Aspekte der Mathematik

Joachim Mahnkopf

Universität Wien

WS 2016

Ausgangspunkte der Vorlesung

1. MathematiklehrerInnen vermitteln uber ihren Fachunterricht hinaus ihren Schulern ein allgemeines Bild der Mathematik, ihrer **Wesens** und ihrer **Bedeutung**. Sie werden dadurch zu Reprasentanten der Mathematik in der Gesellschaft.
2. Dies stellt eine **Chance fur die Mathematik** dar ihre Wahrnehmung sowohl als eigenstandige hochaktive Wissenschaft als auch als auch als ein zentrales Hilfsmittel in anderen Wissenschaften zu erhohen
3. Andererseits: Wegen der **schnellen Weiterentwicklung** der Mathematik und wegen der **weiten Anwendungen** der Mathematik ist es nicht moglich den zukunftigen Lehrern ein fertiges Bild der Mathematik mitzugeben.

Ziel der Vorlesung

- Den zukunftigen Lehrern diese Probleme bewusst zu machen
- Ihnen Grundlagen/Grundkonflikte/Grundmotive der Mathematik und ihrer Entwicklung zu vermitteln so dass sie in der Lage sind ein **eigenes Bild der Mathematik** zu erwerben.
- Dabei etwas von der Faszination der Mathematik mitteilen.

Gliederung der Vorlesung

- Einheiten 1-3: Mathematik als eigenstandige Wissenschaft.
- Einheiten 4-6: Geschichte der Mathematik
- Einheiten 7-9: Fachdidaktik der Mathematik
- Einheiten 10-12: Anwendungen der Mathematik

Gliederung der Einheiten 1 - 3

1. Theoretische/Philosophische Aspekte der Mathematik:
   1. Die Axiomatische Methode zur Beschreibung der Mathematik
   2. Philosophie der Mathematik
2. Praxis der Mathematik:
   1. Uberblick uber die Mathematik: Aufbau der Mathematik, Forschung, Anwendungen, Lehre

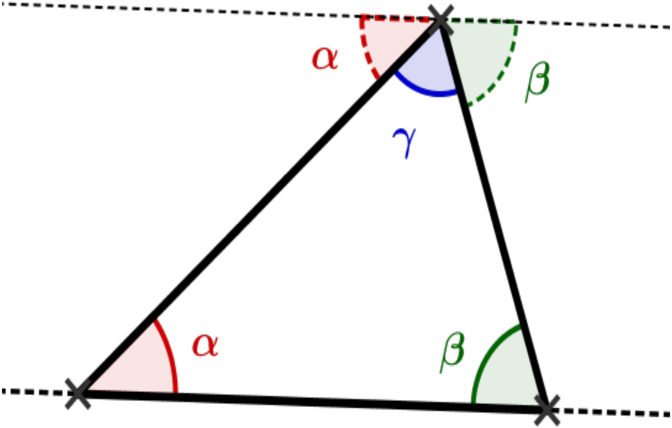
1. Theoretische/Philosophische Aspekte der Mathematik:

   1. Die Axiomatische Methode zur Beschreibung d. Mathematik

Eine einfache Geometrische Aussage

- Die Winkelsumme in einem Dreieck betragt 180 Grad.

Winkelsumme im Dreieck



Frage:

- Woher weiss ich dass es genau eine Parallele gibt ?
- Gabe es eine zweite Parallele dann konnten sich Winkel zu einem weiteren Wert $\neq 180^\circ$ addieren (?)
- Was ist eigentlich eine Gerade ?

Anschaulich ist dies klar ! Aber: "reicht" **Anschauung/Intuition** ?

- **Frage.** Was ist eine Gerade ?
- **Antwort.** Ein Gerade ist aus Punkten zusammengesetzt
- **Frage.** Was ist ein Punkt ?
- **Antwort.** Ein Punkt ist etwas das keine Ausdehnung hat
- **Frage.** Was ist "etwas" ? Wie setzt sich eine Gerade aus etwas zusammensatzen das keine Ausdehnung hat ?
- ...

Erkenntnis 1: Anschauung fuhrt nicht auf eine Erklarung des Begriffes "Gerade".

Kritik an Anschauung als Beweismethode 2

Satz (Banach-Tarski Paradoxon) Sei $\mathcal{K}$ die volle Einheitskugel im Raum $\mathbb{R}^3$. Dann lasst sich $\mathcal{K}$ derart in 6 Teile zerlegen, dass sich diese Teile nach Drehen und Verschieben im Raum zu zwei vollen Einheitskugeln zusammenfugen.

Erkenntnis 2: Anschaulich klare Begriffe ("Volumen") haben der Anschauung widersprechende Eigenschaften (Paradoxien).

- **Frage.** Was ist eine naturliche Zahl n, z.B. was ist "5 "?
- **Antwort.** Eine Anzahl. D.h. "5" ist die Machtigkeit der Menge $\{A, 3, h, *, \spadesuit\}$
- **Frage.** Was ist eine Menge ?
- **Antwort.** Anschaulich: "Eine Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Dingen zu einem Ganzen"

Kritik an Anschauung als Beweismethode 3

Die Russell Antinomie: Sei A die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, d.h.

$$A = \{B : B \text{ ist Menge mit } B \notin B\}$$

- Ware $A \in A$ dann folgt nach Definition von A dass $A \notin A$
- Ware $A \notin A$ dann folgt nach Definition von A dass $A \in A$

Erkenntnis 3: Anschaulich klarer Begriff ("Menge") fuhrt auf logische Widerspruche

Kritik an Anschauung als Beweismethode

Anschauung/Intuition ist ungenugend/ungeeignet zur Erklarung mathematischer Objekte und Begriffe:

- fuhrt nicht wirklich zu einer Erklarung der Begriffe
- fuhrt auf der Anschauung widersprechende Eigenschaften der Begriffe
- fuhrt auf Widerspruche.

Kritik an Anschauung als Beweismethode

Frage. Wie lassen sich mathematische Begriffe klären ohne die Anschauung zu benutzen ?

Prinzip der Axiomatischen Methode:

- Man lasst die Grundbegriffe/Objekte einer mathematischen Theorie unerklart.
- Stattdessen legt man die grundlegenden Eigenschaften/Regeln fest denen die Grundbegriffe/Objekte genugen sollen.
- Diese Eigenschaften heissen die **Axiome** der Theorie.
- Eine inhaltliche Erklarung der Begriffe an sich ist dann nicht mehr notig.

Prinzip der Axiomatischen Methode:

- Die Axiome werden unter Verwendung der (Sprache der) Logik formuliert
- Eine Aussage in einer durch eine Axiomensystem gegebenen Theorie ist korrekt d.h. ein **Theorem** wenn sie sich mit den Mitteln der Logik aus den Axiomen allein ableiten lasst.
- Die Ableitung der Aussage aus den Axiomen heisst der **Beweis** der Aussage.

Beispiel: Axiomensystem der Ebenen Geometrie

Die mathematische Theorie/das mathematische Begriffssystem "**Ebene Geometrie**" ist durch das folgende Axiomensystem gegeben (**Hilbert** 1899):

- Es gibt 2 Entitaten von Dingen: Punkte $A, B, C, ..$ und Geraden $g, h, k, ...$
- sowie eine Relation "$P \in g$" ("P liegt auf g") zwischen Punkten und Geraden

so dass folgende Eigenschaften=Axiome gelten:

Beispiel: Axiomensystem der Ebenen Geometrie

Ax 1 Zu je zwei Punkten P, Q gibt es eine Gerade g mit $P \in g$, $Q \in g$.

Ax 2 Die Gerade g mit $P \in g$, $Q \in g$ ist eindeutig bestimmt.

Ax 3 Auf einer Geraden liegen stets mindestens 2 Punkte

Ax 4 ...

Ax 5 ...

$\cdots$

Definition. Ein Winkel $< B, A, C$ ist ein Tripel von Punkten B, A, C ("Winkel bei A").

Es existiert eine Relation "$\equiv$" zwischen Winkeln so dass gilt

Ax 8 $< A, B, C \equiv < A, B, C$

Ax 9 ("sws") Sind $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(A', B', C')$ Dreiecke mit

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}, \quad < B, A, C = < B', A', C'$$

dann gilt auch

$$< A, B, C = < A', B', C' \quad \text{und} \quad < A, C, B = < A', C', B'$$

Definition. Sei g Gerade und $P \notin g$. Eine Parallele zu g durch P ist eine Gerade h so dass $P \in h$ aber es existiert kein Punkt Q mit $Q \in g$ und $Q \in h$ ("$g \cap h = \emptyset$")

Definition. Liegen die 3 Punkte A, B, C auf einer Geraden, dann sei $< A, B, C := 180°$

Frage: Was ist nun mit der Existenz von Parallelen ?

Satz. Zu jeder Geraden g und jedem Punkt $A \notin g$ existiert eine Parallele h zu g durch A.

Beweis innerhalb der bisher formulierten Axiome:

Erinnere: Existenz der Parallelen reicht nicht fur Beweis uber Winkelsumme im Dreieck.

Frage. Was ist mit der Eindeutigkeit der Parallelen?

Ax 12 ("Parallelenaxiom") Es gibt hochstens eine Parallele zu g durch P

Beispiel: Axiomensystem der Ebenen Geometrie

Folge:

- Der Beweis uber die Winkelsumme im Dreieck lasst sich nun allein **mit Mitteln der Logik innerhalb des Axiomensystems** durchfuhren
- Alle Schlusse sind rein logisch begrundbar
- Es wird keine Anschauung/anschauliche Begrundung mehr benotigt!

Frage. Lasst sich die Eindeutigkeit der Parallelen nicht auch beweisen ?

Theorem (Hilbert). Keines der Axiome der ebenen Geometrie lasst sich aus den übrigen herleiten.

Folgerung.

Die Eindeutigkeit einer Parallelen zu g durch P lasst sich also **nicht** beweisen

Zum Beweis von Hilbert's Theorem.

Konstruiere eine Theorie, in der alle Axiome gelten bis auf das Parallelenaxiom und in der das Parallelenaxiom verletzt ist:

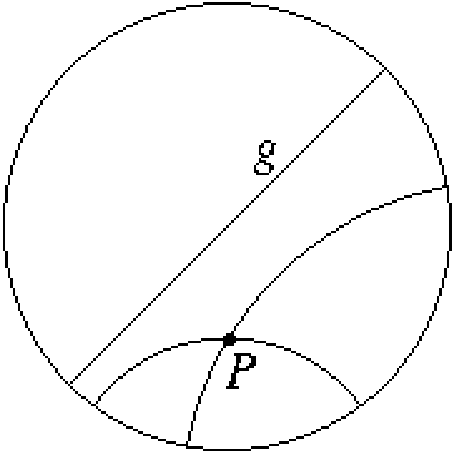
"**Hyperbolische Geometrie**" bzw. "**Hyperbolische Ebene** $\mathbb{H}$"

Hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$.

