Fachdidaktik Mathematik

Manfred Kronfellner

m.kronfellner@tuwien.ac.at

1 Was ist Fachdidaktik Mathematik?

Fachdidaktik Mathematik (Didaktik der Mathematik, Mathematikdidaktik, mathematics education) beschäftigt sich – etwas plakativ formuliert – mit den Fragen

Was? ***Wie?*** ***Wozu?*** ***Warum?***

Mathematikdidaktik befasst sich mit Entwicklung, Durchführung (incl. Evaluation) und der theoretischen Fundierung von Mathematikkursen bzw. von Lernen von Mathematik. Sie ist eine angewandte Wissenschaft mit zwangsläufig anderer wissenschaftlicher Methodik als Mathematik oder Naturwissenschaften; eher mit Sozialwissenschaften oder Medizin vergleichbar (vgl. Entwicklung von Heil- oder Operationsverfahren und deren Evaluation).

Forschungbereiche:

- Lehrzielfindung / Lehrzielbegründung / Lehrzielauswahl
- Konstruktion von Lernsequenzen (verschiedene mögliche Zugänge, ...)
- didaktische Analysen (von Lehrplänen, Schulbüchern, Unterrichtskonzepten, ...)
- Kontrolle und Evaluation (incl. Methodologie)
- pädagogische / lernpsychologische / entwicklungspsychologische / soziologische Forschung
- historische und philosophische Einordnung

Mathematikdidaktik ist interdisziplinär: reine/angewandte Mathematik, Philosophie der Mathematik, Geschichte der Mathematik, Wissenschaftstheorie, Erkenntnistheorie, Erziehungswissenschaften, allgemeine Didaktik, Lernpsychologie, Entwicklungspsychologie, Soziologie, Unterrichtspraxis

Erich Wittmann[1] bezeichnet Mathematikdidaktik als „Ingenieurwissenschaft“.

[1] berühmter emeritierter Professor für Mathematikdidaktik, Verfasser des immer noch sehr lesenswerten Buches: „Grundfragen des Mathematikunterrichts“, Verlag Vieweg

Was kann man von der Mathematikdidaktik erwarten?

Sicherlich nicht eine Sammlung von vorgefertigten Unterrichtsrezepten, die nach einem „Reiz-Reaktions-Schema“ in bestimmten Situationen angewandt mit Sicherheit zum Erfolg führen. („Was mache ich, wenn ...?“ Didaktische Situationen sind nie vollständig antizipierbar!)

Mathematikdidaktik ist eine junge Wissenschaft, daher nichts Abgeschlossenes, nichts Gesichertes. (Aber: wo – außerhalb der Mathematik - gibt es schon gesicherte Erkenntnis?) Dennoch liefert die Mathematikdidaktik „verbindlichere“ Erkenntnisse als es irgend welche (unreflektierten) Einzelmeinungen (z.B. unreflektierte Erfahrungen einzelner Praktiker) sein können.

Beginnen wir mit jenen Fragen, die – aus Zeitgründen – nur kurz behandelt werden können.

2 Warum Mathematik(unterricht)? Wozu Mathematik(unterricht)?

Sind das nicht die selben Fragen?

Nein!

Wozu Mathematik?

nützlich im Alltag (insb. Unterstufenmathematik)

Vorbereitung auf spezielle Studien und Berufe

Höhere mathematische Allgemeinbildung (vgl. später!)

Warum Mathematik?

Gegenfrage: Warum Astronomie? Warum Archäologie? Warum Germanistik? ...

Neben der Anwendbarkeit der Mathematik gibt es auch nicht (unmittelbar) anwendbare Mathematik, die aber ebenso viel (oder wenig?) „Berechtigung“ hat wie Kunstgeschichte uva.

Kunst ist „schön“. Aber Mathematik?

„Schönheit“ liegt im Auge des Betrachters.

Der ästhetische Aspekt, die „Schönheit der Mathematik“ ist offensichtlich für viele nicht erkennbar bzw. nachvollziehbar. Aber das gleiche gilt auch für Oper, Jazz, (moderne) Malerei, Lyrik, ...

Zum Schlagwort „Schönheit der Mathematik“ liefert Google 386000 Einträge, zu „beauty of mathematics“ 931000!

Beispiele:

- Geometrische Figuren, Ornamente,Symmetrien, ... ,
  (zum Beispiel: Mandelbrotmenge, Julia-Mengen, Sierpinski-Dreieck, ...)
- elegante Beweise, elegante Theorien
- Erkenntnisse, Einsicht in Zusammenhänge
- die Mathematik „hinter“ schönen Objekten wie griechische Tempel, Sonnenblumen, Tannenzapfen, Ananas, Nautilusschnecken, ...(Goldener Schnitt, Fibonnacci-Zahlen, ...), Mandelbrot-Mengen, Julia-Mengen, Siepinski-Dreieck, Hilbertkurve, ...
- Die „***schönste Formel der Welt***“:

$$e^{i\pi}+1=0$$

Neben „schön“ ist Mathematik vor allem faszinierend, verblüffend, überraschend. (Auch das ist eine Art von „Schönheit“!)

Beispiel: Wir betrachten die Menge der rationalen Zahlen im Intervall [0; 1]. Diese Zahlen bilden bekanntlich eine dichte Teilmenge: zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt immer eine weitere rationale Zahl, z.B. das arithmetische Mittel:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{ad+bc}{2bd}$$

Damit liegen zwischen je zwei noch so knapp nebeneinander liegenden rationalen Zahlen sogar unendlich viele weitere rationale Zahlen. Weiters sind die rationalen Zahlen abzählbar, somit auch alle rationalen Zahlen im Intervall [0; 1], d.h. man kann sie als Folge anschreiben: $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle$. (Natürlich kann das nie eine monotone Folge sein.)

Nun bilden wir um a_1 eine Umgebung, d.h. ein Intervall $\left[a_1-\frac{\varepsilon}{2};a_1+\frac{\varepsilon}{2}\right]$;

um a_2 das Intervall $\left[a_2-\frac{\varepsilon}{2^2};a_2+\frac{\varepsilon}{2^2}\right]$;

...

um a_n das Intervall $\left[a_n-\frac{\varepsilon}{2^n};a_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right]$; ... usw.

Die Längen dieser Intervalle sind $\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots,$ und deren Summe beträgt:

$$\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \ldots = \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) = 2\varepsilon$$

Jede rationale Zahl aus [0;1] liegt natürlich in einem solchen Intervall, d.h. die Vereinigung all dieser Intervalle „überdeckt" alle rationalen Zahlen in [0;1].

Wählt man nun ε klein, etwa 10^{-3}, so ist die Länge der Überdeckung ≤ 0,002, während die Summe der Längen der nicht überdeckten Teile von [0;1], die keine rationalen Zahlen enthalten, ≥ 0,998 ist. (Verblüfft?)

Ein weiteres **Beispiel:** Mersenne-Primzahlen (http://www.mersenne.org/): Die größte derzeit (Jänner 2016) bekannte Primzahl ist

$$2^{74\,207\,281}-1$$

Wie viele Stellen hat diese Zahl in dezimaler Schreibweise?

Eine n-stellige Zahl x gilt : $10^{n-1} \leq x < 10^n$

$$\lg 10^{n-1} \leq \lg x < \lg 10^n$$

$$n-1 \leq \lg x < n$$

also n = [lg x] + 1.

$\lg 2^{74\,207\,281} = 74\,207\,281 \cdot \lg 2 \approx 22\,338\,617{,}4\ldots$

Somit hat die Zahl 22 338 618 Stellen.

