

# Theorienstrukturalismus in einem „starren“ Rahmenwerk

Christian Damböck  
Institut Wiener Kreis  
6.5.2011

# 1. Das starre Rahmenwerk

# Das strukturalistische Rahmenwerk

- Im Strukturalismus liegen Strukturen einer Spezies

$$D_1, \dots, D_k, R_1, \dots, R_n$$

Zugrunde. Die  $D_i$  können beliebige Mengen sein, die  $R_i$  sind Relationen eines festgesetzten Typs.

- Jedes  $R_i$  muss also als Typ in der Typenhierarchie über den Basissorten  $D_1, \dots, D_k$  definiert sein

# Das starre Rahmenwerk

- In einem starren Rahmenwerk stammen, im Gegensatz dazu, alle  $D_i$  immer von einer fix vorgegebenen Menge  $s_i$  ab, sodass  $D_i \subseteq s_i$
- Diese Festsetzung entspricht van Fraassens Konzept einer „semiinterpretierten Sprache“
- Typen sind, im Prinzip, wie im strukturalistischen Rahmenwerk gebildet
- Strukturen können dann allerdings nur über die eingeschränkten Mengen  $s_i$  hinweg variieren, es gibt also eine auf diesen Mengen gebildete *starre Menge von Strukturen*

# Starre Designatoren

- Die Elemente der zugrundeliegenden Sorten  $s_i$  sind aufgefasst als Namen, die starr auf ein bestimmtes Objekt referieren (vgl. Kripkes klassisches Konzept)
- Die Besonderheit, im starren Rahmenwerk, ist aber, dass nicht nur Objekte aus Basissorten (Objekte erster Stufe) so spezifiziert werden, sondern auch alle Objekte höherer Stufe, also Objekte, die Relationen festsetzen
- Sowohl Individuen als auch Relationen werden hier anhand von starren Designatoren eingeführt

# Starre Typisierung

Das bedeutet insbesondere, dass jeder Typ

$$(s, s_1, \dots, s_n),$$

also jede als valider Typ spezifizierte Folge von Sorten (solange sie mehr als zwei Elemente enthält) so verstanden werden muss, dass die erste Sorte  $s$  die starren Namen („labels“) der jeweiligen Relationen repräsentiert, die Sorten  $s_1, \dots, s_n$  hingegen die Argumente der Relation.

# Technische Vorteile

- Die starre Typisierung liefert eine Schnittstelle wo jeder Bestandteil der Ontologie einer Theorie direkt in der Objektsprache adressiert werden kann (Individuen *und* Relationen)
- Eine nicht-modale Logik lässt sich in natürlicher Weise (als existenzannahmenfreie Logik) definieren, im Rahmen der Aussagenlogik bzw. der Prädikatenlogik erster Stufe
- Modales Quantifizieren über Strukturen, Formeln und atomare Objekte (rigide Designatoren) dieser Basislogik ist praktisch ohne Einschränkung möglich (wird für die Spezifikation von Theorienelementen und anderen Objekten höherer Ordnung benötigt)

## 2. Mehr Strukturalismus oder weniger Strukturalismus?

# Empirische Wissenschaften

- Patrick Suppes: „Philosophy of Science should use mathematics, and not meta-mathematics“
- Empirische Wissenschaften benötigen andere formale Rahmenwerke als reine Mathematik
- Der von Patrick Suppes vorgeschlagene Rahmen, der von Sneed und Stegmüller übernommen wurde: *mengentheoretische Prädikate*

# Merkmale einer Strukturspezies

- Im Theorienstrukturalismus wird eine Theorie (in ihrer einfachsten Form) als *Klasse von Strukturen* einer bestimmten Spezies

$$D_1, \dots, D_k, R_1, \dots, R_n$$

spezifiziert, plus

- einer Menge von *Merkmalen* der Strukturen dieser Spezies, die im Allgemeinen in der Gestalt von *Axiomen* vorliegen.

# Unterschied zur reinen Mathematik?

- Hier liegt zunächst nicht der geringste Unterschied zur reinen Mathematik vor.
- Eine mathematische Theorie wie die Peano-Arithmetik wird im Allgemeinen genau in einem solchen Rahmenwerk spezifiziert
- Wie kann man also eine solche reine Strukturbeschreibung „empirisieren“?

