Formale Rahmenwerke

Eine Einführung in die philosophische Logik

von Christian Damböck

Fassung vom 22. Februar 2013

http://homepage.univie.ac.at/
christian.damboeck/texte/einfuehrung_logik.pdf

Ich fürchte, dass sich auch in dieser, teilweise stark überarbeiteten Fassung des Skriptums, wieder einige Flüchtigkeitsfehler eingeschlichen haben. Für Hinweise bin ich jederzeit dankbar:

christian.damboeck@univie.ac.at

Die mit * gekennzeichneten Abschnitte sind kein Prüfungsstoff.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Ist die Logik eine mathematische oder eine philosophische Disziplin? – Sieht man sich die Entwicklung dieses Forschungsfeldes an, dann muss die Antwort lauten: sowohl als auch! In der klassischen Phase der modernen formalen Logik (also in den ersten Jahrzehnten des zwanzigsten Jahrhunderts) wurde die Logik von Mathematikerinnen und Philosophinnen gemeinsam entwickelt, es gab hier also dezidiert keinen Unterschied zwischen einer mathematischen und einer philosophischen Herangehensweise an die Logik. Geblieben ist von dieser ursprünglichen Situation jedenfalls der Status von Logik als einer im Kern formalen, mathematischen Disziplin. Allerdings haben sich die mathematische und die philosophische Logik in den letzten Jahrzehnten als weitgehend unabhängige Untersuchungsfelder etabliert. Gemeinsam ist diesen Untersuchungsfeldern zwar immer noch der Kern von Formalismen und Theoremen der klassischen mathematischen Logik, aber jenseits davon haben sich auf beiden Seiten Forschungsfelder etabliert, die kaum mehr von Bedeutung für die jeweils andere Seite sind. Dieses Buch stellt eine Einführung in die philosophische Logik dar. Konsequenter Weise behandelt es daher zuerst den Grundstock an mathematischer Logik, den man benötigt, um philosophische Logik betreiben zu können, und es geht dann auf spezifisch philosophische Erweiterungen dieses Ausdrucksrepertoires ein: die Logik höherer Stufe, die Modallogik und die mehrwertige Logik. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, wohl aber ist es der Anspruch dieses Buches, alle wesentlichen Spielarten der philosophischen Logik zumindest vorzustellen, sofern sich diese im Rahmen der Mengentheorie durch die klassischen Formalismen der Logik höherer Stufe, der Modallogik und der mehrwertigen Logik erfassen lassen. Ausgeklammert bleiben daher etwa solche Spielarten der Logik, wie die kategoriale Logik, die substrukturale Logik und die nichtmonotone Logik. Bei der Darstellung der formalen Gesichtspunkte der Logiken wird auf Theorembeweise durchwegs verzichtet und stattdessen auf einschlägige Literatur verwiesen.

Großer Wert wird in diesem Buch auf die Entwicklung von philosophischen Motivationen gelegt. Der Standpunkt, der hier diesbezüglich eingenommen wird, ist von Rudolf Carnaps *logischem Toleranzprinzip* motiviert: es gibt keine Logik, die in eindeutiger und verbindlicher Weise irgendwelche Zusammenhänge in der Welt abbildet; es gibt also nicht *die* oder *die wahre* Logik. Logiken sind vielmehr formale Möglichkeiten, die uns die Sprache der Mathematik zur Verfügung stellt; diese Möglichkeiten ergeben aber nur dann philosophisch Sinn, wenn es uns gelingt entsprechende konkrete Anwendungen für die jeweiligen Formalismen zu liefern. Mit anderen Worten: Logik lässt sich niemals aus sich selbst heraus, auf der Ebene der formalen Theorie, rechtfertigen, sondern nur auf der Ebene von entsprechenden Erläuterungen, die angeben, wie wir eine Logik auf bestimmte konkrete Fälle in der empirischen Wirklichkeit anwenden wollen. Die Logik kann also, im Gegensatz zu einer berühmten Behauptung von Ludwig Wittgenstein, niemals für sich selbst sorgen, sie ist, ohne die Angabe konkreter empirischer Motivationen, nur ein leerer mathematischer Formalismus oder, wie Edmund Husserl es einmal formuliert hat: eine „philosophische Kinderei". Auf der anderen Seite kann gesagt werden, dass philosophisches Denken, das auf die Möglichkeit verzichtet, die formalisierbaren Aspekte unseres Denkens auch tatsächlich in eine formale, mathematische Form zu bringen, immer die Tendenz haben wird, dort, wo es Zusammenhänge gibt, die man präzise in einer Formel oder mathematischen Definition auffassen könnte, diese Zusammenhänge in unpräziser Weise, bloß schwammig und verwischend zu erfassen. In Abwandlung eines Bonmots von Kant: Logik ohne empirisch-philosophische Interpretationen ist leer, Philosophie ohne Logik ist blind.

Dieses Buch ist kein mathematischer Traktat über philosophische Logiken sondern eher ein Album von Formalismen und philosophischen Erläuterungen. Es enthält so aber, wie mir scheint, genau das was man für die meisten philosophischen Zwecke an Logik-Wissen benötigt. Um philosophische Konzepte auf einer formal-logischen Ebene erläutern zu können muss man nur sehr wenig über metalogische Theoreme und deren Herleitung wissen, aber man benötigt wesentlich mehr konzeptuelles formal-logisches Wissen als das was man in gewöhnlichen Einführungskursen vermittelt bekommt. Das liegt einfach daran, dass die meisten philosophisch wirklich interessanten Konzepte der Logik aus dem Bereich der nichtklassischen Logik kommen. Um sich mit diesen Konzepten vertraut machen zu können sollte es nicht erforderlich sein eine ganze Bibliothek an Logik-Literatur zu durchforsten. Das vorliegende Buch liefert die entsprechenden Informationen und es zeigt auch, in umfangreichen bibliographischen Anhängen, wie man überall dort, wo man in die Tiefe der metalogischen Diskussionen eindringen möchte, am schnellsten zu der dann doch erforderlich werdenden logischen Bibliothek vordringen kann. – Hier eine Schnellübersicht über das Minimalpensum an Literatur, das man benötigen würde, um für die meisten in dem Buch behandelten formal-logischen Konzepte entsprechende metalogische Erläuterungen und Theorembeweise zu erlangen. Zur mathematischen Logik: Ebbinghaus et al. (1996); zur modalen und mehrwertigen Logik: Priest (2008 [2001]); zur dort nicht behandelte dynamische Logik: Goldblatt (1992); zur bei Priest ebenfalls nicht zu findenden hybriden Logik: (Blackburn et al., 2006, Kapitel 14); zur (ebenfalls bei Priest nicht behandelten) Logik höherer Stufe, inklusive modaler und intensionaler Aspekte: Fitting (2002); zur Logik zweiter Stufe: Shapiro (2000); die starre und starre hybride Logik gehen zurück auf Damböck (2005) und Damböck (2009).