1. Die Hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$ ist die offene Einheitskreisscheibe, d.h. Punkte in $\mathbb{H}$ sind Punkte im offenen Einheitskreis
2. Geraden sind alle Kreise, die senkrecht auf dem Rand des Einheitskreises stehen sowie alle Geraden durch den Mittelpunkt

Beispiel: Axiomensystem der Ebenen Geometrie

Geraden in der Hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$:



Es gilt: Zu jeder Geraden g und $P \notin g$ existieren unendlich viele Parallele !

Satz:

Die hyperbolische Geometrie erfullt alle Axiome der euklidischen Geometrie mit Ausnahme des Axioms 12 (Eindeutigkeit der Parallelen)

Hyperbolische Geometrie und Anschauung.

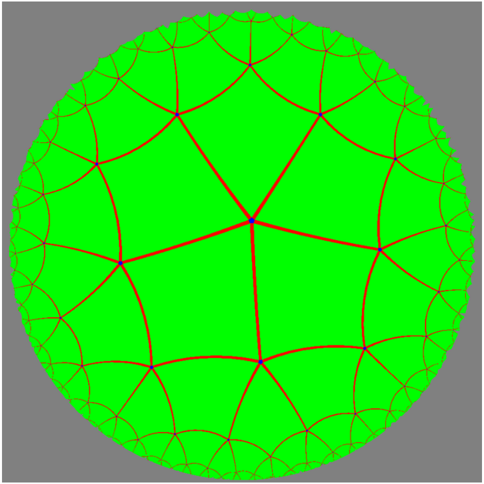
- Geraden sind nicht “gerade” !
- Parallele ist nicht eindeutig
- **Frage:** Was gilt dann fur die Winkelsumme im Dreieck ?

Satz:

Die Winkelsumme in einem hyperbolischen Dreieck ist stets $< 180^\circ$

Beispiel: Axiomensystem der Ebenen Geometrie

Geradengitter in der Hyperbolischen Ebene=Parkettierung der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$ durch Quadrate



Eine andere Parkettierung der hyperbolischen Ebene

- **Frage:** Hat die hyperbolische Geometrie Nutzen/Anwendungen in der Mathematik ?
- **Antwort:** Ja ! (Wir werden spater eine sehr beruhmte Anwendung der Hyperbolischen Ebene von 1994 sehen)

Beispiel: Axiomensystem der Ebenen Geometrie

- Man legt nur die Regeln fest nach denen die Begriffe/Objekte manipuliert werden durfen. Ein einzelner Begriff hat keinen Inhalt mehr.

- **Hilbert:**
  "Man muss statt "Punkt, Gerade, Ebene" jederzeit auch "Tisch, Stuhl, Bierseidel" sagen konnen."

1. Die Wahl eines Axiomensystems

1. benotigt keine Anschauung oder Wirklichkeit
2. negiert die Anschauung/Wirklichkeit aber auch nicht sondern versucht sie wiederzugeben
3. ermoglicht eine rein formale Herleitung von Aussagen

2. Die Wahl eines Axiomensystems

1. ist ein schwieriges Problem
2. das zu **tiefen** und **unvorhersehbaren, neuen** Einsichten in das Wesen mathematischer Begriffe/Objekte fuhrt: Was ist eine Gerade/Paralelle ? Was ist Geometrie ?
3. die wesentlich **uber das hinaus gehen was mit Anschauung moglich ist**: Hyperbolische Geometrie ist nicht anschaulich
4. und ist damit ein **hochst kreativer** und **neue Erkenntnisse gewinnender** mathematischer Prozess: Entdeckung der hyperbolischen Geometrie

2. Anders gesagt: Die Axiomatische Methode

erlaubt durch die Wahl/bzw. Anderung der Axiome oder eine Analyse ihres Zusammenhanges **die logische Struktur der die Wirklichkeit folgt in einer vorher nicht denkbaren Weise zu durchleuchten** (vgl. Problem der Existenz der Parallelen)

Anforderungen an ein Axiomensystem:

- (Widerspruchsfreiheit) Es darf keine Aussage A im Axiomensystem geben, so dass sich sowohl A als auch non$A$ beweisen lassen.
- (Minimalitat) Das Axiome sollten voneinander unabhangig sein, d.h. kein Axiom sollte aus den ubrigen folgen.

Zusammenfassung: Die Axiomatische Methode

- ermoglicht Aussagen rein formal herzuleiten (zu beweisen) d.h. ohne Benutzung der Anschauung
- vermeidet dadurch die Probleme, die bei Benutzung der Anschauung fur Herleitungen enstehen
- fuhrt zu einer tieferen Klarung/Analyse des Wesens mathematischer Begriffe
- gewinnt dabei neue und wesentliche Resultate

Mathematisches Arbeiten erfolgt durch

- Angabe eines Axiomensystems fur die mathematische Theorie, in der man arbeiten will
- jede Aussage wird bewiesen durch konsequentes Herleiten aus den Axiomen mit den Mitteln der Logik und *ohne Verwendung der Anschauung*.

Die Axiomatische Methode: Beispiele

Es gibt Axiomensysteme

- fur die naturlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (Peano)
- fur die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (Hilbert)
- fur die Mengenlehre (Zermelo-Frenkel)
- fur die Wahrscheinlichkeitstheorie (Kolmogorov)
- fur die Lineare Algebra/analytische Geometrie (Begriff des Vektorraumes; Graßmann)
- fur die Ebene Geometrie (Hilbert)
- $\dots$

Die 7 Axiome des Papierfaltens = Origami

1. Given two points p_1 and p_2, there is a unique fold that passes through both of them.
2. Given two points p_1 and p_2, there is a unique fold that places p_1 onto p_2.
3. Given two lines l_1 and l_2, there is a fold that places l_1 onto l_2.
4. Given a point p_1 and a line l_1, there is a unique fold perpendicular to l_1 that passes through point p_1.
5. Given two points p_1 and p_2 and a line l_1, there is a fold that places p_1 onto l_1 and passes through p_2.
6. Given two points p_1 and p_2 and two lines l_1 and l_2, there is a fold that places p_1 onto l_1 and p_2 onto l_2.
7. Given one point p and two lines l_1 and l_2, there is a fold that places p onto l_1 and is perpendicular to l_2.

Beispiel: Die Axiome der Ethik: Beispiele

Axiomatische Ethik nach Spinoza

Erster Teil / Von Gott

Definitionen

1. Unter *Ursache seiner selbst* verstehe ich das, dessen Wesen das Dasein in sich schließt, oder das, dessen Natur nur als daseiend begriffen werden kann.

2. Dasjenige Ding heißt in seiner Art *endlich*, welches durch ein anderes von gleicher Natur begrenzt werden kann. Ein Körper z. B. heißt endlich, weil wir immer einen andern größeren begreifen. So wird ein Gedanke durch einen anderen Gedanken begrenzt; der Körper aber nicht durch einen Gedanken, noch ein Gedanke durch den Körper.

3. Unter *Substanz* verstehe ich das, was in sich ist und aus sich begriffen wird; das heißt das, dessen Begriff nicht eines andern Dinges Begriff bedarf, um daraus gebildet zu werden.

4. Unter *Attribut* verstehe ich das, was der Verstand an der Substanz, als ihr Wesen ausmachend, erkennt.

5. Unter *Daseinsweise* verstehe ich die Affektionen der Substanz, oder das, was in einem andern ist, wodurch man es auch begreift.

6. Unter *Gott* verstehe ich das absolut unendliche Wesen, d. h. die Substanz, die aus unendlichen Attributen besteht, von denen jedes ein ewiges unendliches Wesen ausdrückt.

Erläuterung. Ich sage absolut, nicht aber seiner Art nach unendlich; denn, was nur seiner Art nach unendlich ist, dem können wir unendliche Attribute absprechen; was aber absolut unendlich ist, zu dessen Wesen gehört alles, was Wesen ausdrückt und keine Negation in sich schließt.

7. Dasjenige Ding wird *frei* heißen, das aus der bloßen Notwendigkeit seiner Natur existiert und von sich allein zum Handeln bestimmt wird; *notwendig* aber, oder vielmehr gezwungen, dasjenige, was von einem andern bestimmt wird, auf gewisse und bestimmte Weise zu existieren und zu wirken.

8. Unter *Ewigkeit* verstehe ich das Dasein selbst, sofern es aus der bloßen Definition eines ewigen Dinges, als notwendig folgend, begriffen wird.

Erläuterung. Denn ein solches Dasein wird ebenso, wie das Wesen des Dinges, als ewige Wahrheit begriffen, und kann deshalb nicht durch Dauer oder Zeit erklärt werden, wenn man sich auch die Dauer als ohne Anfang und Ende vorstellt.

Axiome

1. Alles, was ist, ist entweder in sich oder in einem anderen.
2. Das, was nicht durch ein anderes begriffen werden kann, muß durch sich selbst begriffen werden.
3. Aus einer gegebenen bestimmten Ursache erfolgt notwendig eine Wirkung; und umgekehrt, wenn es keine bestimmte Ursache gibt, so kann unmöglich eine Wirkung erfolgen.
4. Die Erkenntnis der Wirkung hängt von der Erkenntnis der Ursache ab und schließt dieselbe in sich.
5. Dinge, die nichts miteinander gemein haben, können auch nicht wechselseitig auseinander erkannt werden, oder der Begriff des einen schließt den Begriff des anderen nicht in sich.
6. Eine wahre Idee muß mit ihrem Gegenstande übereinstimmen.
7. Was als nicht daseiend begriffen werden kann, dessen Wesen schließt das Dasein nicht ein.

Axiomatische Ethik nach Spinoza

Lehrsatz 1. Die Substanz ist von Natur früher als ihre Affektionen.

Beweis. Dieser folgt aus Definition 3 und 5.

Lehrsatz 2. Zwei Substanzen, die verschiedene Attribute haben, haben nichts miteinander gemein.

Beweis. Dieser erhellt ebenfalls aus Definition 3. Denn jede Substanz muß in sich sein und durch sich begriffen werden, oder der Begriff der einen schließt den Begriff der andern nicht in sich.

Lehrsatz 3. Von Dingen, die nichts miteinander gemein haben, kann nicht eines die Ursache des andern sein.

Beweis. Wenn sie nichts miteinander gemein haben, so können sie (nach Ax. 5) nicht wechselseitig auseinander erkannt werden, und darum (nach Ax. 4) kann nicht das eine die Ursache des andern sein. Was zu beweisen war. **Lehrsatz 4.** Zwei oder mehrere verschiedene Dinge unterscheiden sich voneinander entweder nach der Verschiedenheit der Attribute der Substanzen, oder nach der Verschiedenheit der Affektionen derselben.

Beweis. Alles, was ist, ist entweder in sich oder in einem anderen (nach Ax. 1), d. h. (nach Def. 3 und 5) außer dem Verstande gibt es nichts als Substanzen und ihre Affektionen. Es gibt also nichts außer dem Verstande, wodurch mehrere Dinge voneinander unterschieden werden können, als die Substanzen, oder, was dasselbe ist (nach Def. 4), ihre Attribute und ihre Affektionen. W. z. b. w.

