhr im 300 km entfernten Salzburg ankomme, dann sagt man, dass meine Durchschnittsgeschwindigkeit auf dieser Fahrt $\frac{300\text{km}}{3\text{h}} = 100$ km/h beträgt. Genauere Informationen über den Fortgang meiner Fahrt könnte man dadurch angeben, dass man Durchschnittsgeschwindigkeiten für Teilzeiten berechnet. Bezeichnen wir mit $s(t)$ die Strecke (in km), die ich nach der Zeit t (in Stunden) zurückgelegt habe (mit den Eigenschaften $s(0) = 0$ und $s(3) = 300$), dann ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit im Zeitraum von t bis $t + h$ die Formel

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}. \tag{6}$$

Unser Ziel ist es, zum Begriff der *Momentangeschwindigkeit* zum Zeitpunkt t zu gelangen, indem wir die Länge des Zeitraumes h immer kleiner wählen. Bevor wir dieses Ziel im nächsten Abschnitt realisieren, stellen wir als Vorbereitung zunächst einige mathematische Werkzeuge bereit.

Der wichtigste Begriff in diesem Zusammenhang ist der des Grenzwertes: Wir sagen, dass f_0 der *Grenzwert* (bzw. *Limes*) der Funktion $f(x)$ für x gegen x_0 ist, als Formel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f_0,$$

wenn die Werte $f(x)$ beliebig nahe bei f_0 sind für alle x , die genügend nahe bei x_0 sind. Genauer gesagt bedeutet das, dass ich bei folgendem Spiel immer gewinne: Zuerst gibt mein Gegenspieler einen (beliebig kleinen) Abstand ε von f_0 vor. Dann gewinne ich das Spiel, wenn ich einen (genügend kleinen) Abstand δ von x_0 angeben kann, sodass für alle x , die höchstens den Abstand δ zu x_0 haben, die Werte $f(x)$ höchstens den Abstand ε von f_0 haben. Noch genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f_0| \leq \varepsilon$ für alle x mit $|x - x_0| \leq \delta$.

Wenn die Konvergenz gilt und außerdem $x_0 \in A$, dann liegt es nahe, f_0 mit $f(x_0)$ zu vergleichen. Man nennt die Funktion f *stetig and der Stelle* x_0 , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Zur Berechnung von Grenzwerten gibt es einige nützliche Rechenregeln. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g_0,$$

dann gilt auch

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) &= \alpha f_0, & \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) &= f_0 \pm g_0, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) &= f_0 g_0, & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f_0}{g_0}, \end{aligned}$$

wobei man für die Gültigkeit der letzten Regel natürlich die zusätzliche Annahme $g_0 \neq 0$ braucht. Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2}{x + 5} = \frac{3^2 - 2}{3 + 5} = \frac{7}{8}.$$

Man kann in der Definition des Grenzwertes x_0 und/oder f_0 durch ∞ (bzw. $-\infty$) ersetzen, indem man *beliebig (genügend) nahe bei ∞* durch *beliebig (genügend) groß* ersetzt. Als Beispiel: Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f_0,$$

wenn es für alle (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ ein (genügend großes) $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|f(x) - f_0| \leq \varepsilon$ für alle $x \geq M$. Die obigen Rechenregeln gelten dann auch, wobei man für $\alpha > 0$ folgende Regeln verwendet:

$$\alpha \pm \infty = \pm \infty, \quad \alpha \infty = \infty, \quad \frac{\alpha}{\infty} = 0, \quad \frac{\alpha}{0} = \infty, \quad \infty + \infty = \infty.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ 2) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 - x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/x + 3/x^2}{2 - 1/x + 5/x^2} = \frac{1}{2}, \\ 3) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1/x^2}{1 + 1/x} = \infty. \end{aligned}$$

Schwierigkeiten entstehen, wenn die Anwendung der Rechenregeln auf *unbestimmte Ausdrücke* führt wie z.B.

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \infty, \quad \infty - \infty,$$

denen kein sinnvoller Wert zugewiesen werden kann, weil verschiedene Beispiele verschiedene Grenzwerte erzeugen. Eine Möglichkeit, mit unbestimmten Ausdrücken umzugehen, wurde in den obigen Beispielen 2) und 3) verwendet, die auch zeigen, dass ∞/∞ keinen eindeutigen Wert haben kann. Noch ein Beispiel für den Umgang mit unbestimmten Ausdrücken:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x^2 - 2)(x^2 + 2)}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x^2 + 2) = 4.$$

6 Differentialrechnung, die Exponentialfunktion

Um zu unserer Motivation zurückzukehren: Unser Ziel ist es, in (6) den Limes für $h \rightarrow 0$ zu berechnen. Leider führt auch das, wenn s an der Stelle t stetig ist, auf einen unbestimmten Ausdruck, nämlich $0/0$.

Momentangeschwindigkeit \Rightarrow Ableitung

$x^n, x^{-n}, \sqrt{x}, x^\alpha$, Winkelfunktionen,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \text{Proof: } \sin h < h < \tan h \quad (\text{geometrisch})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0, \quad \text{Proof: } 0 \leq 1 - \cos h \leq \sin^2 h$$

Ableitungsregeln (Grundrechnungsarten)
 de l'Hopital
 Kettenregel, $x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$, Ableitung der Umkehrfunktion, $\arctan x$
 Exponentialfunktion: a^x , Eulersche Zahl, Logarithmus, $e^{i\varphi}$
 Höhere Ableitungen
 Kurvendiskussion (Bsp.: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$)
 MWS der Differentialrechnung, $f' = 0 \Rightarrow f = \text{const}$

7 Integration

Riemannintegral, HS der Diff-Int

Stammfunktion, Eindeutigkeit, unbestimmtes Integral

Stammfunktionen elementarer Funktionen: x^a , $\sin x$, $\cos x$, e^x

Partielle Integration (Bsp.: xe^x , $x \ln x$, $e^x \sin x$),

Substitution 1: $\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c$

(Motivation: $\sin(2x)$, Bsp.: $x \cos(x^2)$, $\sin x \cos x$ (3 Arten))

Substitution 2: g invertierbar

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = g(y) \\ dx = g'(y)dy \end{array} \right| = \int f(g(y))g'(y)dy$$

Bsp.: Noch einmal $\sin x \cos x$, $1/x$ für $x < 0$,

$(e^x - 1)^{-1} \Rightarrow 1/(y(y+1))$ Partialbruchzerlegung

Bestimmte Integrale: Bsp.:

$$\int_0^\pi \sin x dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin x dx, \quad \int_0^3 (3-x)^2 dx$$

Partielle Integration, Vertauschung von Integrationsgrenzen,

Aufteilung des Integrationsintervalles, Bsp.: $\int_{-2}^1 |x|dx$

Uneigentliche Integrale, Bsp.:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^3}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$$

8 Kleinste Fehlerquadrate

Bestimmung einer exponentiellen Zerfallsrate aus Experimenten

Ausgleichsgerade

9 Differentialgleichungen – Reaktionskinetik