****

*Das Buch enthält einige Abschnitte, die weiterführende Aspekte der mathematischen und philosophischen Logik behandeln und bei der ersten Lektüre übergangen werden können. Diese Abschnitte sind mit einem * gekennzeichnet. (Wird das Buch als Grundlage einer vierstündigen Einführung in die philosophische Logik verwendet, könnten alle Abschnitte durchgearbeitet werden, im Fall einer zweistündigen Einführung wäre eine Beschränkung auf die nicht mit * markierten Abschnitte sinnvoll.)*

1 Mengentheoretische Präliminarien

Logik ist im Kern eine mathematische Disziplin. Die Sprache der Logik (zumindest derjenigen Spielarten, die in diesem Buch thematisiert werden) ist die Sprache der sogenannten Mengentheorie. Das heißt: wir benötigen bestimmte grundlegende mathematische Konzepte, wie den Begriff der Menge oder die Begriffe Relation, Funktion, etc., und können dann, auf der Grundlage dieser Begriffe, genau definieren, was eine Logik ist und wie sie formal aufgebaut ist. Diese *mathematischen Grundlagen der Logik* besprechen wir im gegenständlichen Kapitel. Wir beschränken uns dabei auf einige sehr grundsätzliche Bemerkungen, da wir hier weder die Mengentheorie noch die mathematische Grundlagendebatte im Detail thematisieren wollen.

Der Mengenbegriff Mengen sind diejenigen Entitäten, die die Verbindung herstellen, zwischen dem abstrakten mathematischen Reich der Zahlen, Funktionen und algebraischen Strukturen und der empirischen Wirklichkeit. Zwar gibt es in der empirischen Welt ganz offensichtlich keine Zahlen (Zahlen schwirren nicht in den Lüften herum), wohl aber gibt es „Klassen“ von Objekten, deren Elemente jeweils eine bestimmte *Anzahl* besitzen. Wenn es uns also gelingt, diesen Begriff einer „Klasse“ oder „Menge“ von Dingen mathematisch präzise zu fassen, dann haben wir augenscheinlich das Problem des Zusammenhanges zwischen Mathematik und empirischer Welt gelöst und wir haben gleichzeitig eine Sprache, die es uns ermöglicht, mathematische Begriffe von Grund auf formal zu spezifizieren.

Allerdings ist eine solche präzise Formulierung des Mengenbegriffs mit bestimmten Schwierigkeiten behaftet. Wir nehmen an, dass die Menge eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen ist. Sie ist also mehr als ihre Elemente, wie wenn wir diese Elemente in eine Art Sack stecken würden. Mit anderen Worten: die üblichen Mengenklammern haben durchaus eine wichtige *Bedeutung* und die Menge $\{p\}$, die p als einziges Element enthält, ist zu unterscheiden von der Menge $\{\{p\}\}$, die $\{p\}$ als einziges Element enthält, wo p also anschaulich in zwei ineinander verschachtelten Säcken steckt. Damit ist klar, dass eine Menge niemals *sich selbst als Element enthalten kann*. $x \in x$ darf also in dieser Sprache der Mengentheorie aus elementaren formalen Gründen niemals gelten und wir erhalten das Axiom

(E) $\quad x \notin x.$

Nun stellt sich die Frage, wie man Mengen, in einer formalen Sprache, im Allgemeinen einführt. Ein ebenso einfaches wie leistungsfähiges diesbezügliches

Konzept ist folgendes. Sei gegeben irgendeine formale Sprache, die Variablen enthält, dann können wir jede beliebige Formel ϕ dieser Sprache *als Merkmal eines x auffassen*. Ein beliebiges Objekt *o hat* das Merkmal ϕ, genau dann wenn die Formel ψ wahr ist, die wir aus ϕ erhalten, indem wir alle Instanzen von x durch o ersetzen.[1] Nun können wir die Menge, die durch ϕ definiert ist, als die Menge all der Objekte auffassen, die das Merkmal ϕ haben. Formal schreibt man das so an:

$\{x \mid \phi\}$ ... die Menge aller x die das Merkmal ϕ haben.

Nun sagt Axiom (E), dass $x \notin x$ ein Merkmal ist, das jede Menge besitzen muss, wir erhalten also (anhand der Formel $\phi = x \notin x$) die Menge

$$m := \{x \mid x \notin x\}$$

als *Menge aller Mengen*. Dadurch aber, dass m eine Menge ist, muss es natürlich selbst diese elementare Eigenschaft einer Menge besitzen, und es muss

$$m \notin m$$

gelten. Gleichzeitig aber folgt sofort, dass m auch, eben weil es dieses Merkmal hat, ein Element von m sein muss, also

$$m \in m.$$

Und das ist ein *Widerspruch*. Mit dieser Paradoxie hat Bertrand Russell einst schon Gottlob Frege zur Verzweiflung gebracht. Seine „Principia Mathematica“ verwenden die *Typentheorie*, um diese Paradoxie zu vermeiden. Aus Überlegungen heraus, die hier nichts zur Sache tun, hat sich aber schließlich der Zugang durchgesetzt, den Mengenbegriff auf *rein axiomatischem Weg* einzuführen. Meist verwendet man das sogenannte *Zermelo-Fränkel-System* (ZF), das neben (E) noch eine Reihe weiterer Axiome beinhaltet, die insbesondere natürlich vermeiden, dass man die Menge m definieren kann. Das heißt: man muss in diesem Axiomensystem die Klasse der Formeln, die eine Menge definieren dürfen, einschränken. ZF ist eine Strategie, dies zu tun; wir zerbrechen uns hier aber nicht weiter den Kopf darüber und setzen einfach voraus, dass unser Mengenbegriff von den Mathematikern in geeigneter Weise definiert wurde. *Wir* diskutieren hier nur die Bestandteile der Mengentheorie, die wir als formale Werkzeuge auch wirklich benötigen.

[1] Wenn man mit Spitzfindigkeiten vertraut ist, die wir im folgenden Kapitel einführen, dann könnte man hier festsetzen, dass die Formel ϕ nur (oder *höchstens*) x als *freie Variable* enthalten darf. Aber das ist hier zunächst völlig unwesentlich.

Teilmengen Eine Menge M ist *Teilmenge* einer anderen Menge N, und man schreibt $M \subseteq N$, wenn alle Elemente von M auch in N enthalten sind. Gilt $M \subseteq N$ und existiert ein Element von N, das nicht in M enthalten ist, so nennt man M eine *echte Teilmenge* von N und schreibt auch $M \subset N$. Beispiele sind leicht gefunden:

Hunde $\subseteq$ Säugetiere
$\{1, 3, 5\} \subseteq \{1, 3, 5, 7\}$
$\{1, 3, 5\} \subset \{1, 3, 5, 7\}$
Vögel $\nsubseteq$ Amseln

Wichtig ist die Menge $\{\}$, die kein Element enthält. Diese *leere Menge* wird meist mit dem Symbol $\emptyset$ bezeichnet. $\emptyset$ ist eine Teilmenge jeder Menge, insbesondere eine Teilmenge von sich selbst (aber natürlich *kein Element* von sich selbst!). $\emptyset \subseteq M$ gilt also immer, insbesondere dann wenn $M = \emptyset$ gilt.