Lehrsatz 5. Es kann in der Natur nicht zwei oder mehrere Substanzen von derselben Beschaffenheit oder von demselben Attribute geben.

Beweis. Gäbe es mehrere verschiedene, müßten sie nach Verschiedenheit der Attribute oder nach Verschiedenheit der Affektionen voneinander unterschieden werden (nach dem vor. Lehrsatz). Wenn bloß nach Verschiedenheit der Attribute, wird also zugestanden, daß es dennoch nur *eine* Substanz von demselben Attribute gebe; wenn aber nach Verschiedenheit der Affektionen, so wird, da die Substanz von Natur früher ist als ihre Affektionen (nach Lehrsatz 1), wenn sie also ohne Affektionen und an sich betrachtet, d. h. (nach Def. 3 und 6) richtig betrachtet wird, sie nicht von einer andern unterschieden, begriffen werden können, d. h. (nach dem vor. Lehrsatz) es wird nicht mehrere, sondern nur eine geben können. W. z. b. w.

Lehrsatz 6. Eine Substanz kann nicht von einer anderen Substanz hervorgebracht werden.

Beweis. Es kann in der Natur nicht zwei Substanzen von demselben Attribute geben (nach dem vor. Lehrsatz), d. h. (nach Lehrsatz 2) die etwas miteinander gemein hätten; und deshalb kann (nach Lehrsatz 3) die eine nicht die Ursache der anderen sein, oder eine kann nicht von der anderen hervorgebracht werden. W. z. b. w.

Folgesatz. Hieraus folgt, daß die Substanz nicht von etwas anderem hervorgebracht werden kann. Denn es gibt in der Natur nichts als Substanzen und ihre Affektionen (wie aus Ar. 1 und Def. 3 und 5 erhellt). Nun kann sie nicht von einer Substanz hervorgebracht werden (nach obigem Lehrsatz), also kann eine Substanz überhaupt nicht von etwas anderem hervorgebracht werden. W. z. b. w.

Anderer Beweis. Dies läßt sich noch leichter durch den Widersinn des Gegenteils beweisen; denn, wenn

Das Axiomensystem der "**Mengenlehre**".

Gegeben sei eine Entitat von Dingen A, B, C (genannt die Mengen) und eine Relation "ϵ" auf den Mengen so dass die folgenden Axiome gelten:

Ax 1 $A = B \Leftrightarrow \forall C : C \in A \Leftrightarrow C \in B$

Ax 2 $\exists B : \forall A : A \notin B$ $\quad$ ["$B = \emptyset$"]

Ax 3 $\forall A, B : \exists C : D \in C \Leftrightarrow D = A \vee D = B$ $\quad$ ["$C = \{A, B\}$"]

Ax 4 $\forall A \, \exists B : \forall C : C \in B \Leftrightarrow \exists D : D \in A \wedge C \in D$ $\quad$ ["$B = \bigcup_{D \in A} D$"]

Ax 5 $\exists M : \emptyset \in M$ und $x \in M \Rightarrow x \cup \{x\} \in M$ ["M ist unendliche Menge"]

... ...

Konstruktion mathematischer Begriffssysteme

- Ein mathematischer Begriffssystem (=math. Theorie) muss nicht notwendig durch ein Axiomensystem erklart werden
- Es kann alternativ auch durch ein Modell/eine Realisierung in einem **schon gegebenen** Axiomensystem definiert werden

Beispiel 1:

Die naturlichen Zahlen $\mathbb{N}$ lassen sich innerhalb der Mengenlehre mit Hilfe des Paarmengenaxioms=Ax 3 realisieren als

$$\begin{array}{ccccc} \emptyset & \{\emptyset,\emptyset\}=\{\emptyset\} & \{\emptyset,\{\emptyset\}\} & \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} & \cdots \\ \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

“die n-te Menge ist gebildet aus der $n-1$-te Menge und $\emptyset$”

Beispiel 2:

Die Ebene Geometrie lasst sich in der Mengenlehre realisieren als

- Punkte $= \{(x, y) \in E = \mathbb{R}^2\}$,
  Geraden $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; ax + by + c = 0\}$
- die "ϵ"-Relation ist die "ϵ"-Relation der Mengenlehre.

Universalitat der Mengenlehre

- In der Mengenlehre lassen sich die naturlichen Zahlen und die Ebene Geometrie realisieren
- In der Mengenlehre lassen sich praktisch alle mathematischen Theorien realisieren/modellieren
- Das Axiomensystem der Mengenlehre ist also ein Fundament fur (fast) die gesamte Mathematik.

Nicolas Bourbaki und der Strukturalismus (ab 1940)

- Idee: die gesamte Mathematik lasst sich durch wenige grundlegende Strukturen beschreiben
- Beispiel: Menge, Gruppe, Ring, Korper, topologischer Raum, Vektorraum, Banachraum, ...
- Folge: das Studium der Mathematik ist zuruckgefuhrt auf das Studium dieser Strukturen

Eigenschaften der Strukturen:

- jede dieser Strukturen wir duch ein Axiomensystem definiert
- diese Strukturen sind also abstrakt und ohne Inhalt wie Hilbert's Axiomensysteme
- die Definitionen der Strukturen bauen aufeinander auf und fuhren zu hierarchischer Ordnung d. gesamten Mathematik
- Strukturalismus erganzt/realisiert die Axiomatische Methode fur die (gesamte) Mathematik

Ergebnis:

N. Bourbaki: “Elements des Mathematiques” (1943 -1983) ($\sim$ 40 Bände)

- Beginnt mit den Axiomen der Mengenlehre und entwickelt davon ausgehend in axiomatischer und struktureller Weise die gesamte Mathematik
- Es gibt nur Verweise auf fruhere Bande
- letzter Band 1983

Einfluss von Bourbaki:

- ca. 1960 - 1980 Strukturalismus wurde zur leitenden Idee fur Darstellung u. Lehre der Mathematik
- unterrichtet wurden Strukturen und die in ihrer strengen hierarchischen Abfolge
- auch in der (Grundschul)Padagogik um 1970 !
- Unterricht in der 1. Grundschulklasse begann - wie Bourbaki - mit Mengenlehre !

P. Cartier (1997):

"Das Missverstndnis war, dass viele Leute dachten, dass es auch so gelehrt werden sollte, wie es in den Buchern dargestellt war. Man kann sich die ersten Bucher von Bourbaki als eine Enzyklopadie der Mathematik vorstellen, die die gesamte notige Information enthalt. Das ist eine gute Beschreibung. Wenn man es als Lehrbuch betrachtet, ist es eine Katastrophe."

V. Arnold (sinngemass):

"Bourbaki ist ein Verbrechen an den Studenten"

Wer ist Nicolas Bourbaki ?

- Nicolas Bourbaki war ein franzosisches Autorenkollektiv (1940- ???) das sich immer wieder erneuert hat
- einige der beruhmtesten Mathematiker der 2. Halfte des 20. Jahrhunderts: A. Weil, J.-P. Serre, C. Chevalley, J. Dieudonne, P. Cartier, S. Mandelbrot, A. Grothendieck, A. Connes, ...
- seit 1943 regelmassig 3 Zusammenkunfte im Jahr
- sei 1980 ist Aktivitat zum Erliegen gekommen

Padagogisches Prinzip:

- Man soll in der Lehre die Reihenfolge, in der die Dinge entdeckt wurden, nicht zu sehr (am besten gar nicht) umkehren
- Strukuralismus beginnt mit Mengenlehre, die nach Algebra, Analysis Geometrie, Zahlentheorie, ... entdeckt wurde
- Strukturalismus ist kein padagogisches Prinzip

Theorem (Gödel)

- In einem Axiomensystem "das $\mathbb{N}$ enthalt" gibt es wahre Aussagen, die nicht aus den Axiomen ableitbar sind
- Insbesondere ist die Aussage "Das Axiomensystem ist widerspruchsfrei" nicht aus den Axiomen das Systems ableitbar

$\rightsquigarrow$ **Defekt der axiomatischen Methode:** sie kann nicht alles beweisen was sie formulieren kann !

Kritik der Axiomatischen Methode 1

Wie mit wahren aber nicht ableitbaren Aussagen umgehen ?

- In der praktischen mathematischen Arbeit (Forschung) ausserhalb der Grundlagen d. Mathematik tauchen solche Probleme fast nicht auf
- Tauchen solche Probleme auf so sind sie ein Anlass uber die axiomatische Grundlegung nachzudenken: eine **Anderung der Axiome beseitigt das Problem und eroffnet gleichzeitig neue Ein/Aussichten**; vgl. Parallelenaxiom

Wie mit wahren aber nicht ableitbaren Aussagen umgehen ?

- Was aber ist mit der Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems der Mengenlehre und damit des Fundamentes der gesamten Mathematik: **sie ist nicht beweisbar** !!!!
- Falls die Mathematik widerspruchsfrei ist werden wir es nie erfahren

A. Weil:

- Gott existiert weil die Mathematik widerspruchsfrei ist
- Der Teufel existiert weil wir das nicht beweisen konnen.

Kritik der Axiomatischen Methode 2

Axiome sind rein gedankliche Idealisierungen/Reduzierungen von anschaulichen Objekten. **Aussagen, die in einem System von Axiomen abgeleitet werden haben daher a priori keinen Zusammenhang zur Realität**

- Wo gibt es eine (ideale) Gerade in der Realität ? (unendlich lang, ohne Breite)
- Das Volumen ist mathematisch prazise definiert, aber es gilt das Beispiel Banach-Tarski Paradoxon, das der Realität widerspricht
- Gibt es eine unendliche Entitat wie $\mathbb{N}$ in der Realität ?
- ...

Kritik der Axiomatischen Methode: Vergleich

	Naiv (=anschaulich)	Axiomatisch (=formal)
Bedeutung/Inhalt	?	?
Aussagen ableitbar	?	?
klärt Wesen d. Begriffe	?	?

Kritik der Axiomatischen Methode: Vergleich

	Naiv (=anschaulich)	Axiomatisch (=formal)
Bedeutung/Inhalt	*ja*	*nein*
Aussagen ableitbar	*nein*	*ja*
klärt Wesen d. Begriffe	*nein*	*ja*

Kritik der Axiomatischen Methode: Vergleich

- Konflikt: Anschauung $\leftrightarrow$ Formalisierung
- Anschauung und Formalisierung bedingen und befordern sich gegenseitig:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{Anschauung} & \bullet & & & & \bullet & & & & \bullet \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
\text{Formalisierung} & & & \bullet & & & & \bullet & &
\end{array}
$$

Konflikt Anschauung vs. Axiomatik

N. Bohr:

"Gegensatze widersprechen einander nicht sondern sie erganzen sich"

A. Einstein:

"Sofern sich mathematische Satze auf die Wirklichkeit beziehen sind sie nicht sicher, sofern sie sicher sind beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit."

1. Theoretische/Philosophische Aspekte der Mathematik:

    2. Philosophie der Mathematik

Versucht die existenziellen Grundlagen der Mathematik aus philosophischer Sicht zu klaren:

- Was ist ein mathematisches Objekt ? (z.B. Was ist eine Zahl, eine Gerade ?)
- Was ist die Quelle mathematischer Wahrheiten (z.B. die Wirklicheit ?)
- Inwiefern existieren mathematische Objekte (braucht es eine Wirklichkeit ?)
- Welches ist das Verhaltnis von Mathematik zur Wirklichkeit ?