Versuchen Sie diese Zahl größenordnungsmäßig zu veranschaulichen! (Eine A4-Seite mit 60 Zeilen zu je 60 Zeichen ... , 3 solche Seiten enthalten somit mehr als 10 000 Zeichen, 22 338 618 Zeichen beanspruchen demnach ... Zum Vergleich: die Zahl ALLER Elementarteilchen im gesamten Universum würde in dieser Schrift etwas mehr als eine Zeile füllen!)

3 Wie (Mathematik) unterrichten?

Um dieser Frage gerecht zu werden müsste man die Erkenntnisse von Pädagogik, Lernpsychologie, Entwicklungspsychologie, Erkenntnistheorie, Soziologie und ggf. angrenzender Gebiete berücksichtigen. Das ist in der Praxis schwer durchführbar. Stattdessen wurden in der pädagogischen bzw. didaktischen Literatur sogenannte **didaktische Prinzipien** formuliert. Das sind kurze prägnante Formulierungen von Anweisungen, die die theoretischen Erkenntnisse der oben genannten Wissensbreiche in verdichteter Form wiedergeben.

Didaktische Prinzipien sollen helfen,

- Unterricht zu beschreiben, und zwar
  - im Vorhinein (Unterrichtsplanung)
  - im Nachhinein (Analyse des eigenen oder eines beobachteten Unterrichts)

  mit dem Ziel, Unterricht diskutierbar und mitteilbar zu machen
- Unterricht(splanungen) zu rechtfertigen
- Informationen und (eigene) Erfahrungen leichter einzuordnen

Didaktische Prinzipien überlappen sich oft. Das hat mehrere Gründe (insb. in ihrer theoretischen Fundierung). Kehren Aspekte mehrfach wieder, so kann dies als Zeichen ihrer Bedeutsamkeit und ihrer mehrfachen Verankerung in z. T. verschiedenen zugrunde liegenden Theorien angesehen werden (Lernpsychologie, Entwicklungspsychologie, Erkenntnistheorie, Wissenschaftstheorie, ...).

Didaktische Prinzipien werden oft anfangs allgemein formuliert und durch „Unterprinzipien" konkretisiert.

3.1 Prinzip des aktiven Lernens (auch: Operatives Prinzip)

Die Instruktionen des Lehrers / der Lehrerin bleiben wirkungslos, wenn sie nicht von einer aktiven Konstruktion des Schülers / der Schülerin begleitet sind. (Dies sollte man auch den SchülerInnen explizit klarmachen!) Insb. bei jüngeren SchülerInnen sind Handlungen an konkreten Objekten sehr wichtig. (Vgl.: „begreifen"!).

Maßnahmen zur Realisierung dieses Prinzips:

- angreifbares Material im Unterricht einbauen (angreifen, zerschneiden, messen, bauen, ...)
- inhaltlich interessanter und so oft wie möglich an der Lebenserfahrung der SchülerInnen anknüpfender Stoff
- Problemaufgaben, spielerische Momente, Wettkämpfe (insb. in der Unterstufe)
- Unterrichtsform: Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit

3.2 Integrationsprinzip

Im Unterricht soll auf die Schaffung von Beziehungsnetzen hingearbeitet werden. Das Individuum kann mit der Umwelt umso erfolgreicher in Wechselwirkung treten, je vollständiger und mobiler seine Erkenntnisse in Beziehungsnetzen integriert und organisiert sind.

3.2.1 Prinzip des Lernens in Zusammenhängen

Die Integration in größere Sinnzusammenhänge soll bereits bei der Erarbeitung einer Erkenntnis erfolgen.

3.2.2 Prinzip der integrierenden Wiederholung

Bei Wiederholungen sollen systematisch Querverbindungen ausgebaut und größere Zusammenhänge erschlossen werden.

(Also keine „Eins-zu-eins-Wiederholungen" des früher Gelernten!)

Das Integrationsprinzip stellt also eine Abkehr von traditionellen Prinzipien wie dem „Prinzip der Isolierung von Schwierigkeiten", „Linearer Aufbau", „Lernen in kleinsten Einheiten", ... dar.

3.3 Redundanzprinzip

Neue Inhalte/Fragen sollen anhand von Situationen/Problemstellungen behandelt werden, bei denen nur einzelne Elemente ganz neu sind.

($\rightarrow$ Möglichkeit der Einbindung in - bzw. Anknüpfung an vorhandenes Wissen!)

3.4 Prinzip der Stabilisierung

Damit ein (eben erarbeitetes) Wissen zum stabilen Bestandteil der „kognitiven Gesamtstruktur“ wird, muss es mehrmals in größeren Zeitabständen in neuen Kontexten geübt, angewandt und dabei generalisiert, differenziert und mit anderen Schemata vernetzt werden.

Dieses Prinzip wendet sich gegen das „Alles in einem Zug durchnehmen, wenn man schon dabei ist”.

Beispiel: Welche Hotkeys bleiben im Gedächtnis?

Wenn man das ins Vergessen absinkende Wissen oft genug und in größeren Zeitabständen „hervorholt"*), bleibt es mit immer größer werdender Wahrscheinlichkeit für immer längere Zeit verfügbar. Durch oftmaliges Hervorholen und Anwenden verschiedener Wissensinhalte vergrößert sich auch der Bereich des verfügbaren Wissens („geistige Wendigkeit").

***)** das kann sogar „schmerzhaft“ sein: vgl.: „sich das Gehirn zermartern"!

3.5 Repräsentationsmodi, entsprechende Prinzipien

Es gibt drei Arten, Wissen darzustellen bzw. zu erschließen („Repräsentationsmodi“):

- ***enaktiv:*** d.h. durch Handlungen
- ***ikonisch****:* bildliche Darstellungen von Handlungsabläufen wie Flussdiagramme (beim herkömmlichen Programmieren wie auch in der Systemdynamik), Graphen, Baumdiagramme, Netzpläne, ... , aber auch selbständige situationsbedingte (d.h. nicht standardisierte) Ikonisierungen, wie z. B. eine Folge von Figuren in einer geometrischen Überlegung (Rechteck → Parallelogramm → Dreieck zur Ableitung des Flächeninhalts eines Dreiecks) Ikonische Darstellungen erlauben meist ein simultanes Erfassen von Handlungsketten, Verzweigungsmöglichkeiten, ...
- ***symbolisch:*** Darstellungen durch Variable, Formeln, Symbole, ... ermöglichen kalkülhafte, formale Operationen (Formelumformungen, Beweise, ...)

3.5.1 Präfigurationsprinzip

In frühen Stadien der Entwicklung des Schülers / der Schülerin (nach Piaget: im prä- und konkretoperativen Stadium, d.h. bis etwa 11/12 Jahre) sollen die enaktiven und ikonischen Wurzeln von Begriffen und von symbolischen Operationen breit entwickelt und als Grundlage für die Symbolisierung verwendet werden. (Ist fallweise - in entsprechender Form - auch später noch sinnvoll, evtl. auch nur im Geist; z.B.: beim Integral)

3.5.2 Prinzip des intermodalen Transfers

Die Fähigkeit, einen Inhalt von einem Repräsentationsmodus in einen anderen übertragen zu können, soll gefördert werden.

(Z.B.: Gleichunglösen → geometrische Deutung,
binomische Formeln → geometrische Deutung)

Wissen, das in verschiedenen Darstellungsformen erworben wurde, kann leichter behalten werden. (Vernetzung!) Die Fähigkeit, Wissen nach Bedarf in die eine oder andere Form zu transponieren, erhöht die Flexibilität und den Erfolg beim Problemlösen. (Vgl.: Skizze vor oder während einer trigonometrischen oder analytisch- geometrischen Rechnung)

3.6 Das genetische Prinzip

Mathematikunterricht soll nach der **genetischen Methode** organisiert werden. Die Darstellung einer mathematischen Theorie heißt genetisch, wenn sie an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist. Mathematik kann nur über den Prozess des Mathematisierens adäquat verstanden und erlernt werden, aber nicht abl Fertigprodukt.