Die Menge $\emptyset$ ist von der Menge $\{\emptyset\} = \{\{\}\}$ zu unterscheiden. Während die Menge $\emptyset$ *kein* Element enthält, hat die Menge $\{\emptyset\}$ genau *ein* Element. Die Menge $\{\emptyset\}$ hat dieses Merkmal, genau ein Element zu haben, im Übrigen *mit jeder beliebigen Menge* $\{p\}$ gemeinsam, wo p irgendein Element (oder irgendeine Menge) ist. Diese *Anzahl der Elemente einer Menge* nennt man auch ihre *Kardinalzahl*.

Kardinalzahlen Es scheint plausibel, dass man mathematische Fragen über Zahlen etc., anhand von Mengen klären kann, die bestimmte Kardinalzahlen haben, wobei es völlig egal ist, *was genau* in der jeweiligen Menge drinnen ist. Diese Frage des *Inhaltes* einer Menge, die in den empirischen Wissenschaften natürlich von größter Bedeutung ist, ist für die Mathematik völlig belanglos. Die Mathematik findet daher für ihre Zwecke mit einem mengentheoretischen Universum das Auslangen, das *überhaupt nichts anderes* als die leere Menge und beliebig große Verschachtelungen der leeren Menge enthält. Man *definiert* in diesem seltsamen Universum von „Nichtsen" beispielsweise die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen so:

$$
\begin{aligned}
&0 := \emptyset,\\
&1 := \{\emptyset\},\\
&2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\\
&3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},\\
&\ldots\\
&n + 1 := n \cup \{n\}.
\end{aligned}
$$

Damit erhält man alle natürlichen Zahlen als Verschachtelungen von leeren Mengen und Mengen, die die leere Menge enthalten usw. – jeweils mit der passenden Kardinalzahl.

Zwei Mengen M und N sind *gleichmächtig* oder haben die selbe Kardinalität, wenn man jedes Element aus M einem Element aus N *umkehrbar eindeutig* zuordnen kann, d. h. jedem Element aus N entspricht genau ein Element aus M, in dieser Zuordnung, und jedem Element aus M genau ein Element aus N. Endliche Mengen mit n Elementen sind klarer Weise stets gleichmächtig. Komplizierter ist die Sachlage jedoch im Fall von *unendlichen Mengen*. Beispielsweise ist die Menge der natürlichen Zahlen die größer als 1000 sind gleichmächtig der Menge der natürlichen Zahlen. Beweisen kann man diese Sachlage auf der Grundlage von folgender Vorschrift: ordne der 0 die Zahl 1001 zu, und der Zahl n die Zahl $1001 + n$.

Ganz allgemein kann man sagen (überlege warum!), dass jede unendliche Zahlenmenge *gleichmächtig* mit der Menge der natürlichen Zahlen ist, wenn man sie *in einer unendlich langen Liste aufschreiben kann*. Eine solche Menge, die diese Eigenschaft hat, nennt man *abzählbar unendlich*, bzw. *abzählbar*. Neben den natürlichen Zahlen sind auch die Menge $\mathbb{Z}$ der *ganzen Zahlen* (also die Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) abzählbar unendlich, und sogar die *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} := \{x \mid \exists y, z \in \mathbb{Z} : z \neq 0 \wedge x = y/z\}.$$ [2]

sind abzählbar unendlich, was sich, wie Abbildung 1.1 illustriert, mittels des sogenannten Cantorschen Diagonalverfahrens zeigen lässt:

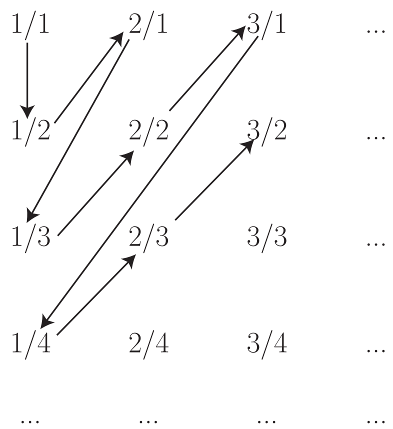


Abbildung 1.1: Das Cantorsche Diagonalverfahren

Es ist klar, dass man auf diese Weise schließlich alle rationalen Zahlen in einer Reihe anschreiben kann. Allerdings gibt es auch unendliche Zahlenmengen,

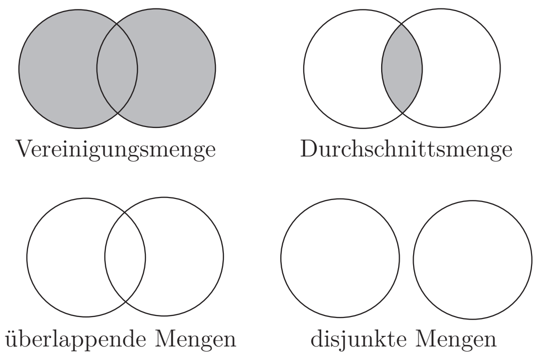
[2]Lies: Die Menge aller x, sodass es y und z gibt, die Elemente der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind, und für die gilt, dass z ungleich Null ist (wegen Division durch Null!) und x gleich y durch z gilt.

die nicht diese Eigenschaft besitzen. Beispielsweise ist *das Kontinuum der Reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ eine solche *überabzählbare* Menge (bekanntlich gibt es neben den rationalen Zahlen noch eine Reihe weiterer, irrationaler Zahlen, nämlich die nicht-ganzzahligen Wurzeln rationaler Zahlen und „transzendente“ Zahlen wie π oder e). Diese Menge $\mathbb{R}$ wiederum ist gleichmächtig mit jedem reellen Intervall $[a, b]$ also mit jedem Ausschnitt aus der Menge der Reellen Zahlen, der alle Elemente von $\mathbb{R}$ umspannt, die zwischen a und b liegen.