Verschiedene philosophische Schulen geben verschiedene Antworten:

Philosophie der Mathematik gliedert sich in

- Formalismus
- Platonismus
- Logizismus
- Intuitionismus
- ...

Der Formalismus (D. Hilbert)

- Mathematische Objekte bleiben unerklart, nur die Regeln (Axiome) nach denen die Objekte manipuliert werden, werden festgelegt
- Objekte haben keine Bedeutung/Inhalt sind blosse Zeichen; Ein Bezug der Mathematik zur Realitat ist nicht gegeben
- Existenz mathematischer Objekte in (irgendeiner) Realitat spielt keine Rolle
- Es kann durchaus verschiedene (d.h. nicht gleichwertige !) Axiomensysteme fur eine Theorie geben (vgl. euklid. und hyperbol. Geometrie)

Formen des **Platonismus** nach M. Resnik

- Methodologischer Platonismus
- Ontologischer Platonismus
- Epistemologischer Platonismus

Der **Methodologischer Platonismus:**

- Zur Unterstutzung der eigenen mathematischen Denkarbeit ist sehr hilfreich anzunenehmen/*so zu tun* als ob die mathematischen Objekte tatsachlich existieren wurden; das erleichtert den Umgang mit Mathematik denn wir konnen unseren alltaglichen Denkgewohnheiten folgen.
- Eine Existenz der Objekte in der Realitat wird aber nicht behauptet.

Platonismus

Der **Ontologische Platonismus:**

- Mathematische Objekte existieren in gleicher Weise wie alle anderen Objekte die wir mit unseren Sinnen erfahren (wie auch immer)
- Die Eigenschaften mathematischer Objekte (Axiome) werden von den existierenden Objekten abgelesen.
- Es kann insbesondere nicht verschiedene (d.h. nicht gleichwertige) Axiomensysteme fur eine Theorie geben
- D.h. fur Geraden gilt das Parallelenaxiom oder nicht; beides ist nicht moglich.

Der **Epistemologische Platonismus (K. Godel):**

- Mathematische Objekte existieren unabhangig von Raum und Zeit oder der materiellen Welt, aber wir haben einen einen direkten Zugang zu ihnen durch den wir sie erfahren konnen.
- Die Eigenschaften mathematischer Objekte (Axiome) sind von den existierenden Objekten erfahrbar.
- Es kann insbesondere nicht verschiedene (d.h. nicht gleichwertige) Axiomensysteme fur eine Theorie geben

Der Logizismus (Frege, Russell-Whitehead):

- Mathematischen Begriffe wie "Menge" oder "naturliche Zahl" werden auf **rein logische Begriffe zuruckgefuhrt**, d.h. Mathematik wird **innerhalb der Logik modelliert/realisiert**.
- Menge oder Zahl sind also Begriffe die in der Logik **definierbar** sind; man braucht insbes. kein Axiomensystem mehr fur diese Begriffe
- Insbesondere lassen sich Mathematische Aussagen dann **mittels den Axiomen der Logik, d.h. den Schlussregeln beweisen**

Der Logizismus (Frege, Russell-Whitehead):

- Man benotigt nun eine **formale Grundlegung der Logik** ("Axiomatisierung der Logik")
- **Frege:** Basis der Logik sind "Evidente **logische** Wahrheiten, die eines Beweises weder fahig noch bedurftig sind" (="Axiome")
- Beispiel: Existenz einer unendlichen Menge ist keine **logisch** evidente Wahrheit

Der Logizismus (Frege, Russell-Whitehead):

- Frege definiert dazu eine formale Sprache und erfindet Pradikatenlogik
- **Anmerkung:** Sowohl formale Sprachen als auch Pradikatenlogik sind auch fur die Axiomatische Methode unentbehrlich und werden dort auch verwendet, denn:

  Axiome werden in formaler Sprache formuliert; Satze werden mittels Pradikatenlogik bewiesen.

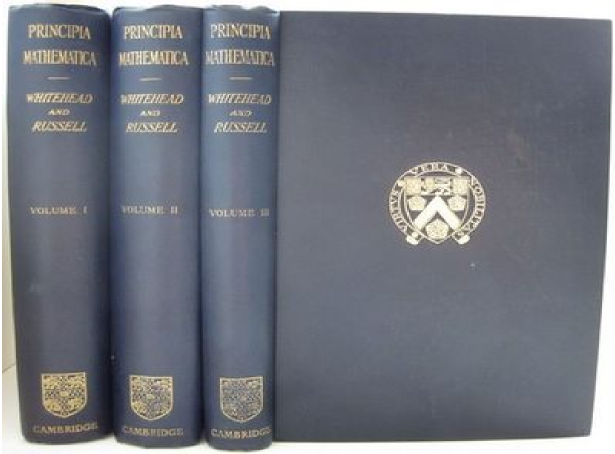
Der Logizismus (Frege, Russell-Whitehead):

- Frege **beweist** in seinem logizistischen Ansatz die Existenz einer unendlichen Menge
- Aber: In Freges Axiomen fand sich ein Widerspruch, die Russellsche Antinomie
- Russell/Whitehead unternahmen eine neuen Versuch das Programm des Logizismus durchzufuhren
- In Russell/Whitehead ist die **Existenz einer unendlichen Menge ein Axiom**

Ergebnis: Russel/Whitehead: "Principia Mathematica" (1910 - 1913) 3 Bande

1. begrundet Mengenlehre, Arithmetik der naturlichen Zahlen und reelle Zahlen innnerhalb der formalen Logik
2. genauer: definiert/konstruiert die Mengenlehre, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ innnerhalb der formalen Logik (?)
3. Die Aussage "$1 + 1 = 2$" ist nun kein Axiom mehr (wie bei Peano) sondern mit Mitteln der Pradikatenlogik beweisbar aus der Definition der naturlichen Zahlen

"Principia Mathematica"



Logizismus

"Principia Mathematica", S. 362

362 PROLEGOMENA TO CARDINAL ARITHMETIC [PART II

$*54{\cdot}42.\quad \vdash :: \alpha \in 2 \,.\supset :. \beta \subset \alpha \,.\, \exists ! \beta \,.\, \beta \neq \alpha \,.\equiv .\, \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}4 \,.\quad \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y \,.\supset :.$

$\qquad \beta \subset \alpha \,.\, \exists ! \beta \,.\equiv : \beta = \Lambda \,.\vee.\, \beta = \iota`x \,.\vee.\, \beta = \iota`y \,.\vee.\, \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

$[*24{\cdot}53{\cdot}56 \,.\, *51{\cdot}161] \qquad \equiv : \beta = \iota`x \,.\vee.\, \beta = \iota`y \,.\vee.\, \beta = \alpha \qquad (1)$

$\vdash . *54{\cdot}25 \,.\, \text{Transp} \,.\, *52{\cdot}22 \,.\supset \vdash : x \neq y \,.\supset .\, \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`x \,.\, \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`y :$

$[*13{\cdot}12] \quad \supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y \,.\, x \neq y \,.\supset .\, \alpha \neq \iota`x \,.\, \alpha \neq \iota`y \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) \,.\supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y \,.\, x \neq y \,.\supset :.$

$\qquad \beta \subset \alpha \,.\, \exists ! \beta \,.\, \beta \neq \alpha \,.\equiv : \beta = \iota`x \,.\vee.\, \beta = \iota`y :$

$[*51{\cdot}235] \qquad \equiv : (\exists z) \,.\, z \in \alpha \,.\, \beta = \iota`z :$

$[*37{\cdot}6] \qquad \equiv : \beta \in \iota``\alpha \qquad (3)$

$\vdash . (3) \,.\, *11{\cdot}11{\cdot}35 \,.\, *54{\cdot}101 \,.\supset \vdash .$ Prop

$*54{\cdot}43.\quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 \,.\supset : \alpha \cap \beta = \Lambda \,.\equiv .\, \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 \,.\supset \vdash :. \alpha = \iota`x \,.\, \beta = \iota`y \,.\supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\equiv .\, x \neq y \,.$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv .\, \iota`x \cap \iota`y = \Lambda \,.$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv .\, \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) \,.\, *11{\cdot}11{\cdot}35 \,.\supset$

$\qquad \vdash :. (\exists x, y) \,.\, \alpha = \iota`x \,.\, \beta = \iota`y \,.\supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\equiv .\, \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) \,.\, *11{\cdot}54 \,.\, *52{\cdot}1 \,.\supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

$$\text{*54·43}.\ \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$$

Dem.

$$\vdash . *54\cdot26 . \supset \vdash : . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$$

$$[*51\cdot231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$$

$$[*13\cdot12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$$

$$\vdash . (1) . *11\cdot11\cdot35 . \supset$$

$$\vdash : . (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$$

$$\vdash . (2) . *11\cdot54 . *52\cdot1 . \supset \vdash . \mathit{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Auf S. 362 wird bewiesen dass "$1 + 1 = 2$" !

Kritik am Logizismus:

1. Beweis der Widerspruchsfreiheit nicht moglich (Godels Theorem)
2. Es gibt innerhalb des Logizismus nach Russel/Whitehead Setzungen ontologischer Natur wie z.B: "es existiert eine Menge unendlicher Kardinalitat", die rein logisch nicht evident oder begrundbar sind. D.h. **der logizistische Ansatz ist nicht ausreichend**.
3. Wahrend Axiome im Hilbertschen Sinne noch eine Form von Anschauung widerspiegeln, geht in der logizistischen Formulierung jede Interpretation verloren. Die Darstellung ist sehr aufwendig und unanschaulich.
4. Godels Kritik: die formale Grundlegung der Logik ist in Russell/Whitehead unzureichend ausgefuhrt

Bemerkung: Synthetischer Charakter der Arithmetik (Kant):

1. **Kant:** Arithmetik (und Geometrie) sind synthetisch und a priori, d.h. nicht herleitbar und von der Erfahrung unabhangig
2. **Logizismus:** Arithmetik (und Geometrie) sind in der Logik darstellbar also herleitbar, d.h. analytisch
3. Aber: logizistisches Programm nicht durchfuhrbar

Intuitionismus (L. Brouwer):

- Mathematische Objekte existieren in unserem Denken (d.h. in der Intuition) und **nur dort**
- Eine Aussage ist wahr wenn ein **konstruktiver Beweis** fur diese Aussage gegeben werden kann
- Beispiel: ist A eine Aussage uber eine *unendliche* Menge (z.B. $\mathbb{N}$), dann ist es moglich dass sowohl fur den Beweis von A als auch $\neg A$ unendlich viele Falle gepruft werden mussen $\Rightarrow$ kein Beweis fur A oder $\neg A$ moglich $\Rightarrow$ $A \vee \neg A$ gilt nicht

Folgerung:

In einer **Formalisierung intuitionalistischer Logik** kann deshalb der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht gelten:

$A \vee \neg A$ wahr bedeutet dass stets A oder $\neg A$ auch **beweisbar** ist $\Rightarrow$ Widerspruch zu Godels Theorem.