Das bedeutet:

- Anschluss an das Vorverständnis des Schülers
- Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik
- Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus
- Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze
- durchgehende Motivation und Kontinuität
- während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerung
- Strukturbetrachtungen sollen am Ende des Lernprozesses stehen, nicht am Beginn

Man darf zwar „genetisch" nicht automatisch mit „historisch" identifizieren, aber die Geschichte der Mathematik bzw. eines Begriffs oder Teilgebiets liefert oft gute Ideen für einen genetischen Aufbau des Unterrichts zu diesem Thema.

3.7 Spiralprinzip

(Für eingefleischte Geometer: „Schraubenlinienprinzip")

Unterricht (von der Vorschule bis zur Uni) soll von den **fundamentalen Ideen** ausgehen, Nachdruck auf das intuitive Erfassen und Gebrauchen dieser Ideen legen, im Verlauf des Unterrichtsgeschehens wiederholt auf diese Grundideen zurückkehren und auf diesen aufbauen. (Spiralförmiger bzw. schraubenlinienförmiger Curriculumaufbau).

Zweck fundamentaler Ideen (auch: fundamentale Konzepte) und zugleich eine Möglichkeit zur Charakterisierung dieses Terminus:

- Sie sind geeignet zum Sprechen und Reflektieren über Mathematik (was Mathematik überhaupt bedeutet) beizutragen bzw. dies zu erleichtern und anzuregen.
- Sie besitzen einen sprachlichen oder handlungsmäßigen Archetyp im alltäglichen Sprechen, Handeln oder Denken.
- Sie sind eine „vertikale Faser“ im spiralförmigen Curriculum, d.h. sie erklären und bündeln immer wieder wesentliche Inhalte, Denk- und Handlungsweisen der Mathematik.
- Sie entlasten dadurch das Kurzzeit- und das Langzeitgedächtnis.
- Sie haben sich in der historischen Entwicklung der Mathematik als fruchtbar erwiesen.

Je mehr dieser Punkte erfüllt sind, umso fundamentaler ist die Idee.

Einige Beispiele für fundamentale Ideen:

- **Quantifizierung** (Zahlen, messen, bewerten, „messbar machen“; Relativierung: scheinbar metrische Skalen wie Notenskalen, Güteklassen, ...)
- **Funktion**, Abbildung (Variablenbegriffe, Termdarstellungen, Termumformungen, funktionales Denken, Kausalität, Stetigkeit, Wenn-Dann-Charakter mathematischer Aussagen; Relativierung: Relation, Korrelation)
- **Algorithmisierung** (Vergegenständlichung von Rechenverfahren, Handlungssequenzen oder Gedankenketten in Formeln, Rezepten, Programmen, Struktogrammen (Flussdiagrammen), Konstruktionsbeschreibungen, geometrischen Begriffen, Funktionstermen; Iteration, Rekursion, ..., Beweise, formale Logik)
- **Optimierung**
- **Linearisierung** (Tangente, Sekante, lin. Interpolation, Vernachlässigung von Reihengliedern höherer Ordnung; Linearisierbarkeit (Differentialrechnung, Glattheit, „Funktionenmikroskop“), ...)
- **Modellbildung** (Vernachlässigung potentieller Einflussgrößen, realistische Berechenbarkeit, ...)
- **Approximation** (Messen, Kontextabhängigkeit von Präzisionsansprüchen; Fehlerabschätzung, Irrationalzahlen, Exaktifizierung/Exaktifizierbarkeit von

Begriffen, Sätzen, Begründungen; Optimierung bzw. Linearisierung unter Fehlerkontrolle, Modellcharakter der Mathematik in Anwendungssituationen)

- **Induktion** (nicht nur vollständige, sondern auch „unvollständige“Induktion: induktives Schließen, Verständnis und Intuition aus konkreten Beispielen gewinnen („paradigmatische Beispiele“), induktive Lehrsatz- und Begriffsbildung, paradigmatisches Beweisen)
- **Symmetrie** (geometrische Beziehungen; Kommutativität; kommutative Diagramme (allgemein: Äquivalenz unterschiedlicher Lösungswege); umkehrbare logische Schlüsse, logische Äquivalenz, ...)
- **Struktur** (algebraische Struktur, Ordnungsstruktur, topologische Struktur)
- **Invarianz** (ebene/räumliche Formen und Strukturen, klassenbildende Eigenschaften, Symbolsprache zur synchronen Behandlung sehr vieler bzw. unendlich vieler Fälle, Strukturbegriffe; Isomorphie, Homomorphie)

3.7.1 Prinzip des vorwegnehmenden Lernens

Die Behandlung eines Themas soll nicht aufgeschoben werden, bis eine endgültige abschließende Behandlung möglich erscheint, sondern ist bereits auf früheren Stufen in einfacher Form einzuleiten.

3.7.2 Prinzip der Fortsetzbarkeit

Auswahl und Behandlung eines Themas an einer bestimmten Stelle des Curriculums soll nicht ad hoc, sondern so erfolgen, dass auf höherem Niveau ein Ausbau möglich ist. Zu vermeiden sind vordergründige „didaktische" Lösungen, die später ein Umdenken erforderlich machen.

3.7.3 Aufbauprinzip

Die Schaffung einer Erkenntnis, eines Begriffs oder eines Modells und deren einfache Anwendungen haben der Begriffs- und Strukturanalyse voranzugehen.

4 Was unterrichten?

4.1 Lehrplan

Ein Beispiel eines Lehrplanes: AHS Oberstufe

https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf

(Natürlich nicht wörtlich zu lernen, wohl aber die Struktur, d.h. die Überschriften und deren ungefähre Bedeutung)

Einige Entwicklungen, die Einfluss auf die Gestaltung von Lehrplänen hatten:

- Anfang 19. Jht. Gründung der École Polytechnique in Paris, danach bald auch in anderen Städten (z.B. Wien) → Mathematik bekommt mehr Bedeutung → Gründung der ersten Realschulen → auch an Gymnasien stärkere Betonung der Mathematik.
- Um 1900: Meraner Reform: Differential- und Integralrechnung kommt in den Lehrplan.
- Um 1960: „Sputnik-Schock" → „New Math"; kommt bald in Verruf, da einige an sich nicht schlechte Lehrziele unsinnig umgesetzt werden (zu abstrakt, zu früh, Sinn für SchülerInnen (und LehrerInnen?) nicht erkennbar).
- Ab Mitte der 70er Jahre: Gegenbewegung zur New Math: Genetisches Prinzip; Betonung von Anwendungen, numerischer Taschenrechner, Stochastik
- 80er Jahre: Computer: zuerst steht Programmieren und Anwenden kleiner Programme (oft selbst geschrieben) im Vordergrund; Verwenden professioneller Software nimmt bald zu (Textverarbeitung, Excel, Funktionszeichenprogramme, ...); Programmieren – wenn überhaupt – meist nur mehr im neu eingeführten Schulfach Informatik
- 90er Jahre: Computeralgebra: Österreich = erstes Land der Welt mit Generallizenz für alle AHS; verschiedene Projekte machen Österreich zum viel beachteten Pionier

Kritik an der Art der Erstellung von Lehrplänen

- oft ungenügende Begründung der Lehrziele, es fehlt der Zusammenhang zwischen allgemeinen Zielen (in Präambeln) und Inhalten.
- Lehrplan nicht öffentlich erstellt

- Auswahl der „Experten": Wer gilt als kompetent, um an der Lehrplanerstellung mitzuarbeiten? Lehrer? Landesschulinspektoren? Uni-Didaktiker? Uni-Mathematiker? Pädagogen? Psychologen? ....?? (Es gab einige Kuriositäten!)
- Mitglieder der LP-Kommissionen bringen oft nur ihre eigenen (nicht selten unreflektierten) Erfahrungen ein.
- Überprüfung der Realisierbarkeit: Erprobungszeit vor Inkrafttreten fehlt. (Reicht kaum aus, Schulbücher anzupassen – und approbieren zu lassen. Approbationskommissionen: gleiche Problematik wie LP-Kommissionen.)
- Mangelhafte Abstimmung zwischen „benachbarten“ Gegenständen
- Mangelhafte Abstimmung zwischen verschiedenen Schultypen (Z.B. unterschiedliche Aufteilung des selben Stoffes in verschiedenen Schultypen auf jeweils andere Jahrgänge täuscht eine rationale Begründbarkeit vor, die nie gegeben ist, sondern sich nur aus der hochgradigen Unkoordiniertheit zufällig ergibt.)