Vereinigungsmenge, Durchschnittsmenge Unter der *Vereinigungsmenge* zweier Mengen M und N versteht man die Menge $M \cup N$, die alle Elemente enthält, die in M oder N enthalten sind. Die *Durchschnittsmenge* ist diejenige Menge $M \cap N$, die alle Elemente enthält, die sowohl in M als auch in N enthalten sind. Beispiele:

$$\{1,3,5\} \cup \{1,5,7,9\} = \{1,3,5,7,9\}$$
$$\{1,3,5\} \cap \{1,5,7,9\} = \{1,5\}$$

Zwei Mengen sind *disjunkt*, wenn ihre Durchschnittsmenge leer ist. Andernfalls sind sie *überlappend*. Veranschaulichen lassen sich diese Beziehungen anhand von (selbsterklärenden) *Venn-Diagrammen*:



Kombinatorik, kartesisches Produkt Die Kardinalität einer Menge symbolisiert man auch durch Betragsstriche. Beispielsweise gilt $|\{1, 2, 10\}| = 3$. Mengen sind stets *ungeordnet* (ein Sack mit Dingen drin!). Eine Menge aus n Elementen hat genau 2^n Teilmengen. Im Fall der Menge $\{1, 2\}$ etwa sind dies die Mengen $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ also $2^2 = 4$ Stück. Die Menge aller Teilmengen einer Menge M nennt man auch ihre *Potenzmenge* $\wp(M)$.

Ein *n-Tupel* ist eine n-elementige Folge (Liste) von Objekten, die auch Wiederholungen enthalten kann. Tupel schreibt man oft in runde () oder eckigen $\langle\rangle$ Klammern. Das Tupel $(1, 2, 3)$ bildet gleichzeitig eine *geordnete Menge* der Elemente $1, 2, 3$, während das Tupel $(1, 2, 1, 1)$ keine geordnete Menge bildet, da es

Wiederholungen enthält. Aufgabe: rekapituliere und erläutere den Unterschied zwischen den Begriffen „Menge“, „Tupel“ und „geordnete Menge“.

Die Anzahl der n-Tupel, die man aus einer Menge mit k Elementen bilden kann errechnet sich als k^n. Diese Formel lässt sich leicht in Analogie zu einem Fahrradschloss veranschaulichen: Ein n-Tupel ist anschaulich ein n-stelliges Fahrradschloss, bei dem man jede Stelle auf jedes Element der Grundmenge drehen kann.

Die Menge aller n-Tupel über einer Menge M bezeichnen wir auch mit M^n.

Tupel können auch über unterschiedlichen Mengen gebildet werden, sodass jeder Stelle des n-Tupels eine andere Menge zugrundeliegt: Gegeben zwei Mengen M und N bezeichnen wir die Menge aller 2-Tupel oder *geordneten* Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$ als *das kartesische Produkt* $M \times N$.

Allgemein ergibt sich so das kartesische Produkt $M_1 \times \ldots \times M_n$ als Menge aller n-Tupel $(m_1, \ldots, m_n)$, mit $m_i \in M_i$, für jedes i mit $1 \leq i \leq n$. (Die Menge aller n-Tupel über einer Menge M ist das n-fache kartesische Produkt von M mit sich selbst M^n.) Für die Kardinalität des kartesischen Produktes gilt, wie man leicht sieht:

$$|M_1 \times \ldots \times M_n| = |M_1| \cdot \ldots \cdot |M_n|.$$

Auch diese Formel lässt sich anhand der Fahrradschloss-Analogie veranschaulichen. Die „Ziffern“ jeder Drehscheibe des Fahrradschlosses werden hier von einer eigenen Menge gebildet (die Drehscheiben sind also im Allgemeinen unterschiedlich groß).

Relationen Relationen sind das wichtigste Ausdrucksmittel der modernen Logik, die deshalb oft auch als relationale Logik bezeichnet wird.

Eine *n-stellige Relation R* über einer Menge M ist eine Teilmenge der Menge M^n aller n-Tupel über M. Bei zweistelligen Relationen R schreibt man statt $(a, b) \in R$ oft auch $R(a, b)$ oder aRb, bei mehrstelligen Relationen S schreibt man statt $(c_1, \ldots, c_n) \in S$ meist $S(c_1, \ldots, c_n)$.

Beispiele: Ist M eine Zahlenmenge, so entstehen die Mengen M^n als „Zahlenräume“ wie $\mathbb{N}^n$ oder $\mathbb{R}^n$ über M. Relationen darüber sind dann Ausschnitte aus solchen Zahlenräumen. Relationen über $\mathbb{R}^2$ sind die bekannten arithmetischen Beziehungen $=, <, \leq$ etc. („gleich“, „kleiner“, „kleiner oder gleich“). Aber M kann auch ganz andere Dinge als Zahlen beinhalten. Ist M eine Menge von Personen, dann könnte eine zweistellige Relation R über M beispielsweise diejenigen Paare von Elementen von M herauspicken, die miteinander verwandt sind. R(Karl, Karoline) würde somit gelten, genau dann wenn Karl und Karoline verwandt sind. Eine Relation über M^4 könnte beispielsweise diejenigen Quadrupel[3]

[3] Einige Arten von n-Tupel bezeichnet man manchmal mit speziellen Namen: für $n = 2, 3, 4, 5$ etc.: „geordnetes Paar“, „Tripel“, „Quadrupel“, „Quintupel“ etc.

von Personen herauspicken, für die gilt, dass sie schon einmal ein Tennisdoppel miteinander gespielt haben.

Eine n-stellige Relation über einer Folge von Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist, analog dazu, eine Teilmenge des kartesischen Produkts $M_1 \times \ldots \times M_n$. Auch diese Mengen bilden also stets Ausschnitte aus einem „Raum“ $M_1 \times \ldots \times M_n$. Ein solcher Raum kann beliebig konstruiert sein. Etwa könnte $M \times \mathbb{R}$ der Raum sein, der sich als Produkt aus der Personenmenge M mit der Menge der reellen Zahlen ergibt. Eine Relation G könnte dann den Personen aus M ihre Körpergröße zuordnen, indem $G(p, x)$ genau dann gilt wenn die Person p die Körpergröße x aufweist. Eine andere Relation $H \subseteq M \times \mathbb{R}$ könnte als diejenigen geordneten Paare (p, x) definiert sein, für die gilt, dass p schon einmal eine Mahlzeit mit einer Masse von x Gramm zu sich genommen hat usw.

Relationen können als *Merkmale* oder *Prädikate* aufgefasst werden. Bei einer einstelligen Relation P bedeutet $P(c)$, dass der Gegenstand c das Merkmal P aufweist bzw. das Prädikat P besitzt. Die Relation könnte etwa die Farbe Rot repräsentieren, $P(c)$ würde dann bedeuten, dass der Gegenstand c rot ist. Mehrstellige Prädikate Q drücken dann aus, dass bestimmte Gegenstände $(c_1, \ldots, c_n)$, im Fall von $Q(c_1, \ldots, c_n)$ in der Beziehung Q zueinander stehen.

Es gibt also einstellige, zweistellige und mehrstellige Relationen. In manchen Fällen verwendet man aber auch (als Spezialfall des Relationsbegriffs) *nullstellige Relationen*. Dieser Spezialfall entsteht so. Bei einer „normalen“ n-stelligen Relation R, mit $n > 0$, bedeutet $R(c_1, \ldots, c_n)$, dass R für das Tupel von Gegenständen $(c_1, \ldots, c_n)$ *gilt*. R kann also, für beliebige Belegungen mit Gegenständen, jeweils *wahr oder falsch* sein. Eine nullstellige Relation a hingegen besitzt überhaupt keine Gegenstandbelegungen, sie drückt daher, in einer naheliegenden Interpretation, kein Merkmal oder Prädikat aus sondern einfach *eine Aussage*. Die nullstellige Relation a ist daher wahr, genau dann wenn die Aussage a wahr ist.