Kritik am Intuitionismus:

Zu viele wertvolle/interessante Teile der Mathematik fallen weg da der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht gilt und der Wahrheitsbegriff konstruktiv ist (z.B. Cantors Mengenlehre).

Ausloser: Entdeckung von Widerspruchen in der Grundlegung der Mathematik (Russellsche Antinomien) $\Rightarrow$ Notwendigkeit einer zweifelsfreien Begrundung der Mathematik

Positionen:

- Logizismus: Russell-Whitehead
- Formalismus: Hilbert
- Intuitionismus: Brouwer

- **Logizismus:** Jedes mathematische Schliessen lasst sich auf logisches Schliessen zuruckfuhren und ist deshalb wahr (allerdings last sich die Mathematik - wie gesehen - nicht vollstandig in der Logik formulieren)
- **Formalismus:** Greift dies auf, verzichtet aber auf den gescheiterten Versuch des Logizismus auch mathematische Grundbegriffe wie Zahl, Menge auf Logische Begriffe zuruckzufuhren
- **Intuitionismus:** behauptet, dass die finite Arithmetik ein absolut wahrer Kern der Mathematik ist, der keine axiomatische (wie im Formalismus) oder sprachlich-logische Grundlegung (wie im Logizismus) benotigt (da **intuitiv vorhanden**)

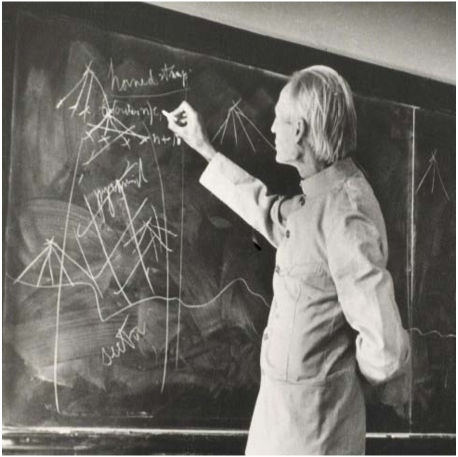
Grundlagenstreit der Mathematik 1920 - 1930

- **Weyl** (1921): "Brouwer - das ist die Revolution"
- **Hilbert** (1922): "Das ist keine Revolution sondern ein Putschversuch"
- **Weyl** (1924): "Der Anwendungsaspekt spricht fur Hilbert"

Der **formal-axiomatische Standpukt nach Hilbert hat sich durchgesetzt**

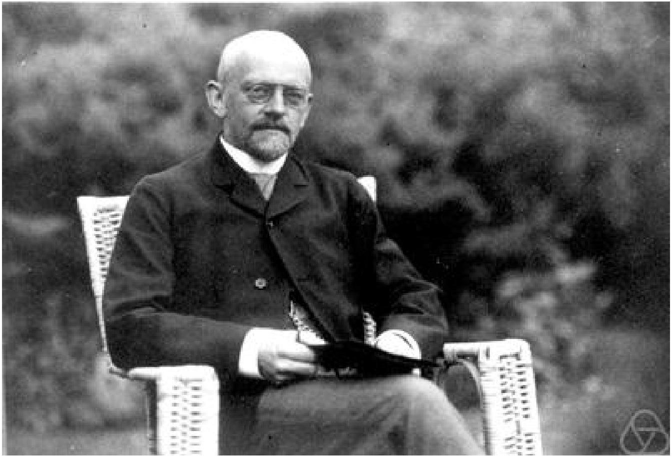
- Grund 1: die hervorragende Anwendbarkeit der axiomatischen Methode in der Mathematik
- Grund 2: Antinomien a la Russell werden nicht mehr als ausweglose (existenzielle) Bedrohung angesehen sondern als Anlass das Axiomensystem zu uberdenken
- Grund 3: Hilbert's Programm des Aufbaus der Mathematik aus der finiten Arithmetik erweckte Vertrauen

L. E. J. Brouwer

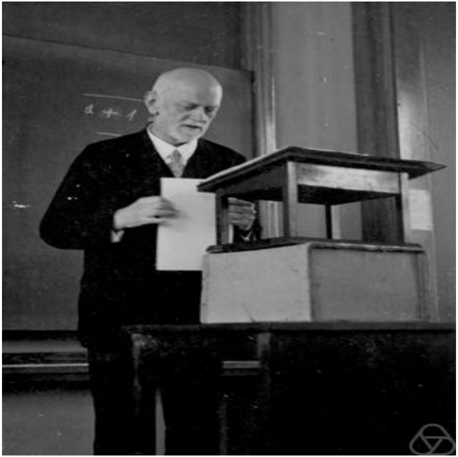


Vortrag in Wien 1928

David Hilbert



David Hilbert



$$"1 + 1 = 2"$$

David Hilbert

- geb. 1862, Konigsberg; gest. 1943 Gottingen
- Studium und Promotion (1884) in Konigsberg (bei F. Lindemann)
- 1886 Privatdozent und Professor in Konigsberg
- 1895 Professor in Gottingen; Gottingen als "Weltzentrum" der Mathematik
- Fundamentale und bahnbrechende Beitrage auf vielen Gebieten der Mathematik
- 1900 Vortrag in Paris: Liste von 23 zukunftsweisenden Problemen in der Mathematik
- fast 70 Dokotorschuler

Mathematisches Werk:

- Beweis des Hilbertschen Basissatzes; lost das Hauptproblem der Invariantentheorie
- Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes; Grundlegung der Algebraischen Geometrie
- Begrundung der homologischen Algebra
- Algebraische Zahlentheorie; Begriff des Hilbert Klassenkorpers, der Hilbert Modulform
- Begrundung der Operatorentheorie in Hilbertraumen =Mathematische Grundlage der Quantenmechanik
- Erfindung der Axiomatischen Methode; Axiomatisierung der Geometrie

David Hilbert

- Idee der Ausweitung der Axiomatischen Methode auf die gesamte Mathematik
- Infolgedessen: Begrundung der mathematischen Logik
- Idee der Ausweitung der Axiomatischen Methode auf die Physik
- Infolgedessen: Begrundung der allgemeinen Relativitatstheorie (zeitgleich mit A. Einstein) (?)
- **Hilbert:** "Die Physik ist fur die Physiker eigentlich viel zu schwer"

Ignorabimus:

- **Du Bois-Reymond:** Moglichkeit des Erkennens der Natur ist grundsatzlich begrenzt
- **Du Bois-Reymond (1872)** "Ignoramus et Ignorabimus" ("Wir wissen es nicht und wir werden es nicht wissen")
- **Hilberts Antwort:** "Da ist das Problem, suche die Losung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus."

David Hilbert

"Wir mussen wissen, wir werden wissen"

1. ...
2. Praxis der Mathematik:

1. Uberblick uber die aktuelle Mathematik:
Gliederung der Mathematik, Forschung, Anwendungen und Lehre

Ganz grob lasst sich die (reine) Mathematik unterscheiden nach

- Arithmetik: Lehre von den Zahlen
- Geometrie: Lehre von Objekten/Figuren im “Raum”

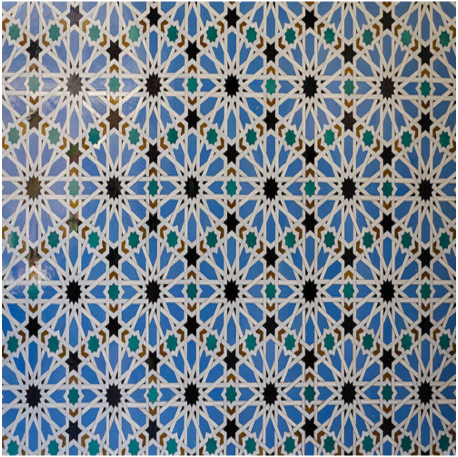
Beispiele zur Arithmetik

- Zwischen n und $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) liegt stets eine Primzahl
- Die Lösungen von $x^2 + px + q$ sind $x_{1,2} = p/2 \pm \sqrt{p^2 - q}$
- Eine Gleichung $x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ vom Grad 5 ist i. allg. nicht mehr durch "Wurzelziehen" losbar
- Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $n \geq 3$ hat keine Losungen in $\mathbb{Z}$ (d.h. fur $x, y, z \in \mathbb{Z}$)

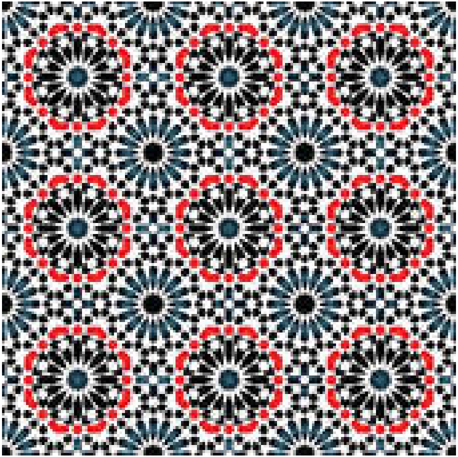
Beispiele zur Geometrie

- Die Hohen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt
- Eine längen- und orientierungserhaltende Abbildung der Ebene auf sich ist Verkettung einer Drehung und einer Translation
- Eine Kurve der Ordnung n schneidet eine Kurve der Ordnung m in nm vielen Punkten
- Es gibt 3 wesentliche Arten von Kegelschnitten (ohne Entartungen)
- Es gibt genau 17 Parkettierungen der Ebene

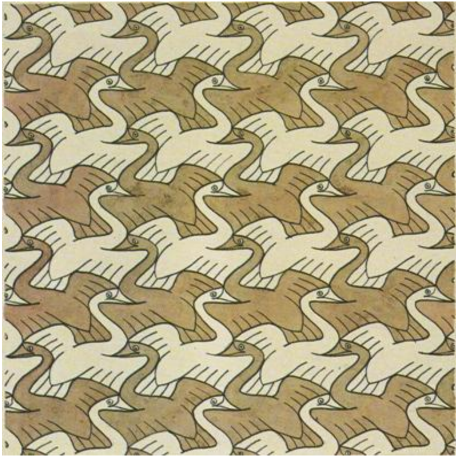
Beispiel: Parkettierung der Ebene



Beispiel: Parkettierung der Ebene



Beispiel: Parkettierung der Ebene



Arithmetik:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- $\mathbb{Q} = \{r/s,\ r, s \in \mathbb{Z},\ s \neq 0\}$,
- Wie weiter ?