# Erste Strategie: Theoretische Terme

- Eine erste Strategie, der sich der Theorienstrukturalismus bedient, ist die Spezifikation eines Teils der Ontologie einer Theorie als theoretisch und eines Teils als nicht-theoretisch
- Nur die theoretischen Terme werden „rein strukturell“ charakterisiert, der Rest nicht (beispielsweise können nur die theoretischen Terme Ramsey-eliminiert werden)

# Zweite Strategie: konkrete Strukturverbindungen

- Die zweite Strategie zur Überwindung reiner Strukturbeschreibungen, die man im Theorienstrukturalismus findet, ist die Einführung konkreter Verbindungen zwischen Modellen einer Theorie, nach dem Muster:
- Wenn Modell 1 und Modell 2 das Objekt c enthalten, dann ...
- Beispielsweise liefern „Constraints“ solche konkreten Strukturverbindungen

# Das Problem: kein modelltheoretischer Ansatz

- Sobald wir nicht-theoretische Terme und konkrete Strukturverbindungen etablieren ist es nicht mehr möglich eine Theorie ausschließlich anhand von axiomatischen Modellcharakterisierungen erster Stufe und entsprechenden daraus resultierenden Isomorphiebeziehungen zu charakterisieren
- Das Rahmenwerk des Theorienstrukturalismus ist also offenbar nicht strukturalistisch!

# Was tun?

- Wir haben nun im Grunde nur zwei Möglichkeiten:
- Entweder wir versuchen, den Theorienstrukturalismus so einzuschränken, dass er ein strukturalistisches Rahmenwerk im engeren Sinn wird (mehr Strukturalismus)
- Oder wir akzeptieren die Existenz nicht-theoretischer Terme und konkreter Strukturverbindungen (weniger Strukturalismus)

# Mehr Strukturalismus?

- Diese Lösung steckt in gewissem Sinn in manchen Verallgemeinerungsversuchen des Theorienstrukturalismus, vor allem in dem in (BMS) vorgeschlagenen allgemeinen Begriff der *Reduktion* einer Theorie auf eine andere, nur anhand der jeweiligen potentiellen Modelle und einer passenden Reduktionsfunktion
- Allerdings würde, wenn man diese Lösung akzeptiert, der Unterschied zwischen empirischen Theorien und Theorien der reinen Mathematik gänzlich wegfallen
- Annahme: das ist absolut nicht wünschenswert!

# Weniger Strukturalismus!

Die Identifikation nicht-theoretischer Terme, die innerhalb einer Theorie *nicht* strukturell charakterisiert werden sowie von konkreten Strukturverbindungen, die sich auf die konkreten Ontologien der Strukturen beziehen, ist offenbar ein unerlässlicher Bestandteil eines formalen Rahmenwerkes für Theorien der empirischen Wissenschaften

# Theorienstrukturalismus ist starr

- Mit anderen Worten: es ist ein unerlässlicher Bestandteil des Theorienstrukturalismus, dass dieser starre Bestandteile enthält.
- Meine Kritik besteht nur darin, dass diese starren Bestandteile nicht konsequent genug etabliert wurden
- Grund: das verwendete Metarahmenwerk (Suppes' Konzept des mengentheoretischen Prädikates) ist, für sich genommen, nicht starr und somit für gegenständlichen Zweck im Grunde nicht geeignet

# 3. Das Problem nicht-intendierter Modelle

# Eine rationalistische Utopie

- Allerdings könnte man sich einen idealen Endzustand der Wissenschaften denken, wo (im Stil von Ideen, die an Leibniz erinnern) die ganze Welt in eindeutiger Weise rein strukturalistisch charakterisiert ist (in einer Theorie, die nur ein Modell besitzt)
- Vgl. Rudolf Carnaps berühmte Metapher des Netzes von Bahnlinien

# Die andere Seite des Spektrums

- Im krassen Gegensatz zur rationalistischen Utopie einer „optimal verästelten“ Theorie stehen die mehr oder weniger einfachen Theorien realer empirischer Wissenschaften
- Je einfacher eine Theorie, desto extremer der Gegensatz
- Das heißt: je weniger Mengen, je weniger Relationen, je weniger Axiome eine Theorie enthält, desto weniger entspricht sie der rationalistisch-strukturalistischen Utopie

# Eine extrem einfache Theorie

- Eine extrem einfache Theorie behauptet bloß dass ein bestimmtes Objekt eine bestimmte Eigenschaft hat, etwa: „Schnee ist weiß“

- Strukturalistisch: Strukturen  $D, R$ 
  - $D$  einelementige Menge
  - $R$  Prädikat über  $D$
  - Ch.:  $D$  ist einelementig
  - Axiom:  $\forall x \in D: R(x)$