Relationen können anhand bestimmter *algebraischer Eigenschaften* oder *Ordnungseigenschaften* klassifiziert werden. Diese Ordnungseigenschaften spielen vor allem in der Modallogik eine sehr wichtige Rolle (diese Logik wird deshalb manchmal geradezu als Logik der Ordnungseigenschaften bezeichnet). Ist R eine zweistellig Relation über der Menge A, dann unterscheidet man unter anderem folgende Eigenschaften:

Reflexivität:	für alle $a \in A$ gilt aRa,
Irreflexivität:	für kein $a \in A$ gilt aRa,
Symmetrie:	wenn aRb gilt, so gilt auch bRa,
Antisymmetrie:	wenn aRb und bRa gilt, so gilt $a = b$,
Transitivität:	wenn aRb und bRc gilt, so gilt auch aRc,
Konnexivität:	für alle a und alle b gilt aRb oder bRa.

Betrachten wir nun folgende Beispiele für Relationen:

= *Gleichheit* (elementare logische Beziehung, für beliebige Mengen)
∼ *Ähnlichkeit* (z.B. ähnlich groß, ähnlich schwer, ähnlich schön, etc.)
< *zeitliche Ordnung*, die so definiert ist, dass $t < t'$ bedeutet, dass t *entweder* vor t' *oder* gleichzeitig mit t' ist (!)

Relationen, die sich nur auf Zahlen beziehen:
> *ist größer als*
≥ *ist größer oder gleich.*

Diesen Beispielen entsprechen nun die oben definierten Ordnungsbeziehungen, in folgender Weise:

Reflexivität:	$=, \sim, <, \geq$
Irreflexivität:	$>$
Symmetrie:	$=, \sim,$
Antisymmetrie:	$=$ (trivialer Weise), $<, \geq$ (nicht-trivialer Weise),
Transitivität:	$=, <, >, \geq$, aber nicht $\sim$ (!),
Konnexivität:	$\geq$ (nichttrivial), $<$ (gilt nicht immer!).

Im Detail kann man zu diesen Beispielen folgendes sagen:

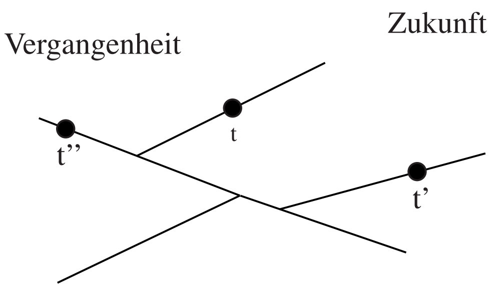
ad =: Eine Relation, die, wie =, reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, nennt man *Äquivalenzrelation*. Anschaulich pickt eine Äquivalenzrelation R aus ihrer Grundmenge M einzelne Teilmengen heraus, wo die Elemente jeweils alle untereinander die Relation R aufweisen. Diese Teilmengen nennt man auch *Äquivalenzklassen*. Ein Spezialfall der Äquivalenzrelation ist die *totale* Äquivalenzrelation, die zusätzlich konnexiv ist. Bei dieser Relation sind alle Elemente von M in R vergleichbar, es gilt also $R = M \times M$.

ad ∼: Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch, aber nicht transitiv. Dies sei hier durch ein Beispiel erläutert: Der 160 cm große Karl ist ähnlich groß wie er selbst (Reflexivität). Ist Karl ähnlich groß wie Franz, dann ist auch Franz ähnlich groß wie Karl (Symmetrie). Aber Transitivität kann hier nicht gelten. Nehmen wir an, wir hätten 500 Personen $k_1, \ldots, k_{500}$, für die gilt: (1) Karl ist ähnlich groß wie k_1, (2) jede Person k_{n+1} ist um einen Millimeter größer wie k_n. Dann gilt wohl, für alle n, dass k_n ähnlich groß ist wie k_{n+1}, aber die Person k_{500} ist um einen halben Meter größer wie Karl, also sicher nicht ähnlich groß wie er! (Vgl. dazu unten, Abschnitt 5.3.)

ad <: Die zeitliche Ordnung (vgl. Abschnitt 4.2.1) ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv (überlege warum). Aber sie ist nicht unter allen Umständen auch konnexiv. Wenn sie konnexiv ist, bildet sie eine *lineare Ordnung*, jeder zeitliche Zustand liegt dann entweder vor oder nach einem beliebigen anderen. Ist sie aber nicht konnexiv, so handelt es sich um eine *partielle Ordnung*, was anschaulich bedeutet, dass es unterschiedliche mögliche Zeitverläufe gibt:

Im linearen Fall sind t und t' vergleichbar (es gilt nämlich $t < t'$), im partiellen Fall aber sind t und t' nicht vergleichbar, da es keinen Zeitverlauf gibt, der von

lineare zeitliche Ordnung



partielle zeitliche Ordnung

dem einen zum anderen Zustand führt (wohl vergleichbar sind in diesem Fall aber t und t'' sowie t'' und t').

ad $>$: diese Ordnung ist irreflexiv und transitiv.

ad $\geq$: diese Ordnung ist reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und konnexiv, bildet also eine lineare Ordnung. (Da diese Relation die Beziehungen in Zahlenmengen wie $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ausdrückt, handelt es sich bei diesen Mengen um linear geordnete Mengen.)

Funktionen Eine *Funktion* f von einer Menge A (*Wertemenge*) in eine Menge B (*Zielmenge*) – schreib: $f : A \mapsto B$ – ordnet jedem Element aus A eindeutig ein Element in B zu, das man mit $f(a)$ bezeichnet. Beispiele: die einstellige reelle Funktion, die jeder Zahl ihr Quadrat zuordnet; die zweistellige Funktion, die jedem Zahlenpaar seine Summe zuordnet; die Funktion $M \mapsto M^2$, die jeder Person seine Eltern zuordnet; die Funktion $M \mapsto \mathbb{R}$, die jeder Person ihre Körpergröße zuordnet.