4.2 Lehr-/Lernziele

Lehrziel = gewünschtes Verhalten, kann selbst gesetztes Ziel sein oder kann von außen kommen (Gesellschaft, Eltern, Lehrer, ...).

Erster Schritt in jedem von außen gelenkten Lernprozess muss (sollte idealerweise) sein: der Lernende macht sich das **Lehrziel** zu seinem **eigenen Lernziel**, d. h. er muss das Ziel erreichen <u>wollen</u>; ohne dieses Wollen gibt es kein echtes Lernen. Das Wollen kann vom Stoff kommen (intrinsische Motivation) oder aus Wunsch nach Belohnung (incl. Aufsteigen, Matura, ...) bzw. Vermeidung von Strafe.

Lehren ist nicht nur Vortragen, sondern allgemeiner: **Organisieren von Lernprozessen**, d. h. Handeln des Lehrers / der Lehrerin, das bei SchülerInnen **aktive Lernprozesse** auslöst.

Ohne Aktivität des Schülers ist der/die Lehrer/in machtlos! Der/die Schüler/in muss sich dessen bewusst sein, insb. bewusst sein, dass er/sie letztlich für seinen/ihren Lernerfolg selbst verantwortlich ist. (Es gibt keinen Nürnberger Trichter!)

Eine Einteilung von Lehrzielen (eine andere Unterscheidung folgt in Kapitel 4.6):

- kognitive Lehrziele (beziehen sich auf Wissen, Inhalte, Stoff, ...)
- affektive Lehrziele (beziehen sich auf Einstellungen, Haltungen, ...)
- psychomotorische Lehrziele (beziehen sich auf manuelle Fertigkeiten)

Lehrzielprobleme

1. ***Formulierungsproblem:*** Wie sollen Lehrziele formuliert werden, dass (einigermaßen) feststellbar ist, ob und inwieweit sie vom Lernenden erreicht worden sind. → **Lehrzieloperationalisierung**:

   Präzisere Beschreibung des erwünschten Endverhaltens („schwammige“ Wörter vermeiden!)

   Angabe der Bedingungen, unter denen eine Leistung erbracht werden soll.

   Welche Leistung ist noch akzeptabel (positiv)? Ggf. weitere Abstufungen (Noten).

   Negative Auswüchse: Lehrzielbanken (Atomisierung von Aufgaben bzw. Lernprozessen)

   Wichtig: Angabe von Bedingungen, unter denen bestimmte Leistungen zu erbringen sind. (→ Operationalisierung; siehe unten)
2. ***Kontrollproblem:*** Wie ist Lernerfolg sinnvoll kontrollierbar? (Hängt eng mit Punkt 1 zusammen)
3. ***Niveauproblem*** (→ Taxonomien, allgemeine Lehrziele; vgl. später!)
4. ***Berechtigungsproblem:*** Ist ein Lehrziel berechtigt? Ist es noch zeitgemäß? Sind andere Lehrziele vielleicht wichtiger? Zu viele Lehrziele? („Entrümpelung“!) Wer entscheidet über Lehrziele und deren Verbindlichkeit? (Lehrplankommission, Demokratie ↔ Minderheitenrechte)
5. ***Lehrzielfindungsproblem:*** Wie findet man Lehrziele? Wie wählt man aus? (Vgl. Kapitel 4.7: Auswahlproblem; man findet immer viel mehr Ziele als man in der Schule realisieren kann.)

4.3 Lehrzieltaxonomien

Taxonomien sind hierarchisch geordnete Schemata von Lehrzielniveaus.

Ziel der Taxonomien für den/die Lehrer/in in der Praxis: sie sollen stets daran erinnern zu überlegen, ob (insb. durch Prüfungsdruck – auf Schüler/in und Lehrer/in!) die niedrigen Lehrziele zu sehr dominieren, d.h. Taxonomien sollen Blick und Bewusstsein schärfen, auch höhere Lehrziele bewusst und aktiv anzupeilen – und zwar langfristig!

Taxonomien für kognitive Lehrziele

Taxonomie kognitiver Lehrziele **nach Bloom** (ursprünglich: Hilfsmittel zur Beurteilung und zum Vergleich von Tests in verschiedenen Fächern):

1. Wissen
2. Verstehen
3. Anwenden
4. Analyse
5. Synthese
6. Bewertung

Probleme:

Wissen ohne Verstehen? ($\rightarrow$ siehe unten: Taxonomie von Zech)

Anwenden ohne Analyse?

Problemlösen ohne Synthese?

Bewerten ist bereits ansatzweise im anwendungsorientierten und projektorientierten Unterricht vorhanden (Begrenztheit mathematischer Modelle, Verwendbarkeit von Mathematik in Technik, Wirtschaft, Gesellschaft: Was leistet sie? Was *kann* sie nicht leisten?)

Bewerten gehört auch teilweise zu affektiven Zielen. (Vgl. später!)

Bloom's Taxonomie ist auf den Mathematikunterricht nur bedingt anwendbar, daher wurden eigene Lehrzieltaxonomien für den Mathematikunterricht entwickelt.

Lehrzieltaxonomie nach Wilson:

1. Rechenfertigkeit: Kenntnis spezieller Fakten, Kenntnis der Terminologie, Fähigkeit, Algorithmen auszuführen
2. Verstehen: Kenntnis von Begriffen, Regeln, Prinzipien, und Verallgemeinerungen, Kenntnis von mathematischen Strukturen (im weitesten Sinn); Fähigkeit, Probleme von einer Darstellungsform in eine andere zu übertragen, Fähigkeit, einer Argumentationskette zu folgen; Fähigkeit, ein Problem zu lösen und zu interpretieren
3. Anwendung: Fähigkeit, Routineaufgaben zu lösen; Fähigkeit, Vergleiche anzustellen; Fähigkeit, Muster, Strukturen und Symmetrien zu erkennen
4. Analyse: Fähigkeit, Nicht-Routineaufgaben zu lösen; Fähigkeit, Beziehungen zu entdecken; Fähigkeit, Beweise auf ihre Stichhaltigkeit zu überprüfen; Fähigkeit, Verallgemeinerungen zu formulieren

Bemerkungen:

Die Hierarchie darf nicht überinterpretiert werden; sie gilt nicht absolut, sondern ist situativ bedingt:

Beispiel: die erste quadratische Gleichung ohne Hilfe (und ohne Lösungsformel) zu lösen ist eine „Nicht-Routineaufgabe“, aber der zweiten derartigen Gleichung wird es eine Routineaufgabe.