Weiter mittels Geometrischer Betrachtung:

- Betrachte **Längenverhältnisse von Strecken** $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$:
- Drücke $\overline{AB} : \overline{AC}$ wir folgt durch Zahlen aus:

$$\overline{AB} = a_0 \overline{AC} + a_1 \frac{\overline{AC}}{10} + a_2 \frac{\overline{AC}}{100} + \cdots$$

  wobei $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, d.h. $a_i/10^i \in \mathbb{Q}$
- Langenverhaltnisse fuhren zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (als Dezimalbruche)

Arithmetik und Geometrie

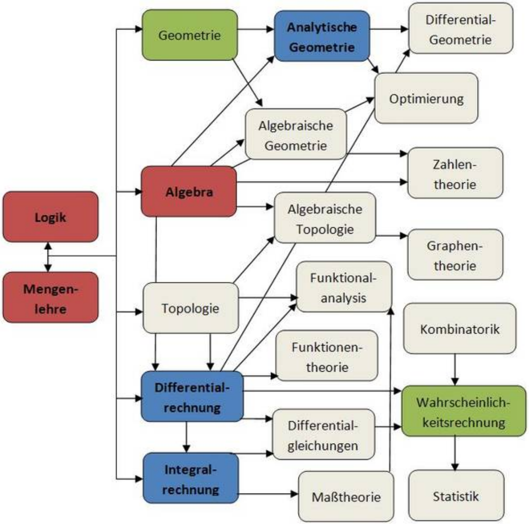
- Arithmetik und Geometrie fuhren zur Konstruktion der reellen Zahlen (als Dezimalbruch)

$$\mathbb{R} = \{a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \quad a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\}$$

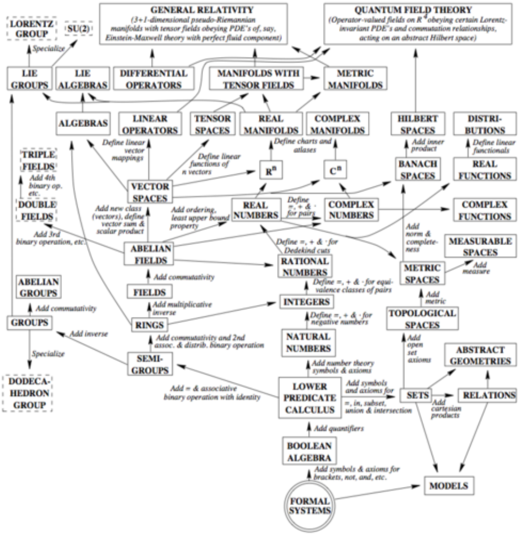
- Das **Zusammenwirken der mathematischen Disziplinen Arithmetik und Geometrie** bringt die Analysis hervor

- Neue mathematischen Disziplinen entstehen durch **Weiterentwicklung** und **Zusammenwirken** schon existierender mathematischer Disziplinen
- Die Mathematik ist in einem **standigen Entwicklungsprozess**; jedes Bild ist nur eine Momentaufnahme
- Das mathematische Wissen vergrossert sich standig

Ubersicht Mathematik



Ubersicht Mathematik



Die moderne Mathematik

- ist disziplinar, d.h. unterteilt in Disziplinen die sich hinsichtlich ihrer math. Objekte und Methoden unterscheiden
- ist aufbauend, d.h. Theorien und Resultate bauen auf schon bestehenden Resultaten und Theorien auf
- ist also sehr stark strukturiert (vgl. Strukturalismus)

Die moderne Mathematik:

- niemand versteht mehr die gesamte Mathematik
- Spezialisierug ist eine Notwendigkeit
- Interdisziplinares Arbeiten ist sehr fruchtbar

Die Mathematical Reviews

MSC2010

MSC2010

This document is a printed form of MSC2010, an MSC revision produced jointly by the editorial staffs of Mathematical Reviews (MR) and Zentralblatt für Mathematik (Zbl) in consultation with the mathematical community. The goals of this revision of the Mathematics Subject Classification (MSC) were set out in the announcement of it and call for comments by the Executive Editor of MR and the Chief Editor of Zbl in August 2006. This document results from the MSC revision process that has been going on since then. MSC2010 will be fully deployed from July 2010.

The editors of MR and Zbl deploying this revision therefore ask for feedback on remaining errors to help in this work, which should be given, preferably, on the Web site at `http://msc2010.org` or, if the internet is not available, through e-mail to `feedback@msc2010.org`. They are grateful for the many suggestions that were received previously which have much influenced what we have.

How to use the
Mathematics Subject Classification [MSC]

The main purpose of the classification of items in the mathematical literature using the Mathematics Subject Classification scheme is to help users find the items of present or potential interest to them as readily as possible—in products derived from the Mathematical Reviews Database (MRDB) such as MathSciNet, in Zentralblatt MATH (ZMATH), or anywhere else where this classification scheme is used. An item in the mathematical literature should be classified so as to attract the attention of all those possibly interested in it. The item may be something which falls squarely within one clear area of the MSC, or it may involve several areas. Ideally, the MSC codes attached to an item should represent the subjects to which the item contains a contribution. The classification should serve both those closely concerned with specific subject areas, and those familiar enough with subjects to apply their results and methods elsewhere, inside or outside of mathematics. It will be extremely useful for both users and classifiers to familiarize themselves with the entire classification system and thus to become aware of all the classifications of possible interest to them.

Every item in the MRDB or ZMATH receives precisely one *primary* classification, which is simply the MSC code that describes its principal contribution. When an item contains several principal contributions to different areas, the primary classification should cover the most important among them. A paper or book may be assigned one or several secondary classification numbers to cover any remaining principal contributions, ancillary results, motivation or origin of the matters discussed, intended or potential field of application, or other significant aspects worthy of notice.

The principal contribution is meant to be the one including the most important part of the work actually done in the item. For example, a paper whose main overall content is the solution of a problem in graph theory, which arose in computer science and whose solution is (perhaps) at present only of interest to computer scientists, would have a primary classification in 05C (Graph Theory) with one or more secondary classifications in 68 (Computer Science); conversely, a paper whose overall content lies mainly in computer science should receive a primary classification in 68, even if it makes heavy use of graph theory and proves several new graph-theoretic results along the way.

There are two types of cross-references given at the end of many of the entries in the MSC. The first type is in braces: "{For A, see X}"; if this appears in section Y, it means that contributions described by A should usually be assigned the classification code X, not Y. The other type of cross-reference merely points out related classifications; it is in brackets: "[See also ...]", "[See mainly ...]", etc., and the classification codes listed in the brackets may, but need not, be included in the classification codes of a paper, or they may be used in place of the classification where the cross-reference is given. The classifier must judge which classification is the most appropriate for the paper at hand.

00-XX **GENERAL**
00-01 Instructional exposition (textbooks, tutorial papers, etc.)
00-02 Research exposition (monographs, survey articles)
00Axx **General and miscellaneous specific topics**
00A05 General mathematics
00A06 Mathematics for nonmathematicians (engineering, social sciences, etc.)
00A07 Problem books
00A08 Recreational mathematics [See also 97A20]
00A09 Popularization of mathematics
00A15 Bibliographies
00A17 External book reviews
00A20 Dictionaries and other general reference works
00A22 Formularies
00A30 Philosophy of mathematics [See also 03A05]
00A35 Methodology of mathematics, didactics [See also 97Cxx, 97Dxx]
00A65 Mathematics and music
00A66 Mathematics and visual arts, visualization
00A67 Mathematics and architecture
00A69 General applied mathematics {For physics, see 00A79 and Sections 70 through 86}
00A71 Theory of mathematical modeling
00A72 General methods of simulation
00A73 Dimensional analysis
00A79 Physics (use more specific entries from Sections 70 through 86 when possible)
00A99 Miscellaneous topics
00Bxx **Conference proceedings and collections of papers**
00B05 Collections of abstracts of lectures
00B10 Collections of articles of general interest
00B15 Collections of articles of miscellaneous specific content
00B20 Proceedings of conferences of general interest
00B25 Proceedings of conferences of miscellaneous specific interest
00B30 Festschriften
00B50 Volumes of selected translations
00B55 Miscellaneous volumes of translations
00B60 Collections of reprinted articles [See also 01A75]
00B99 None of the above, but in this section

01-XX **HISTORY AND BIOGRAPHY [See also the classification number–03 in the other sections]**
01-00 General reference works (handbooks, dictionaries, bibliographies, etc.)
01-01 Instructional exposition (textbooks, tutorial papers, etc.)
01-02 Research exposition (monographs, survey articles)
01-06 Proceedings, conferences, collections, etc.
01-08 Computational methods
01Axx **History of mathematics and mathematicians**
01A05 General histories, source books
01A07 Ethnomathematics, general
01A10 Paleolithic, Neolithic
01A12 Indigenous cultures of the Americas
01A13 Other indigenous cultures (non-European)
01A15 Indigenous European cultures (pre-Greek, etc.)
01A16 Egyptian
01A17 Babylonian
01A20 Greek, Roman
01A25 China
01A27 Japan
01A29 Southeast Asia
01A30 Islam (Medieval)
01A32 India
01A35 Medieval
01A40 15th and 16th centuries, Renaissance
01A45 17th century
01A50 18th century
01A55 19th century
01A60 20th century
01A61 Twenty-first century
01A65 Contemporary
01A67 Future prospectives
01A70 Biographies, obituaries, personalia, bibliographies
01A72 Schools of mathematics
01A73 Universities
01A74 Other institutions and academies
01A75 Collected or selected works; reprintings or translations of classics [See also 00B60]
01A80 Sociology (and profession) of mathematics
01A85 Historiography
01A90 Bibliographic studies
01A99 Miscellaneous topics

03-XX **MATHEMATICAL LOGIC AND FOUNDATIONS**
03-00 General reference works (handbooks, dictionaries, bibliographies, etc.)
03-01 Instructional exposition (textbooks, tutorial papers, etc.)
03-02 Research exposition (monographs, survey articles)
03-03 Historical (must also be assigned at least one classification number from Section 01)

[MSC Source Date: Monday 21 December 2009 09:49]

Ubersicht Mathematik

22Exx **Lie groups {For the topology of Lie groups and homogeneous spaces, see 57Sxx, 57Txx; for analysis thereon, see 43A80, 43A85, 43A90}**
22E05 Local Lie groups [See also 34–XX, 35–XX, 58H05]
22E10 General properties and structure of complex Lie groups [See also 32M05]
22E15 General properties and structure of real Lie groups
22E20 General properties and structure of other Lie groups
22E25 Nilpotent and solvable Lie groups
22E27 Representations of nilpotent and solvable Lie groups (special orbital integrals, non-type I representations, etc.)
22E30 Analysis on real and complex Lie groups [See also 33C80, 43–XX]
22E35 Analysis on p-adic Lie groups
22E40 Discrete subgroups of Lie groups [See also 20Hxx, 32Nxx]
22E41 Continuous cohomology [See also 57R32, 57Txx, 58H10]
22E43 Structure and representation of the Lorentz group
22E45 Representations of Lie and linear algebraic groups over real fields: analytic methods {For the purely algebraic theory, see 20G05}
22E46 Semisimple Lie groups and their representations
22E47 Representations of Lie and real algebraic groups: algebraic methods (Verma modules, etc.) [See also 17B10]
22E50 Representations of Lie and linear algebraic groups over local fields [See also 20G05]
22E55 Representations of Lie and linear algebraic groups over global fields and adèle rings [See also 20G05]
22E57 Geometric Langlands program: representation-theoretic aspects [See also 14D24]
22E60 Lie algebras of Lie groups {For the algebraic theory of Lie algebras, see 17Bxx}
22E65 Infinite-dimensional Lie groups and their Lie algebras: general properties [See also 17B65, 58B25, 58H05]
22E66 Analysis on and representations of infinite-dimensional Lie groups
22E67 Loop groups and related constructions, group-theoretic treatment [See also 58D05]
22E70 Applications of Lie groups to physics; explicit representations [See also 81R05, 81R10]
22E99 None of the above, but in this section
22Fxx **Noncompact transformation groups**
22F05 General theory of group and pseudogroup actions {For topological properties of spaces with an action, see 57S20}
22F10 Measurable group actions [See also 22D40, 28Dxx, 37Axx]
22F30 Homogeneous spaces {For general actions on manifolds or preserving geometrical structures, see 57M60, 57Sxx; for discrete subgroups of Lie groups, see especially 22E40}
22F50 Groups as automorphisms of other structures
22F99 None of the above, but in this section