Wir geben uns, bei unseren Betrachtungen über Logik, meist mit Relationen, bzw. Prädikaten zufrieden. Der Grund ist einfach der, dass Funktionen nur ein Spezialfall von Relationen sind. Eine Funktion $f : A \mapsto B$ ist eine zweistellige Relation, wo jedes Element aus A mit genau einem Element aus B in Relation steht, oder formaler, für die gilt:

(1) $\forall x \in A \, \exists y \in B : f(x, y)$,

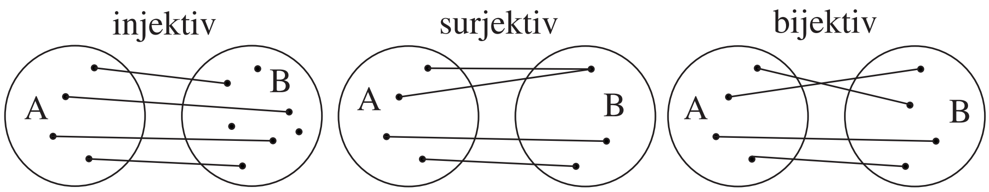
(2) $\forall x \in A \, \forall y, z \in B : [f(x, y) \wedge f(x, z)] \rightarrow y = z$.

Hat man also in einer Sprache die Möglichkeit, Relationen zu beschreiben, dann ist man prinzipiell auch in der Lage, Funktionen einzuführen.

Wichtig sind folgende Spezialfälle von Funktionen:

Eine Funktion $f : A \mapsto B$ ist *injektiv*, wenn je zwei nichtidentische Elemente a, b aus A stets nichtidentische Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ in B haben. (Umgekehrt ausgedrückt: es gibt keine zwei Elemente aus A, die den selben Funktionswert besitzen.) Die Funktion ist *surjektiv*, wenn jedes Element von B der

Funktionswert eines Elementes aus A ist. Sie ist *bijektiv* (auch: eineindeutig oder umkehrbar eindeutig), wenn sie surjektiv und injektiv ist.



Eine injektive Funktion ist beispielsweise die Funktion, die jeder Person aus einer Gruppe ihre Schuhe zuordnet: es können nie zwei Personen die selben Schuhe tragen, wohl aber könnte es einige Schuhe geben, die von keiner Person getragen werden. Surjektiv, aber nicht injektiv, ist die Funktion, die jeder Mutter ihre Mutter zuordnet. Zwar sind alle Mütter Mütter, also alle Funktionswerte sind belegt (surjektiv), aber einige Mütter sind die Mütter von mehreren Müttern (nicht injektiv). Bijektiv ist beispielsweise die Funktion, die jeder Mutter ihr erstgeborenes Kind zuordnet (jede Mutter hat genau ein erstgeborenes Kind und jedes erstgeborene Kind hat genau eine Mutter).

Literaturhinweise Ein Lehrbuch der Mengentheorie ist Ebbinghaus (1994), zur Kombinatorik, Ordnungstheorie und diskreten Mathematik vgl. Steger (2001).

2 Aussagenlogik und Prädikatenlogik erster Stufe

Wir beginnen in diesem Kapitel zunächst mit einem Überblick über die *formalen* Gesichtspunkte der klassischen Aussagenlogik und Prädikatenlogik erster Stufe (2.1-2.3). Im Anschluss daran werden wir uns einige Gedanken über die philosophische Bedeutung dieser und anderer philosophischer Formalismen machen. Wer meint, dass wir hier eigentlich das Pferd beim Schwanz aufzäumen, indem wir Formalismen entwickeln und uns erst nachträglich dafür philosophische Interpretationen ausdenken: rein „induktiv" betrachtet mag das stimmen, es ist aber zumindest didaktisch gesehen durchaus sinnvoll, den Formalismus zunächst einmal isoliert zu entwickeln und ihn dann erst durch philosophische Erläuterungen zu rechtfertigen. Deshalb wird diese „verkehrte" Strategie in diesem Buch oft unsere Vorgangsweise sein.

Formale Logik ist eine der ältesten philosophisch-wissenschaftlichen Disziplinen, da sich ihre Geschichte zumindest bis auf Aristoteles zurück verfolgen lässt. Aristotelische Logik formalisiert die grundlegende Struktur *der Grammatik* einer natürlichen Sprache, wie Griechisch, Deutsch oder Englisch. Das heißt, in dieser Formalisierung spielt beispielsweise der Aufbau eines Satzes, als aus einem Subjekt und einem Prädikat zusammengesetzt, eine entscheidende Rolle. Zwar hat sich die so etablierte Disziplin über die Jahrhunderte stetig weiter entwickelt, aber es war erst Gottlob Frege, der eine entscheidende *Verallgemeinerung* vorschlug, die zu der Gestalt der formalen Logik führte, die wir heute kennen. Freges Idee war, dass wir uns bei dem Aufbau der *Sätze* (bzw. Formeln) einer formalen Sprache nicht strikt an der Grammatik einer *natürlichen Sprache* orientieren sollten, sondern besser an den Grundelementen der Sprache *der Mathematik*. Anstelle von Prädikat und Subjekt (bzw. als verallgemeinernde Explikation dieser Begriffe) verwendet man dann den Begriff der *Relation* und den Begriff der *quantifizierten Variable*; analog lassen sich die logischen *Junktoren*, wie „und", „oder" etc. in einem sehr einfachen Sinn mathematisch verallgemeinern (was bereits George Boole herausgefunden hat), und es resultiert eine *formalisierte Sprache*, deren Zusammenhang zur natürlichen Sprache nurmehr indirekt ist, nicht vermittelt durch die sperrige Grammatik einer solchen Sprache.

Generell ist die Idee einer solchen *formalisierten Sprache* bzw. einer *Logik*, so wie sie heute, in der durch Frege begründeten Tradition, meist konzipiert wird, die einer vierstufigen Konstruktion:

Vokabular Wir führen einige Namen ein, die als Namen für einzelne Objekte (der „Außenwelt“) dienen können sowie einige Namen, die als Namen für Relationen dienen können. Dies ist das *nichtlogische Vokabular* der formalisierten Sprache. Zusätzlich haben wir dann einiges an *logischem Vokabular*, also Variablen, *Quantoren* – das sind Zeichen die für solche Dinge stehen wie „für alle gilt“ oder „es gibt ein“ –, *Junktoren* – Zeichen, die für solche Dinge stehen wie „nicht“, „und“, „oder“, „wenn-dann“, und vielleicht noch ein paar weitere *Operatoren*, etwa für „es gilt notwendiger Weise dass“.

Syntax Wir beschreiben die *Syntax* der Sprache, das heißt, wir definieren Regeln, wie das Vokabular der Sprache zu sinnvollen Formeln verknüpft werden kann.

Semantik Wir beschreiben die *Semantik* der Sprache. Das kann sich einmal darin äußern, dass wir einfach nur *Regeln* definieren, die aussagen, wie wir aus bestimmten Formeln der Sprache (einer Menge von *Prämissen*) andere Formeln als *Konklusionen* ableiten können. Eine solche quasi-syntaktische Umgehung der Semantik erschöpft aber in den meisten Fällen die semantische Perspektive nicht. Meist ist es vielmehr so, dass man für die Sprache zunächst konkrete *semantische Regeln* definiert, die zeigen, wie man die Sprache an eine externe Wirklichkeit anbinden kann (die ihrerseits natürlich in der Gestalt einer formalen Spezifikation vorliegt!). Gegeben diese Anbindungsregeln kann man dann präzise definieren, unter welchen Bedingungen (in welcher Wirklichkeit) eine Formel *wahr* ist bzw. welche Formeln aus anderen Formeln *folgen*. Die syntaktischen Schlussregeln (der *Kalkül*) dienen dann nur mehr als Technik zum Erreichen des zuvor schon semantisch festgelegten Zieles.