Lehrzieltaxonomie nach Zech:

Problem: Ist Kenntnis ohne Verständnis überhaupt möglich? Bzw. wünschenswert? Daher dreht Zech die Reihenfolge um:

1 Verständnis*)

2 Kenntnis von Sachverhalten*)

3. Beherrschung von Rechenverfahren, algebraischen, geom. Verfahren, ...

4. Analyse und einfache Anwendungen

5. Synthese und eigentliches Problemlösen

*) *Mein Kompromiss*: 1 und 2 nicht hierarchisch nacheinander, sondern verzahnt!

4.4 Affektive Lehrziele

zielen ab auf Haltungen, innere Zuwendung, Lernbereitschaft, Motivation Im Gegensatz zu den kognitiven Lehrzielen, bei denen man nicht weniger als nichts wissen kann, gibt es bei affektiven Zielen nicht nur das Fehlen positiver Haltungen, sondern auch unerwünschte Haltungen wie Aversionen u. Ähnl.

Bloom hat auch eine Taxonomie affektiver Ziele erarbeitet, diese ist aber für Mathematik kaum aussagekräftig.

Affektive Lehrziele nach Wittmann (Auswahl)**:**

- Freude, Interesse an M, pos. Einstellung zu M entwickeln
- Selbständigkeit, Selbstvertrauen entwickeln und zeigen („Ich will die Aufgabe alleine lösen können.“)
- Bereitschaft mitzumachen, Freude an gemeinsamer Arbeit empfinden, anderen helfen ***wollen***, von anderen lernen ***wollen*** (soziale Ziele!),
- Neues lernen und verstehen ***wollen*** (nicht nur Fakten, sondern auch Zusammenhänge)

- Freude an Mathematik empfinden (wollen), Nützlichkeit von Mathematik, Klarheit / Schönheit von Mathematik, ...erkennen und schätzen, ...
- Frustrationen durchhalten: nicht passiv („leidend“) ertragen sondern aktiv („sportlich“) überwinden

Achtung: der/die Lehrer/in ist Vorbild!

Überprüfung des Erreichens affektiver Ziele:

Schwierig! Affektive Ziele sind nur langfristig zu erreichen!

- Äußerungen, Haltungen beobachten, thematisieren und bewerten (im positiven Fall auch in die Note einfließen lassen.)
- Beobachtung der Heftführung (aber: was tun mit einem „genialen Chaoten“?)
- Beobachtung der freiwilligen Aktivitäten, der selbständigen Aktivitäten.
- in Gruppen diskutieren und berichten lassen
- Schülerbefragungen (mündlich oder schriftlich, ggf. auch anonym)
- Rollenspiele
- Herausfinden (z.B. durch Befragungen oder Rollenspiele), ob Aversionen existieren; ernst nehmen, thematisieren; sich als Lehrer zwar verständnisvoll, aber an der Beseitigung interessiert zeigen! (Es können auch Aversionen sein, die durch den Lehrer selbst hervorgerufen werden: z.B. störende bzw. ablenkende Gewohnheiten.)

4.5 Psychomotorische Ziele

beziehen sich auf die Handhabung von „Werkzeug" als Ziel und auch als Vorstufe im Zuge der geistigen Entwicklung (insb. in Grundschule und Unterstufe):

Zeichengeräte, Zirkel, Dreieck, Anfertigen von Zeichnungen und Freihandskizzen, Basteln von und Umgehen mit Modellen,...

Ende Unterstufe/Oberstufe: Taschenrechner, Computer, andere Geräte

Negatives affektives „Ziel“: stundenlang ruhig sitzen! Bewegung gezielt einplanen! Katalognummernspiele in Unterstufe, Umgruppieren zu Gruppenarbeiten, offenes Lernen, ...

4.6 Allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts

- Fächerübergreifende Lehrziele (Erziehungsziele, Lehrplanpräambeln)
- Fachspezifische Lehrziele
    - stoffunabhängige fachspezifische Lehrziele
      (allgemeine Lehrziele des Faches, Bildung- und Lehraufgabe)
    - inhaltliche Lehrziele

Erziehungsziele: Erwartungen der Gesellschaft an die Schule: z. B.:

- Fähigkeit, als unabhängiges Individuum mit sozialer Sensibilität in einer pluralistischen Gesellschaft zu leben
- Kommunikationsbereitschaft und –fähigkeit
- Mitbestimmung und Mitverantwortung in der Gesellschaft
- Innovationsbereitschaft, Kenntnis von Veränderungsprozessen, selbständiges Lernen
- konstruktiv-kritisches Verständnis von Technik und ökologischen Problemen
- Kenntnis und Verständnis von Wissenschaften und ihren Grenzen
- technologische Intelligenz
- Informationsangebot, Medien sinnvoll nutzen

Allgemeine Lehrziele des Mathematikunterrichts:

- argumentieren (als Vorform des Beweisens)
- darstellen, mathematisieren
- operieren
- interpretieren
- generalisieren
- abstrahieren
- formalisieren
- Theorieaspekt (Begriffe, formale Beweise)
- kritisches Denken
- eigenständiges Arbeiten
- selbständiges Lernen („lebenslanges Lernen“)

„Ableitung" von spezielleren aus allgemeineren Lehrzielen

Eine „Deduktion" spezieller (inhaltlicher) Lehrziele aus allgemeinen Bildungszielen wäre wünschenswert, ist aber unmöglich.

Allgemeine Lehrziele können nicht ohne inhaltliche Ziele angepeilt werden. („Es gibt kein Stricken ohne Wolle.“)

Andererseits: Ohne Begründungs- und Sinnzusammenhänge gibt es kein vernünftiges Curriculum. Es besteht eine wechselseitige Beeinflussung von allgemeinen und spezielle Lehrzielen.

Allgemeine Lehrziele und Stoffauswahl

- Inwieweit ist Stoff geeignet, möglichst vielen allgemeinen Lehrziele gerecht zu werden?
- Inwieweit ist Stoff geeignet, spezifisch mathematische Denkweisen zu repräsentieren?
- Wie wirkt sich Hereinnahme eines neuen Stoffes auf den Gesamtstoff aus? (CAS?!)
- Inwieweit weist der Stoff und die an ihm zu entfaltenden Tätigkeiten über sich hinaus?
- Inwieweit ist der Stoff bedeutend für die Berufs- / Studienvorbereitung?
- Inwieweit ist der Stoff bedeutend für sonstige Lebenssituationen?
- Ist der Stoff historisch / wissenschaftstheoretisch bedeutsam? („Fundamentale Ideen der Mathematik“!)
- Inwieweit sind traditionalistische Argumentationen (Kontinuität von Bildung) zu berücksichtigen?

Neben der Rechtfertigung *einzelner* Inhalte ist auch zu berücksichtigen, dass die Gesamtheit der Inhalte ein adäquates Bild von Mathematik vermittelt: Verfahren, Theorie, Anwendungen (Modellbildungen), Kulturgut, Prozesscharakter, ... (***Sinn/Sinnhaftigkeit*** von Mathematik!)

Es gibt keine eindeutigen und schon gar keine endgültigen Antworten auf das Problem der Stoffauswahl.