} riesige Menge von Modellen
- Starr:
  - Sorten  $(s, s')$
  - $s = \{\text{Schnee}\}$
  - $s' = \{\text{weiß}\}$
  - Typen  $\{(s', s)\}$
  - Axiom:  $\text{weiß}(\text{Schnee})$

} genau ein Modell

# Einfache Theorien führen zu nicht-intendierten Modellen

Während, in diesem Beispiel, das starre Rahmenwerk eine Theorie implementiert, die genau ein Modell besitzt, nämlich die Struktur in der das Objekt 'Schnee' das Merkmal 'weiß' besitzt, erhalten wir im Fall des Theorienstrukturalismus eine gigantische Anzahl von Modellen: jede Struktur, deren Domänenmenge einelementig ist und wo dieses eine Element das Merkmal R aufweist

# „Intendierte Anwendungen“

- Im strukturalistischen Fall ist es völlig gleichgültig, welche Objekte die Domäne des Modells einer Theorie bilden bzw. welche Merkmale die Relationen in einem Modell repräsentieren. Was einzig und allein zählt, sind die Beziehungen, in denen sie stehen
- Die Lösung, die der Theorienstrukturalismus hier bereithält, ist, dass wir nachträglich die intendierten Anwendungen aus den Modellen einer Theorie heraussuchen müssen

# Im starren Rahmenwerk fällt dieses Problem weg

- Im starren Rahmenwerk werden immer nur diejenigen Objekte berücksichtigt, von denen in einer Theorie auch tatsächlich die Rede ist
- Die aktuellen Modelle einer Theorie und die intendierten Anwendungen sind somit, falls die Theorie korrekt spezifiziert wurde, immer identisch!
- Damit ist die Konsequenz aus obigem Postulat gezogen, dass der Theorienstrukturalismus *de facto* starr ist.

# 4. Die Identifikation der Modelle einer Theorie

# Die Modellidentifikation erfolgt auf (zumindest) fünf Ebenen

1. Die Ebene der Spezifikation der Ontologie einer Theorie
2. Die Ebene der Charakterisierung potentieller Modelle einer Theorie
3. Die Ebene der Spezifikation der Gesetze und damit der aktuellen Modelle einer Theorie
4. Die Ebene der Spezifikation der Constraints einer Theorie
5. Die Ebene der Spezifikation der intertheoretischen Verbindungen einer Theorie

# 1. Die Spezifikation der Ontologie

- Hier liegt der eigentliche Unterschied zwischen dem klassischen Theorienstrukturalismus und dem starren Vorschlag
- Im klassischen Vorschlag bleiben die Domänenmengen unspezifiziert (abgesehen von Angaben über Kardinalität u.dgl.)
- Im starren Vorschlag sind für alle Domänenmengen Grundmengen angegeben (Sorten) und alle Relationen sind eindeutig identifiziert (beides in der Gestalt starrer Designatoren)

## 2.-5. Modellidentifikation anhand von Axiomen

- Im Unterschied zur Spezifikation der Ontologie erfolgt die Festsetzung der verbleibenden Aspekte der Modellidentifikation, im starren Rahmenwerk, in voller Analogie zu klassischen Konzeption
- Allerdings ist die Logik dieses Rahmenwerks so ausdrucksstark konzipiert, dass eine Spezifikation aller Festsetzungen im Sinn von 2.-5. ohne Einschränkungen in der Gestalt von Axiomen erfolgen kann

# Die formale Struktur dieser Axiome

2. Charakterisierungen: Formeln, die nur auf ein Element der Ontologie Bezug nehmen
3. Gesetze: Formeln, die auf mehrere Elemente der Ontologie Bezug nehmen
4. Constraints: Formeln, die ein Merkmal von Mengen von Strukturen beschreiben
5. Links: Formeln, die eine Beziehung zwischen Strukturen beschreiben

# Theorieelemente

- Die allgemeine Spezifikation eines Theorieelements, im starren Rahmenwerk, sieht so aus:

$$\mathbf{T} = (B_p, \mathbb{L}_p, \mathbb{T}, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$$

$B_p$  ... Basisobjekte (objekte erster Stufe)

$\mathbb{L}_p$  ... Relationen

$\mathbb{T}$  ... theoretische Terme

$\mathcal{C}$  ... Charakterisierungen

$\mathcal{L}$  ... Gesetze

$\mathcal{E}$  ... Constraints

$\mathcal{V}$  ... Links

# Redefinition der übrigen Bestandteile

Die übrigen Bestandteile des klassischen Rahmenwerks, also die potentiellen und aktuellen Modelle, die partiellen potentiellen Modelle, Constraints, Links und der (theoretische) Inhalt einer Theorie, können dann in der Gestalt von mehr oder weniger nahe liegenden expliziten Definitionen eingeführt werden