26–XX **REAL FUNCTIONS [See also 54C30]**
26–00 General reference works (handbooks, dictionaries, bibliographies, etc.)
26–01 Instructional exposition (textbooks, tutorial papers, etc.)
26–02 Research exposition (monographs, survey articles)
26–03 Historical (must also be assigned at least one classification number from Section 01)
26–04 Explicit machine computation and programs (not the theory of computation or programming)
26–06 Proceedings, conferences, collections, etc.
26Axx **Functions of one variable**
26A03 Foundations: limits and generalizations, elementary topology of the line
26A06 One-variable calculus
26A09 Elementary functions
26A12 Rate of growth of functions, orders of infinity, slowly varying functions [See also 26A48]
26A15 Continuity and related questions (modulus of continuity,

26A45 Functions of boun
26A46 Absolutely contin
26A48 Monotonic functic
26A51 Convexity, genera
26A99 None of the above
26Bxx **Functions of sever**
26B05 Continuity and di
26B10 Implicit function variables
26B12 Calculus of vector
26B15 Integration: lengt
26B20 Integral formulas
26B25 Convexity, genera
26B30 Absolutely contin
26B35 Special properties etc.
26B40 Representation an
26B99 None of the above
26Cxx **Polynomials, ratio**
26C05 Polynomials: anal
26C10 Polynomials: loca
26C15 Rational function
26C99 None of the above
26Dxx **Inequalities {For functional inequal 60E15}**
26D05 Inequalities for tri
26D07 Inequalities involv
26D10 Inequalities involv operators
26D15 Inequalities for su
26D20 Other analytical i
26D99 None of the above
26Exx **Miscellaneous top**
26E05 Real-analytic func
26E10 C^∞-functions, qu
26E15 Calculus of functi 58Cxx]
26E20 Calculus of functi [See also 46E40, 4
26E25 Set-valued functic analysis, see 49J5
26E30 Non-Archimedean
26E35 Nonstandard anal
26E40 Constructive real
26E50 Fuzzy real analysi
26E60 Means [See also 4
26E70 Real analysis on t equations on time
26E99 None of the above
28–XX **MEASURE AND 58–XX}**
28–00 General reference etc.)
28–01 Instructional expo
28–02 Research expositic
28–03 Historical (must a from Section 01)
28–04 Explicit machine computation or pr
28–06 Proceedings, confe
28Axx **Classical measure**
28A05 Classes of sets (B

Aufbau einer mathematischen Theorie

- Lege ein Axiomensystem fest $\rightsquigarrow$ fuhrt Grundbegriffe und deren Eigenschaften ein (z.B. Axiomensystem fur $\mathbb{R}$ um die Analysis zu begrunden)
- oder: konstruiere die Grundbegriffe in einer schon bestehenden Theorie (z.B. konstruiere reelle Zahlen mittels $\mathbb{N}$ als Dezimalbruchentwicklungen)
- isoliere zentrale/intuitive Begriffe in Definitionen (z.B. Grenzwert, Stetigkeit, Differenzierbarkeit)
- Der **Gehalt der Theorie** aussert sich in den interessanten wahren Aussagen (=Theoremen) uber die (Grund)Begriffe (z.B.: "Hat f in x_0 ein Maximum dann ist $f'(x_0) = 0$")
- Die Beweise fuhren die Theoreme auf schon bewiesenen Theoreme (oder die Axiome) zuruck

Mathematische Forschung

- ist hochaktiv: es gibt eine Vielzahl offener Fragen/Vermutungen von grosser Bedeutung
- ist sehr dynamisch: Methoden werden standig neu entwickelt, modifiziert, neu kombiniert
- ist interdisziplinar; viele Probleme lassen sich nur durch das Zusammenwirken von Methoden aus ganz verschiedenen Teilgebieten der Mathematik losen.

Mathematische Forschung:

- Axiomensysteme finden (=Theorien begrunden)
- Interessante Aussagen finden (=Vermutungen aufstellen)
- Beweise finden (=Probleme losen)

Gegensatz dazu: **Rechnen:**

- Wiederholtes Anwenden eines im Prinzip gelosten Problems

Praxis der Mathematischen Forschung:

- Hilberts formaler Ansatz zur Begrundung der Mathematik ist allgemein akzeptiert
- Aber: man bezieht sich selten direkt auf ein Axiomensystem
- stattdessen bezieht man sich meist auf schon bewiesene Aussagen
- im kreativen Prozess lasst man sich von Intuition/Anschauung, Raten, Versuch/Irrtum leiten.
- Die (irgendwie) gefundenen Resultate mussen aber dann formal abgeleitet werden

Problem des Mathematischen Origami:

Welche Punkte der (komplexen) Ebene sind mittels der in den Origami Axiomen festgelegten Regeln konstruierbar ?

Beispiel Mathematischer Forschung: Origami

New York Journal of Mathematics

New York J. Math. **6** (2000) 119–133.

A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers

Roger C. Alperin

Abstract. In this article we give a simplified set of axioms for mathematical origami and numbers. The axioms are hierarchically structured so that the addition of each axiom, allowing new geometrical complications, is mirrored in the field theory of the possible constructible numbers. The fields of Thalian, Pythagorean, Euclidean and Origami numbers are thus obtained using this set of axioms. The other new ingredient here relates the last axiom to the algebraic geometry of pencils of conics. It is hoped that the elementary nature of this article will also be useful for advanced algebra students in understanding more of the relations of field theory with elementary geometry.

Contents

1. Introduction

About twelve years ago, I learned that paper folding or elementary origami could be used to demonstrate all the Euclidean constructions; the booklet, [J57], gives postulates and detailed the methods for high school teachers. Since then, I have noticed a number of papers on origami and variations, [G95], [EMN94] and even websites [H96]. What are a good set of axioms and what should be constructible

Received February 28, 2000.
Mathematics Subject Classification. 11R04, 12F05, 51M15, 51N20.
Key words and phrases. origami, algebraic numbers, pencil of conics, Pythagorean numbers.

ISSN 1076-9803/00

Beispiel Mathematische Forschung: Origami

all came into focus for me when I saw the article [V97] on constructions with conics in the Mathematical Intelligencer.

The constructions described here are for the most part classical, going back to Pythagoras, Euclid, Pappus and concern constructions with ruler, scale, compass, and angle trisections using conics. Klein mentioned the book of Row, [R41], while describing geometrical constructions in [K57], but went no further with it. Row's book uses paper folding, as he says, 'kindergarten tools', to study geometrical constructions and curve sketching.

We shall describe a set of axioms for paper folding which will be used to describe, in a hierarchial fashion, different subfields of the complex numbers, in the familiar way that ruler and compass constructions are used to build fields. The axioms for the origami constructible points of the complex numbers, starting with the constructible points 0 and 1 are that it is the smallest subset of constructible points obtained from the following axioms:

(1) The line connecting two constructible points is a constructible line.
(2) The point of coincidence of two constructible lines is a constructible point.
(3) The perpendicular bisector of the segment connecting two constructible points is a constructible line.
(4) The line bisecting any given constructed angle can be constructed.
(5) Given a constructed line l and constructed points P, Q, then whenever possible, the line through Q, which reflects P onto l, can be constructed.
(6) Given constructed lines l, m and constructed points P, Q, then whenever possible, any line which simultaneously reflects P onto l and Q onto m, can be constructed.

These axioms allow constructions of lines, which are performed in origami by folding a piece of paper. The constructed points make up the origami numbers. The points on a constructed line are not necessarily constructible points. The first three axioms, which we call Thalian constructions, do not seem very strong at all, using merely perpendicular bisections, but surprisingly starting with a third non-real point give the structure of a field to the constructed set of points. The introduction of Thalian constructions and numbers is a novelty of this article.

The fourth axiom, allowing angle bisections, in a sense completes the first level giving the Pythagorean numbers, studied by Hilbert in *Foundations of Geometry* in connection with constructions with a ruler and (unit) scale and their relations to the totally real algebraic numbers. In [AC95], this idea is developed using a larger set of axioms. The fifth axiom, adds yet more constructions, precisely the Euclidean constructions, not by using a compass, but by adding in the construction of the envelope of tangents of a parabola. This has been discussed by [J57], [G95] with additional axioms and the use of double folds, but it is classical origami and geometrical constructions. In fact as we shall show, one can eliminate axioms (1) and (4) as a application of the power of using axiom (5). The axioms (2), (3), (5) are all that are needed for geometrical constructions. The sixth axiom, has been discussed before in [G95], and in [EMN94] using the mira constructions. This axiom allows the constructions of cube roots, solving the problem of the duplication of the cube, just as the ancients did it, using the intersection of parabolas, [V97]. This last axiom admits the construction of the tangents to two parabolas as a new construction. This is strong enough to be used to solve any cubic or fourth order

Beispiel Mathematischer Forschung: Origami

Lemma 5.1. *The intersection points and common tangents of two distinct non-degenerate conics with equations defined over $\mathcal{O}$ can be constructed by origami methods defined by axioms* (1)–(6).

Proof. We consider the common tangents, if any, to two non-degenerate conics F, G. If there is a tangent, then this tangent is also tangent to every conic in the pencil that F, G generate, so it is a common tangent on the degenerate conics in the pencil, when $det(A - \lambda B) = 0$. Solving for λ involves solving the cubic determinant equation; but this can be done by origami. By a change of coordinate system, which uses only the field operations, we move this tangent line (by a linear transformation) to the line at infinity in the projective plane. Now we have two conics with a common tangent at infinity; thus, these new conics are parabolas. Any further common tangents now in the new affine plane can be constructed using origami.

We can reduce the problem of construction of common points of two curves to the construction of common tangents for the dual curves. Dualizing the line conic gives the original point conic. The equation for the dual curve is based on the adjoint so its coefficients are also in $\mathcal{O}$. □

Consider the set of points in the complex numbers which are obtained as intersections of lines or conics with coefficients in the real subfield $\mathcal{O}_R$ of the origami complex numbers $\mathcal{O}$, those points which are constructible by axioms using (1)–(6). These will be called the *conic constructible* points. This is equivalent (using Theorem 5.2) to the notion of conic constructible points developed in [V97]. In that article, constructibility of directrices, eccentricity, foci, radius, etc. are the conditions for conic constructibility.