4.7 Lehrzielfindung

Bildung und Analyse von Lebenssituationen

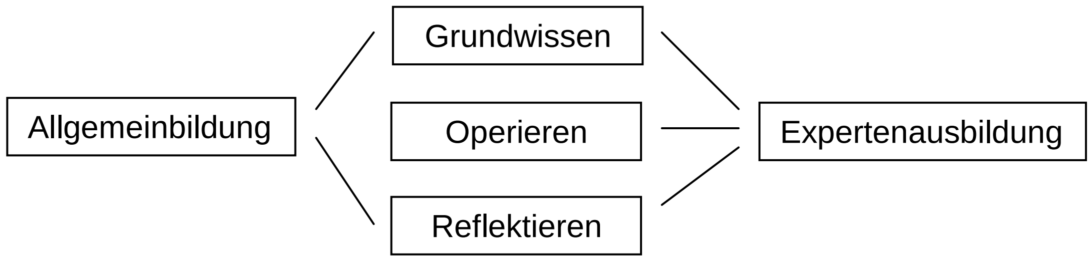
1. Analyse von Lebenssituationen → Ermittlung von Qualifikationen → Lehrziele
2. Erziehung durch Bildung: Vermittlung von Inhalten und Methoden (vor allem an Wissenschaften orientiert) rüstet den jungen Menschen zur Bewältigung vieler möglicher Lebenssituationen

Was ist „Bildung“? Versuch von Antworten in diversen **Bildungstheorien.**

Ich beschränke mich hier nur auf einen Ansatz von **Roland Fischer: Höhere mathematische Allgemeinbildung**

Welches Ziel soll der Mathematikunterricht insbesondere an AHS (Oberstufe) verfolgen? Was ist Allgemeinbildung im Mathematikunterricht?

Allgemeinbildung bedeutet nach Fischer: Kommunikationsfähigkeit mit Experten (und mit Laien)



Versuch einer Erklärung am Beispiel eines Richters (in einem sehr komplexen Prozess) als Beispiel eines allgemein gebildeten Laien:

Um zu entscheiden, welche Gutachten er anfordern soll, muss er von möglichst vielen (allen?) Wissenschaftsbereichen ein Grundwissen (eine Grundvorstellung) haben.

Die Gutachten erstellen dann die Experten der jeweiligen Bereiche.(„Operieren“)

Um die Ergebnisse der Experten, d.h. deren Gutachten, lesen und verstehen zu können und sie sinnvoll in seinen Prozess anzuwenden bzw. über die Verwendbarkeit der (u. U. widersprüchlichen) Gutachen zu entscheiden, braucht er wieder ein entsprechendes Wissen: „Reflexionswissen“.

Konsequenzen für den (Mathematik)Unterricht:

- Betonung von Grundvorstellungen (vgl. 4.8 und 4.9).
- Reduktion des Operierens
- Dafür Forcieren von Reflexionswissen

Die Fischersche Bildungstheorie hat sich auch in den Standards und im Kompetenzmodell (vgl. später) niedergeschlagen.

4.8 Beispiele für Grundvorstellungen

Grundvorstellungen zum Differenzenquotienten

- Der Differenzenquotient ist das Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente.
- Der Differenzenquotient ist die Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit
- Der Differenzenquotient ist jener Faktor, mit dem man die Änderung der Argumente multiplizieren muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten.
- Ist der Differenzenquotient positiv, so „steigt die Funktion insgesamt“ (d.h. steigt mehr als sie fällt)
- Ist der Differenzenquotient negativ, so „nimmt die Funktion insgesamt ab“.
- Ist der Differenzenquotient =0, „so bleibt die Funktion insgesamt gleich“.
- Der Differenzenquotient gibt die Steigung der Sekante an.
- Der Differenzenquotient einer linearen Funktion $x \mapsto kx + d$ ist gleich der Steigung k.

Deutungen in verschiedenen Kontexten:

- Steigung der Sekante
- mittlere Geschwindigkeit
- mittlere Beschleunigung
- mittlere Leistung
- mittlere Stromstärke
- mittlere Wärmekapazität
- mittlerer Kostenzuwachs pro Produktionseinheit
- mittlere Luftdruckabnahme pro Meter (bzw. Kilometer) Höhenzuwachs
- mittlere Abnahme der Teilchenzahl bzw. Masse eines radioaktiven Stoffes pro Zeiteinheit
- mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Infektion
- mittlere Krümmung einer Kurve
-

Grundvorstellungen zum Differenzialquotienten

Im Sinne des Genetischen Prinzips soll man auf anschaulichen, heuristischen Vorstellungen aufbauen und erst später exaktifizieren. Etwa aufbauend auf der mittleren Geschwindigkeit Problematisieren des Begriffs „Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt“ (oder „Momentangeschwindigkeit“).

Dabei $\lim\limits_{z \to t} ...$ als Abkürzung für: *„Wenn sich z unbegrenzt t nähert, dann nähert sich ... unbegrenzt ...“*

Wichtigste Grundvorstellung:

- Der Differentialquotient f ’(x) ist annähernd gleich dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, wenn Δx relativ klein ist.

Damit ergeben sich unmittelbar **weitere Grundvorstellungen** aus jenen des Differenzenquotienten:

- Der Differentialquotient ist ***ungefähr*** gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente.
- Der Differentialquotient ist ***ungefähr*** gleich der Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit
- Der Differentialquotient ist ***ungefähr*** gleich jenem Faktor, mit dem man die Änderung der Argumente multiplizieren muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten.
- Der Differentialquotient gibt die Steigung der Tangente an. (Was ist eigentlich eine Tangente? Wie kann dieser Begriff definiert werden?)
- Der Differentialquotient einer linearen Funktion $x \mapsto kx + d$ ist gleich der Steigung k.
- Das Vorzeichen des Differentialquotienten: Was besagt $f'(x)>0 \ \forall x\in[a;b]$? Was besagt $f'(x)<0 \ \forall x\in[a;b]$? (Nicht nur $f'(x)=0$!!)
- Was sind „Differentiale“?

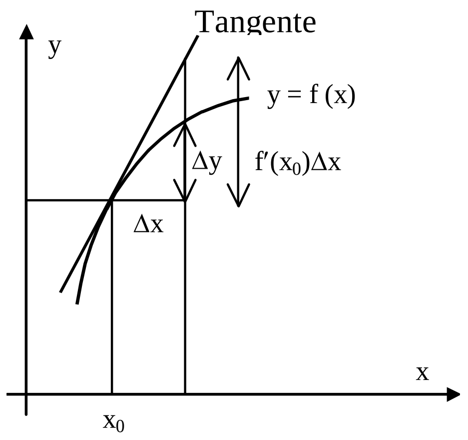
Deutungen des Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten:

- Geschwindigkeit
- Beschleunigung
- Zerfallsgeschwindigkeit eines radioaktiven Stoffes
- Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Infektion
- Luftdruckänderung
- Stromstärke
- Grenzkosten (s. u.)
- Elastizität (s. u.)
- Fehlerrechnung (s. u.)
- Krümmung einer Kurve (s. u.)
- Richtungsfeld (s. u.)

Fehlerrechnung

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$\approx f'(x_0)\, \Delta x$



Absoluter Fehler:

$|\Delta y| \approx |f'(x)|\, |\Delta x|$,

Relativer Fehler:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{f'(x)}{y}\right| |\Delta x| .$$

Beispiel: In welchen Fehlergrenzen bewegt sich das Volumen einer Kugel, deren Durchmesser mit $d = 4{,}5 \pm 0{,}1$ cm gemessen wurde?

Das Kugelvolumen V in Abhängigkeit vom Durchmesser d beträgt $V(d) = \pi d^3/6$, die erste Ableitung lautet $V'(d) = \pi d^2/2$. Zum Messwert $d_0 = 4{,}5$ cm und zur Toleranz $\Delta d = 0{,}1$ cm erhält man somit das Volumen $V_0 = V(d_0) = 47{,}71\ \text{cm}^3$ und den absoluten Fehler

$$|\Delta V| \approx |V'(d_0)|\, |\Delta d| = \pi\, 4{,}5^2/2\ 0{,}1 = 3{,}18\ \text{cm}^3,$$

also: $V = V_0 \pm \Delta V = 47{,}71 \pm 3{,}18\ \text{cm}^3$

bzw. $44{,}53\ \text{cm}^3 \le V \le 50{,}89\ \text{cm}^3$.