## Definitionen der wichtigsten strukturalistischen Begriffe:

- $\mathbf{M}_p := \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \in \mu(\mathcal{C}) \wedge [\forall o \in \mathcal{S}_a: o \notin \mathbb{O} \rightarrow o \notin \mathcal{G}(\tau(o))]\}$
- $\mathbf{M} := \mathbf{M}_p \cap \mu(\mathcal{L})_s$
- $\mathbf{M}_{pp} := \{\mathcal{G} \mid \exists \mathcal{G}': \mathcal{G}' \in \mathbf{M}_p \wedge \mathcal{G} = \mathcal{G}' \setminus \mathbb{T}\}$
- $\mathbf{C}(\phi) := \{X \subseteq \mathbf{S} \mid \phi(X)\}$
- $\mathbf{L}(\phi) := \{X \in \mathbf{S} \mid \phi(X)\}$
- $\mathbf{GC} := \bigcap_{\phi \in \mathcal{E}} \mathbf{C}(\phi)$
- $\mathbf{GL} := \bigcap_{\phi \in \mathcal{V}} \mathbf{L}(\phi)$
- $\mathbf{Cn}_{th} := \wp(\mathbf{M}) \cap \mathbf{GC} \cap \wp(\mathbf{GL})$
- $\mathbf{Cn} := \{X \mid \exists X' \in \mathbf{Cn}_{th} \exists \theta:$   
 $\theta \text{ ist eine bijektive Funktion von } X \text{ nach } X'$   
 $\wedge \forall \mathcal{G}, \mathcal{G}': \mathcal{G} = \theta(\mathcal{G}') \rightarrow \mathcal{G} = \mathcal{G}' \setminus \mathbb{T}\}$

Klassische Partikelmechanik  $\mathbf{CPM} := (B_p, \mathbb{L}_p, \mathbb{T}, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{E})$

$$B_p := \{P, T, S\}$$

$$\mathbb{L}_p := \{c_1, c_2, s, m, f\}$$

$$\mathbb{T} := \{m, f\}$$

- $$\mathcal{C} := \begin{aligned} &(1) \quad P \text{ ist eine endliche, nichtleere Menge} \\ &(2) \quad c_1: T \mapsto \mathbb{R} \text{ und } c_2: T \mapsto \mathbb{R}^3 \text{ sind bijektiv} \\ &(3) \quad s: P \times T \mapsto S \text{ und } c_2 \circ s_p \circ \check{c}_1 \text{ ist glatt f\u00fcr alle } p \in P \\ &(4) \quad m: P \mapsto \mathbb{R}^+ \\ &(5) \quad f: P \times T \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} := \forall p, \alpha: m(p) D^2 r(p, \alpha) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f(p, \check{c}_1(\alpha), i) \text{ mit } r(p, \alpha) := c_2 \circ s_p \circ \check{c}_1(\alpha)$$

- $$\mathcal{E} := \begin{aligned} &(1) \quad \forall \mathcal{G}, \mathcal{G}' \in X \quad \forall p: p \in \mathcal{G}(P) \cap \mathcal{G}'(P) \rightarrow \\ &\quad \mathcal{G}(m(p)) = \mathcal{G}'(m(p)) \\ &(2) \quad \exists \circ: \pi \times \pi \mapsto \pi \text{ mit } \pi := \cup \{\mathcal{G}(P) \mid \mathcal{G} \in \mathbf{M}_p(\mathbf{CPM})\} \\ &\quad \text{und } \forall \mathcal{G} \in X \quad \forall p, p' \in \mathcal{G}(P): (p \circ p' \in \mathcal{G}(P)) \rightarrow \\ &\quad \mathcal{G}(m(p \circ p')) = \mathcal{G}(m(p)) + \mathcal{G}(m(p')) \\ &(3) \quad \forall \mathcal{G}, \mathcal{G}' \in X \quad \forall p \in \mathcal{G}(P) \cap \mathcal{G}'(P) \quad \forall t \in \mathcal{G}(T) \cap \mathcal{G}'(T) \quad \forall i: \\ &\quad \mathcal{G}(f(p, t, i)) = \mathcal{G}'(f(p, t, i)) \end{aligned}$$

$X$  ist eine freie  $\wp(\mathbf{S})$ -Variable