Metalogik Auf der Basis einer solchen Spezifikation stellt sich dann die Frage, welche *formalen Merkmale* eine solche Logik, von außen betrachtet, hat. – Ist es möglich, gegeben eine Reihe von Prämissen, zu entscheiden, ob eine bestimmte Formel aus diesen Prämissen folgt? Fällt die Antwort auf diese Frage positiv aus, nennt man diese Logik *entscheidbar*, andernfalls *unentscheidbar*. – Ist es möglich, gegeben eine Reihe von Prämissen, jede einzelne logische Folgerung dieser Prämissen sukzessive *abzuleiten* (sodass man jede logische Folgerung irgendwann, nach endlich vielen Schritten erreicht)? Fällt die Antwort positiv aus (was bei der klassischen Logik der Fall ist), dann nennt man die Logik *vollständig*, ansonsten *unvollständig*. – Andere wichtige metalogische Fragestellungen beziehen sich auf die *Ausdrucksstärke* einer Logik, also beispielsweise auf die Frage, ob man in der Lage ist, Mengen einer bestimmten Kardinalität, in einer Logik, durch Angabe einer (endlichen) Menge von Axiomen, vollständig zu charakterisieren.

2.1 Aussagenlogik

Eine sehr grundlegende Einteilung der Logik ergibt sich *aus der Wahl des nicht-logischen Vokabulars*. Dabei werden im Rahmen der *klassischen Logik* (vgl. Abschnitt 2.5) zwei verschiedene Varianten diskutiert. In der ersten Variante besteht das nichtlogische Vokabular ausschließlich aus primitiven *Aussagen* (Propositionen), enthält also keinerlei Relationen, Funktionen etc. Diese Dinge kommen erst in der zweiten Variante hinzu.

Vokabular Das nichtlogische Vokabular der Aussagenlogik besteht aus einer Menge A von *Aussagenkonstanten*, wobei wir zunächst davon ausgehen, dass diese Menge *aufzählbar* ist, also in der Gestalt einer Liste $p, p', p'', \ldots$ vorliegt. (So erreichen wir, dass die Sprache ihrerseits aufzählbar ist und verhindern, dass es Prämissenmengen mit überabzählbar vielen Folgerungen gibt, für die dann kein vollständiges algorithmisches Ableitungsverfahren existieren könnte.)

Eine kleine technische Randbemerkung zu den hier verwendeten *Symbolen*. Wir werden versuchen, Ordnung in die Darstellung dadurch zu bringen, dass wir einen bestimmten Typ von nicht-logischen Objekten immer mit einer bestimmten, eindeutig identifizierbaren Art von Zeichen benennen, also etwa Aussagenkonstanten mit kleinen ps, eventuell plus Apostrophe und Indizes. Das ist keine formale Notwendigkeit, aber es erleichtert die Lesbarkeit unserer formalen Zeichensprache.

Neben den nichtlogischen Symbolen benützt die Aussagenlogik auch einige Symbole eines logischen Vokabulars. Das sind die Symbole $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)$.

Syntax Nun bilden wir aus diesen primitiven Aussagenkonstanten die Menge der Formeln bzw. die formalisierte *Sprache* L_A. Wir tun dies, anhand einer Reihe von *rekursiven Vorschriften*:

(1) Jedes Element von A ist eine Formel und $\perp$ ist eine Formel.

(2) Ist ϕ eine Formel, so auch $\neg\phi$.

(3) Sind ϕ und ψ Formeln, so auch $(\phi\wedge\psi)$, $(\phi\vee\psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$.

(4) L_A enthält genau alle endlichen Formeln die so gebildet werden können.

Die Symbole ϕ und ψ sind *Variablen einer Metasprache*, also einer gedachten formalen Sprache, deren Individuenbereich in der Gestalt der Sprache L_A gegeben ist. Regel (1) ist „trivial“: sie bewirkt, dass alle primitiven Aussagen aus A und das (noch näher zu bestimmende) Symbol $\perp$ auch in L_A enthalten sind. Auch ziemlich simpel ist Regel (4), die nur sicher stellt, dass wir keine zusätzlichen Elemente in L_A hinein definieren und dass wir eventuelle unendlich lange Formeln ausschließen (die sonst tatsächlich entstehen würden!). Die Regeln (2) und (3) dagegen bewirken etwas, das ziemlich komplex ist. Dadurch, dass ϕ und ψ (metasprachliche) Variablen sind, erzeugen die Vorschriften aus jeder Formel bzw. aus jedem Paar von Formeln stets eine neue Formel, die Formelmenge explodiert also förmlich.

Man stelle sich beispielsweise vor, dass A nur ein einziges Element enthält, nämlich die Aussage p, dann ist die Menge der Formeln dennoch *unendlich* groß (aber abzählbar unendlich!). So sind $\neg p$, $(p \wedge p)$, $(p \vee p)$, $(p \rightarrow p)$ Formeln, aber auch solche Konstrukte wie $\neg\neg\neg\neg\neg p$ oder $((p \vee \neg p) \wedge p)$, usw.

Die letztgenannte Formel zeigt auch, welchen Sinn die in Regel (3) eingeführten Klammern haben, weil die Formel $((p \vee \neg p) \wedge p)$ nämlich offensichtlich *verschieden* ist von der Formel $(p \vee (\neg p \wedge p))$, was unsichtbar wäre, würden wir die Klammern weglassen (die beiden Formeln wären in diesem Fall formal identisch, was wir aber keineswegs wollen, wie die Semantik zeigen wird). – Das bedeutet aber auch, dass wir mit Klammern nicht pingelig sein müssen: wir können sie immer dann weglassen, wenn sie zur Erhellung der Struktur einer Formel unnötig sind; alternativ verwenden wir auch statt runden Klammern eckige, usw.

Rekursive Spezifikationen der obigen Art werden wir in jeder Spezifikation der Syntax einer Logik haben, es ist also sinnvoll, eine etwas bequemere Schreibweise einzuführen. Wir definieren die selbe Formelmenge L_A abgekürzt so:

$$\phi ::= \; p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \phi \vee \phi \mid \phi \rightarrow \phi \mid \phi \leftrightarrow \phi \mid \bot.$$

Das ϕ ist hier die rekursive Variable, das heißt, an jedem Ort wo ϕ steht, kann eine beliebige Formel stehen. Der senkrechte Strich | ist ein logisches „oder“. p, schließlich, ist eine Variable, die über die Elemente von A quantifiziert. Das heißt, man muss die ganze Formel so lesen: Jedes (endliche) Ding ist eine Formel, das entweder ein Element von A ist oder aus einer Formel ϕ durch hinzufügen von $\neg$ hervorgeht, oder aus zwei Formeln durch Einfügen von $\wedge$, usw. Die Klammern lassen wir dabei, aus rein optischen Gründen, weg.