Der relative Fehler beträgt

$$\left|\frac{\Delta V}{V_0}\right| \approx \left|\frac{V'(d_0)}{V_o}\right| |\Delta d| = \left|\frac{\frac{\pi\, d_0^{\,2}}{2}\Delta d}{\frac{\pi\, d_0^{\,3}}{6}}\right| = 3\left|\frac{\Delta d}{d_0}\right| = 0{,}067 = 6{,}7\%$$

und ist stets dreimal so groß wie der relative Fehler von d.

Grenzkosten:

$K'(x) \approx$ Zuwachs der Kosten pro Mengeneinheit in Abhängigkeit von der produzierten Menge x, „Kosten der letzten Einheit“:

$K'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0} \approx \frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0}$, wenn x nahe bei x_0 liegt, also wenn $|x - x_0|$ sehr klein im Verhältnis zu x_0 ist (man schreibt dafür: $|x - x_0| << x_0$).

Setzt man insbesondere $x = x_0 + 1$, so erhält man: $K'(x_0) \approx K(x_0+1) - K(x_0)$

bzw. $K(x_0+1) \approx K(x_0) + K'(x_0)$

Elastizität:

$\varepsilon = \frac{x}{K(x)} \cdot K'(x)$ gibt an, um wie viel % sich K ungefähr ändert, wenn sich x um 1% ändert.

Denn: $K'(x) \approx \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x}$, wenn $|\Delta x|$ klein ist.

Sei $\Delta x = 0{,}01x$ (Erhöhung um 1%), dann gilt:

$$\varepsilon \approx \frac{x}{K(x)} \cdot \frac{K(x + 0{,}01x) - K(x)}{0{,}01x} = 100 \cdot \frac{K(1{,}01x) - K(x)}{K(x)}$$

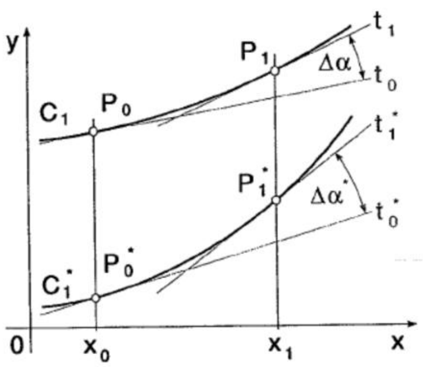
$$\Rightarrow K(1{,}01x) - K(x) \approx \frac{K(x) \cdot \varepsilon}{100} \Rightarrow K(1{,}01x) \approx K(x) \cdot (1 + \frac{\varepsilon}{100})$$

Krümmung einer Kurve:

mittlere Krümmung: $\frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$

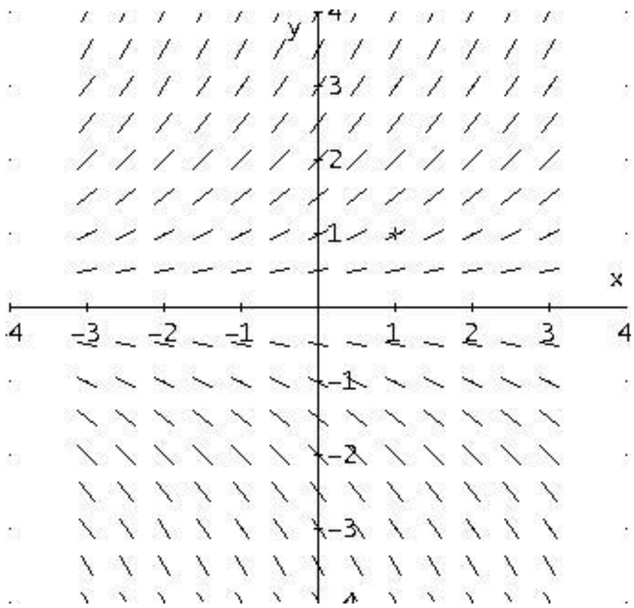
Krümmung in einem Punkt P der Kurve

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

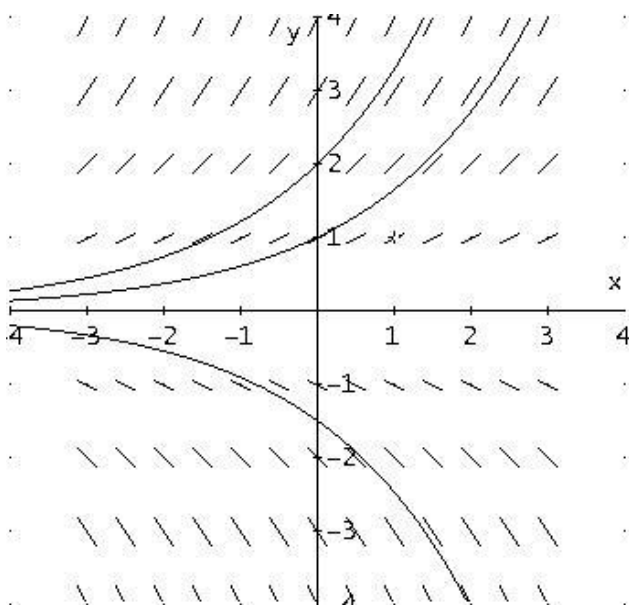


Richtungsfeld einer Differenzialgleichung

Beispiel: $y' = 0{,}5 \cdot y$
Jedem Punkt (x,y) wird das „Steigungselement“ $0{,}5 \cdot y$ zugeordnet:



Jede Funktion, die in das Richtungsfeld „passt“, ist eine Lösung der Differenzialgleichung:



Durch Angabe einer Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ kann aus den unendlich vielen Lösungskurven jene Lösung der Differenzialgleichung ermittelt werden, die auch die Anfangsbedingung erfüllt.

4.9 Standards im Mathematikunterricht; Kompetenzmodell

Von der Inputsteuerung durch Lehrpläne zur Outputsteuerung

Trotz gleicher österreichweiter Rahmenbedingungen (z.B. Lehrpläne) ergeben sich unterschiedliche Erträge (PISA-Studie, Rückmeldungen der Universitäten usw.). Akzeptiert man die Vielfalt im Schulwesen und befürwortet die verstärkte Autonomie, erhebt aber andererseits den Anspruch auf gemeinsame Grundbildung aller Schülerinnen und Schüler, muss man in Form einer Outputsteuerung festschreiben, was die Schülerinnen und Schüler an bestimmten Stellen ihres Bildungsweges können sollen.

Standards und Lehrpläne

Lehrpläne: Legen vorweg fest, was die Schüler lernen sollen (Inputsteuerung)

Standards (incl. Zentralmatura): legen fest, was die Schüler (an wichtigen Zeitpunkten ihrer Bildungslaufbahn) können sollen (Outputsteuerung)