Summarizing the consequences of this section, we obtain the following theorem.

Theorem 5.2. *The constructible points in $\mathbb{C}$, obtained by using axioms* (1)–(6), *starting with the numbers* 0 *and* 1, *is the field of origami constructible numbers, $\mathcal{O}$; it is the smallest subfield of $\mathbb{C}$ closed under square roots, cube roots and complex conjugation. This field $\mathcal{O} = \mathcal{O}_R \oplus i\mathcal{O}_R$ is also the set of conic constructible points. The field $\mathcal{O}_R$ is the smallest subfield of the reals closed under arbitrary* (*real*) *cube roots and square roots of its positive elements.*

Proof. We have seen already that the fields $\mathcal{O}$ and $\mathcal{O}_R$ are closed under conjugation, square and cube roots, either complex or real, respectively. Thus, the smallest such subfields of the complex numbers or real numbers closed under these specified roots and conjugation, $\mathcal{M}$ and $\mathcal{M}_R$, are contained in $\mathcal{O}$ and $\mathcal{O}_R$, respectively.

The conic constructions of common points of distinct conics can all be done using origami constructions by using Lemma 5.1, so the conic constructible points are contained in $\mathcal{O}$ and their coordinates are in $\mathcal{O}_R$. Furthermore it follows immediately from the argument in Lemma 5.1 that these points and their coordinates are obtained by using field operations and solving cubic equations with coefficients in $\mathcal{O}_R$. The coordinates for intersections of lines or line and conic also involve solving either a linear equation or a cubic, possibly reducible, with coefficients in $\mathcal{O}_R$. Hence coordinates of conic constructible points are contained in $\mathcal{M}_R$.

On the other hand, an origami constructible point in $\mathcal{O}$, has its coordinates in $\mathcal{O}_R$, and is easily obtained as the intersection of a horizontal and vertical line with coefficients in $\mathcal{O}_R$. Thus $\mathcal{O}$ is contained in the conic constructible points. So

Beruhmte Probleme der Mathematik:

- **Goldbach Vermutung:** Jede gerade naturliche Zahl ≥ 4 ist Summe zweier Primzahlen (Goldbach 1742)
- **Poincaré Vermutung:** Jede 3 dimensionale geschlossene Flache auf der sich jede Schlinge auf einen Punkt zusammenziehen lasst ist "aquivalent" zur 3 dimensionalen Sphare (Poincare 1904)
- **Fermat Vermutung:** Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$, $n \geq 3$ hat keine Losungen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ (Fermat $\sim$ 1640)

- **Schwache Goldbach Vermutung:** Jede ungerade naturliche Zahl ≥ 9 ist Summe dreier ungerader Primzahlen; bewiesen von Helfgott u.a., 2013; Goldbach Vermutung ist offen
- **Poincaré Vermutung** bewiesen von Perelman 2002
- **Fermat Vermutung** bewiesen von Wiles 1994

Fermat Vermutung:

- "$x^n + y^n = z^n$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$" ist ein arithmetisches Problem
- Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^n + y^n + z^n = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ ist ein geometrisches Objekt.
- $\Rightarrow$ Zusammenwirken Arithmetik $\leftrightarrow$ Geometrie

Überraschung:

Es gibt einen Zusammenhang der Fermat Vermutung zur **Hyperbolischen Ebene** $\mathbb{H}$!

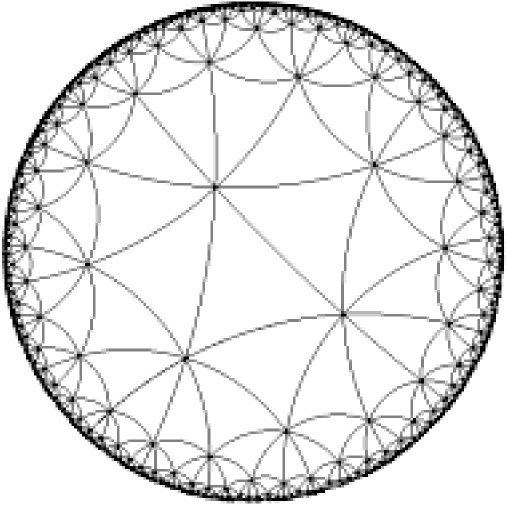
Theorem (Ribet, Serre, 1990).

Ist

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$$

eine differenzierbare ("modulare") Abbildung, die eine Parkettierung der hyperbolischen Ebene invariant lasst, dann existiert eine feinere Parkettierung und eine differenzierbare ("modulare") Abbildung f^+ die auch diese feinere Parkettierung invariant lasst.

Parkettierung von $\mathbb{H}$:



Parkettierungen von $\mathbb{H}$:

Beachte: Je feiner die Parkettierung, desto starker ist die Bedingung dass f unter der Parkettierung invariant sein soll !

Theorem (Frey 1987, Wiles, 1994).

Ist die Fermatgleichung losbar, dann existiert eine Parkettierung der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$ und eine differenzierbare ("modulare") Abbildung

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C},$$

die diese Parkettierung invariant lasst.

Folgerung: Es gibt beliebig feine Parkettierung von $\mathbb{H}$ zu denen eine differenzierbare ("modulare") Abbildungen

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$$

existiert die diese Parkettierung invariant lasst.

Aber: Ist die Parkettierung hinreichend fein, dann gibt es keine differenzierbare ("modulare") Abbildungen

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$$

die diese Parkettierung invariant lasst. **Widerspruch !**

Resultat: Die Fermatgleichung kann keine Losungen haben.

Beispiel: Parkettierung der Ebene

Annals of Mathematics, **142** (1995), 443–551

Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem

By Andrew Wiles*

For Nada, Clare, Kate and Olivia

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Pierre de Fermat

Introduction

An elliptic curve over **Q** is said to be modular if it has a finite covering by a modular curve of the form $X_0(N)$. Any such elliptic curve has the property that its Hasse-Weil zeta function has an analytic continuation and satisfies a functional equation of the standard type. If an elliptic curve over **Q** with a given j-invariant is modular then it is easy to see that all elliptic curves with the same j-invariant are modular (in which case we say that the j-invariant is modular). A well-known conjecture which grew out of the work of Shimura and Taniyama in the 1950's and 1960's asserts that every elliptic curve over **Q** is modular. However, it only became widely known through its publication in a paper of Weil in 1967 [We] (as an exercise for the interested reader!), in which, moreover, Weil gave conceptual evidence for the conjecture. Although it had been numerically verified in many cases, prior to the results described in this paper it had only been known that finitely many j-invariants were modular.

In 1985 Frey made the remarkable observation that this conjecture should imply Fermat's Last Theorem. The precise mechanism relating the two was formulated by Serre as the ε-conjecture and this was then proved by Ribet in the summer of 1986. Ribet's result only requires one to prove the conjecture for semistable elliptic curves in order to deduce Fermat's Last Theorem.

*The work on this paper was supported by an NSF grant.

Fermat Vermutung

Arithmetik (Fermat)

$\rightsquigarrow$ Geometrie (Hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$ mit Parkettierung)

$\rightsquigarrow$ Analysis (Modulform f)

Alle mathematischen Disziplinen wirken zusammen !

Wir sehen nocheinmal: Die Frage warum es genau eine Parallele gibt/geben soll ist

- alles andere als trivial oder oberflachlich
- erortert die Natur geometrischer Objekte
- sie erwies sich im Verlauf der Entwicklung der Mathematik als hochst fruchtbar
- und führt uber die hyperbolische Geometrie mit zur Losung des Fermatproblems !

Stichworte zum Beweis von Fermat:

- Automorphe Formen und Darstellungen, Elliptische Kurve, Tatemodul, Etale Kohomologie, Galois Kohomologie, Hecke Algebren und Hecke Korrespondenzen, Galoisdarstellung, Modulkurven, Automorphe L-Funktion, p-adische Deformationstheorie, Isogenietheorem, Iwasawatheorie
- Wiles Theorem stellt einen Spezialfall der Taniyama-Shimura Vermutung dar, die wiederum ein (winziger) Spezialfall der Langlandsvermutungen ist
- 100 Seiten

Anwendungen der Mathematik

- Biologie - Populationsdynamik: wie entwickeln sich Populationen in einem Okosystem - DGL
- Biologie - Mathematische Genetik: Mutation, Selektion, Entstehen neuer Spezies - DGL, W.theorie
- Sozialwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften - Spieltheorie: Welches ist optimale Strategie fur das Verhalten eines Individuums in einer Gruppe von Wettbewerbern um moglichst erfolgreich zu sein ? Z.B. Optimale Strategie fur einen Spieler in einer Pokerpartie, optimale Strategie fur ein Unternehmen im Wettbewerb - LA, W.theorie

Anwendungen der Mathematik

- Finanzmathematik - Bestimme das Risiko in einem Portfolio von Finanzprodukten - ANA, W.theorie
- Finanzmathematik - Bestimme den fairen Preis einer Option - W.theorie und PDGL
- Informationstheorie - Messen, Speichern, Ubertragen von Information (Codierungstheorie) - LA, ALG, Z.theorie

Anwendungen der Mathematik

- PageRank Algorithmus von Google - Lineare Algebra
- Dateikompression (JPEG) - Fraktale Geometrie
- Medizin - Tomographie - ANA
- Kryptographie - RSA-Algorithmus zum Verschlusseln von Nachrichten - Algebra, Z.theorie

Anwendungen der Mathematik

- Optimierungstheorie: Bestimme x_0 so dass die Funktion f in x_0 ihr (globales) Maximum annimmmt - Lineare und konvexe Geometrie - Zahlreiche Anwendungen
- Architektur - Variationsrechnung: Bestimme optimale Gestalt eines geometrischen Objektes unter gewissen Vorgaben. Z.B. Welche Flache schliesst bei gebebener Oberflache das grosste Volumen ein ? - ANA, GEO
- Aerodynamik - Navier-Stokes Gleichung - PDGL

- Elektrotechnik - Maxwellgleichung: Ausbreitung elektromagnetischer Wellen (Felder) - PDGL
- Burgersgleichung - Beschreibung d. Vekehrsdichte auf einer geraden Strasse - PDGL
- Mustererkennung - Zahlreiche Anwendungen - Algebraische Topologie, ANA, GEO

Studium der Mathematik

- Axiomatische Methode wird erlautert
- Herleiten von Aussagen aus Axiomen oder schon bewiesenen Satzen wird verlangt und geubt (Axiome fur $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$)
- Das Studium hat (wie die Mathematik selbst) stark aufbauenden Charakter:

  \- Vorlesungen mussen in der festgelegten Reihenfolge gehort werden.

  \- Hat man eine Vorlesung ausgelassen, so kann man nicht fortfahren mit dem Studium
- Das Studium ist (wie die Mathematik selbst) disziplinar ausgerichtet: Die Vorlesungen korrespondieren zu mathematischen Disziplinen

ENDE von Teil 1