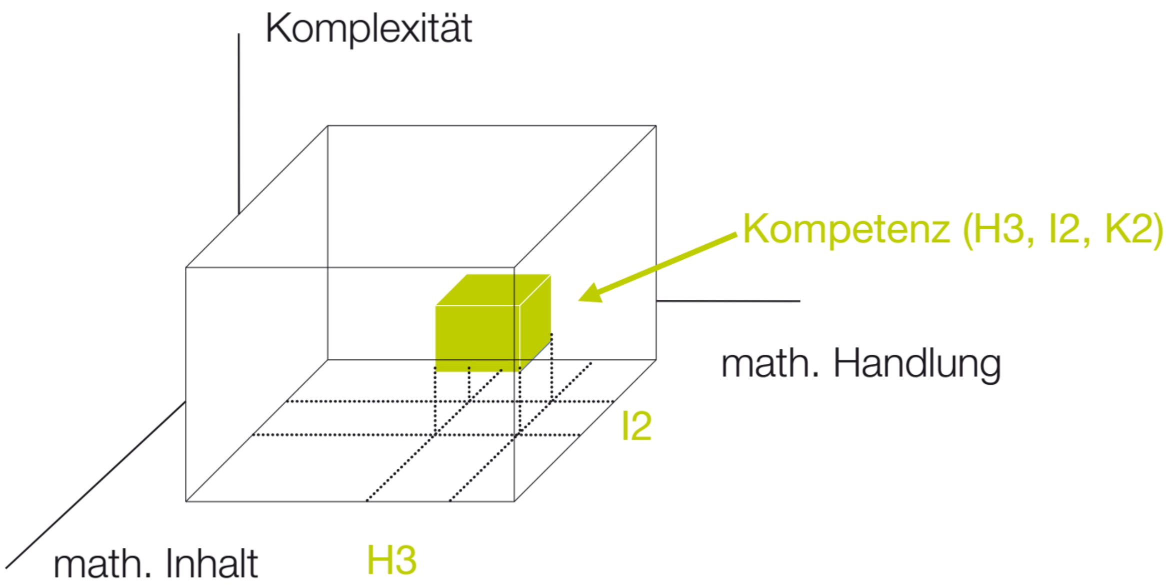
Kompetenzen

Unter **Kompetenzen** versteht man die *„bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen (bedeutet: willentliche Steuerung) und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.“*

(Weinert, Franz E. (Hrsg.): Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim und Basel 2001, 27 f.)

Die Fischersche Bildungstheorie sowie der Kompetenzbegriff und darauf aufbauende Kompetenzmodelle bilden die Grundlage für Standardstests und Zentralmatura.

Kompetenzmodell für die 8. Schulstufe („M8“):



Handlungsbereiche

Darstellen, Modellbilden (H1)
Rechnen, Operieren (H2)
Interpretieren (H3)
Argumentieren, Begründen (H4)

Inhaltsbereiche

Zahlen und Maße (I1)
Variable, funktionale Abhängigkeiten (I2)
Geometrische Figuren und Körper (I3)
Statistische Darstellung und Kenngrößen (I4)

Komplexitätsbereiche

Einsetzen von Grundkenntnissen und –fertigkeiten (K1)
Herstellen von Verbindungen (K2)
Einsetzen von Reflxionswissen, Reflektieren (K3)

Ziel: Jede Aufgabenstellung soll durch ein Tripel wie etwa (H3, I2, K2) charakterisiert werden.

Für eine genauere Beschreibung siehe:

https://www.**bifie**.at/system/.../bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf
(6 Seiten)

bzw:

Das Klagenfurter Standardmodell Version 4-07
http://www.uni-klu.ac.at/idm/inhalt/322.htm
(120 Seiten)

In diesem Konvolut werden die einzelnen Bereiche ausführlich beschrieben, z. B.:

K1	**Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten**	*Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten* meint die Wiedergabe oder direkte Anwendung von grundlegenden mathematischen Begriffen, Sätzen, Verfahren und Darstellungen. In der Regel ist nur reproduktives mathematisches Wissen und Können oder die aus dem Kontext unmittelbar erkennbare direkte Anwendung von mathematischen Kenntnissen bzw. Fertigkeiten geringer Komplexität erforderlich.
K2	**Herstellen von Verbindungen**	Das *Herstellen von Verbindungen* ist erforderlich, wenn der mathematische Sachverhalt und die Problemlösung komplexer sind, sodass mehrere Begriffe, Sätze, Verfahren, Darstellungen bzw. Darstellungsformen (aus verschiedenen mathematischen Gebieten) oder auch verschiedene mathematische Tätigkeiten in geeigneter Weise miteinander verbunden werden müssen.
K3	**Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren**	*Reflektieren* meint das Nachdenken über Zusammenhänge, die aus dem dargelegten mathematischen Sachverhalt nicht unmittelbar ablesbar sind. Reflektieren umfasst das Nachdenken über eine mathematische Vorgehensweise (Lösungsweg/Lösung, Alternativen), über Vor- und Nachteile von Darstellungen/Darstellungsformen bzw. über mathematische Modelle (Modellannahmen, Idealisierungen, Aussagekraft, Grenzen des Modells, Modellalternativen) im jeweiligen Kontext sowie das Nachdenken über (vorgegebene) Interpretationen, Argumentationen oder Begründungen. *Reflexionswissen* ist ein anhand entsprechender Nachdenkprozesse entwickeltes Wissen über Mathematik. Reflexion(swissen) kann in vielfältiger Weise sichtbar werden: durch Dokumentation von Lösungswegen, durch entsprechende Entscheidungen, oft aber auch durch entsprechende Argumentationen und Begründungen.

Weiters gibt es für jede Kombination, also für jedes Tripel (Hx, Iy, Kz) mit $1 \le x,y \le 4$, $1 \le z \le 3$ eine konkrete Aufgabenstellung samt Begründung für die jeweilige Charakterisierung, z. B.:

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H3: Interpretieren
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Mädchen in der Überzahl

In einer Schule sind die Mädchen deutlich in der Überzahl. In jeder einzelnen Klasse gilt sogar:

$M > B \cdot 2$ M……Anzahl der Mädchen
B…….Anzahl der Buben

Aufgabe: Wenn in einer Klasse 8 Buben sind, welche der folgenden Aussagen über die Anzahl der Mädchen dieser Klasse wird durch die Ungleichung ausgedrückt?

Lösung:

- ☐ Es sind mindestens 15.
- ☐ Es sind höchstens 15.
- ☐ Es sind mindestens 16.
- ☐ Es sind höchstens 16.
- ☐ Es sind mindestens 17.
- ☐ Es sind höchstens 17.

Richtige Lösung:

Es sind mindestens 17.

Angesprochene Kompetenz: H3-I2-K3

H3: Die Aufgabe verlangt das Einsetzen eines Wertes für eine Variable und das Ablesen einer Information aus einer Ungleichung, vor allem aber das verbal richtige Deuten dieser Informationen im Kontext der Aufgabe.

I2: Die Darstellung in der Angabe ist eine Ungleichung.

K3: Das Deuten einer einfachen Ungleichung wäre elementar; als Antworten werden hier aber keine Interpretationen wie „größer als“ bzw. „mehr als“ angeboten. Vielmehr sind Formulierungen mit „höchstens“ bzw. „mindestens“ gegeben, die allerdings nur für $\leq$ bzw. $\geq$ direkte „Entsprechungen“ sind. Die geforderte Leistung besteht also im Deuten von Formulierungen bzw. im Verändern der Ungleichung. Es gilt hier also nachzudenken über die Beziehungen unterschiedlicher verbaler Interpretationen, insbesondere über das Verhältnis von „größer als“ zu „mindestens“.

Auch für die AHS-Oberstufe war ein ähnliches Kompetenzmodell („M12“) in Diskussion, wurde aber durch die Zentralmatura praktisch obsolet. Bei der Zentralmatura bildet ebenfalls das Fischersche Konzept „Höhere mathematische Allgemeinbildung“ die bildungstheoretische Grundlage. Insbesondere wird besonderes Gewicht auf Grundwissen gelegt.

Näheres dazu siehe:

Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik.

Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen - gültig für alle SchülerInnen, die ab dem Haupttermin 2018 maturieren (Stand Oktober 2015). Projektteam: V.Aue, M. Frebort, M. Hohenwarter, M. Liebscher, E. Sattlberger, I. Schirmer, H. S. Siller, G. Vormayr, M. Weiß, E. Willau

Redaktionelle Änderung für die Neuauflage: G. Gurtner, S. Kramer, G. Steinlchner-Wallpach

https://www.bifie.at/node/1442

Die Zentralmatura an BHS ist anders strukturiert. Darauf kann hier nicht näher eingegangen werden.