Wahrheitstafeln Nun ist die Frage, wie wir mit dieser Menge L_A von zunächst sinnlosen Zeichenfolgen umgehen. Wir lösen diese Aufgabe in zwei Schritten. Und zwar geben wir zuerst formal präzise an, *welche Bedeutung* die einzelnen logischen Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ haben sollen, um diese Bedeutungen anschließend in einer entsprechenden semantischen Interpretation der Sprache zu realisieren.

Wir definieren die Bedeutungen der Junktoren anhand von sogenannten *Wahrheitstafeln*, die die Verhältnisse von Formeln anhand der *Wahrheitswerte* W (für „wahr“) und F (für „falsch“) analysieren. $\bot$ ist ein *nullstelliger* Junktor, weil er keine einzelne Formel als Argument hat. $\neg$ ist einstellig, die übrigen Junktoren sind zweistellig. Wir definieren die Bedeutung der *Kontradiktion* $\bot$ als:

$\bot$
F

Das heißt: der nullstellige Junktor $\perp$ ist eine Formel, *die unter allen Umständen falsch ist*. – Für die *Negation* $\neg$ gilt:

ϕ	$\neg\phi$
W	F
F	W

Das heißt: die Negation einer Formel ist wahr, wenn die Formel falsch ist, und umgekehrt. In analoger Weise definieren wir die *Konjunktion* $\wedge$. Eine Formel $\phi \wedge \psi$ ist genau dann wahr, wenn sowohl ϕ als auch ψ wahr sind:

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Also: nur wenn ϕ und ψ beide wahr sind, ist auch $\phi \wedge \psi$ wahr, in den drei anderen möglichen Fällen ist die Konjunktion falsch. Die Definitionen für die verbleibenden drei Junktoren: die *Disjunktion* $\vee$, die (materiale) *Implikation* $\rightarrow$ und die *Äquivalenz* $\leftrightarrow$ lauten dann so:

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
W	W	W	W	W
W	F	W	F	F
F	W	W	W	F
F	F	F	W	W

In gewissen Grenzen handelt es sich hier um absolut willkürliche Festsetzungen. So könnte man etwa die Disjunktion – das logische „Oder“ – auch so definieren, dass sie wahr ist, nur dann, wenn genau eines der beiden Glieder wahr ist. Dieses *exklusive Oder* $\veebar$ wäre formal so definiert:

ϕ	ψ	$\phi \veebar \psi$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Insgesamt gäbe es 16 mögliche Weisen, Junktoren zu definieren (und zwar deshalb weil es $2^4 = 16$ vier-Tupel aus zwei Wahrheitswerten gibt), aber es ist unnötig, diese alle mit eigenen Namen zu belegen. So kann man das exklusive Oder etwa auch so beschreiben:

$$\phi \veebar \psi := (\phi \vee \psi) \wedge \neg(\phi \wedge \psi).$$

Über derartige *explizite Definitionen* ist es möglich, alle Junktoren anhand einer kleinen Anzahl von Basis-Junktoren einzuführen. Dabei gibt es verschiedene Wege, alle Junktoren anhand von zwei oder auch nur einem einzigen Junktor zu definieren. Interessant ist die Option, wo man nur den nullstelligen Junktor $\perp$ und den zweistelligen Junktor $\rightarrow$ hat. Man definiert dann etwa:

$$\neg\phi := \phi \rightarrow \perp.$$

Aufgabe: definiere einige andere Junktoren, auf der Grundlage von $\perp$ und $\rightarrow$. Wir werden bei den meisten im Folgenden definierten (zweiwertigen) Logiken nur die Junktoren $\wedge$ und $\neg$ einführen und definieren die anderen so:

$$\phi \vee \psi := \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi),$$
$$\phi \rightarrow \psi := \neg(\phi \wedge \neg\psi),$$
usw.

Aufgabe: überprüfe die Korrektheit dieser Definitionen.

Die Kontradiktion $\perp$ ist eine Formel, die mit allen anderen Formeln äquivalent ist, die immer falsch sind, also beispielsweise mit $\phi \wedge \neg\phi$ oder $\neg(\phi \rightarrow \phi)$. (Frage: Warum sind diese Formeln immer falsch?)

Als Negation der Kontradiktion erhält man die *Tautologie*

$$\top := \neg\perp$$

als diejenige Formel, die immer wahr ist. Sie ist wiederum äquivalent mit $\phi \vee \neg\phi$ oder $\phi \rightarrow \phi$. (Frage: Warum?)

Natürlich könnte man auch dreistellige oder vierstellige Junktoren definieren, aber das hätte deshalb relativ wenig Sinn, weil man ohnedies jeden drei- oder mehrstelligen Junktor anhand der üblichen Junktoren definieren könnte. Aufgabe: definiere ein oder zwei dreistellige Junktoren via Wahrheitstafeln und zeige, wie man sie anhand der hier verwendeten Junktoren explizit definieren kann.

Die so definierten Junktoren sind Kernelemente der *klassischen* oder *reinen* Logik. Aber es gibt wesentliche Überlegungen, die eine Revision dieser Definitionen nahe zu legen scheinen. Die meisten dieser Überlegungen beziehen sich entweder auf die Negation oder auf die Implikation.

Im Fall der Implikation kann man argumentieren, dass die Tatsache, dass eine falsche Aussage ϕ schlicht *alles* impliziert, kaum der Gebrauchsweise der Implikation in einer natürlichen Sprache gerecht wird. Ist die Folgerung „Der Mond ist aus grünem Käse, also liegt Wien an der Donau“ korrekt? Wenn wir das „also“ mit $\rightarrow$ definieren, ist die Antwort seltsamer Weise: Ja. Es gibt daher eine Reihe von Logiken, die Versuchen, der Implikation im Rahmen natürlicher Sprachen besser gerecht zu werden. (Siehe Abschnitt 4.3) Die Einführung einer alternativen Implikation hindert uns im Grunde aber nicht daran, die alte Implikation weiterhin zu definieren und sie dort, wo es sinnvoll ist, zu verwenden.

Derartige Logiken sind insofern keine intrinsischen *Veränderungen* der klassischen Logik sondern lediglich *Erweiterungen*, Anreicherungen um zusätzliche Ausdruckselemente.

Im Fall der Negation wurde argumentiert, dass es Situationen gibt, wo ein Widerspruch, also eine Formel der Form $\phi \wedge \neg\phi$ *wahr* sein könnte (etwa im Fall ambivalenter Gefühle oder sonst wie inkonsistenter *Situationen*, in irgendeiner denkbaren oder in der wirklichen Welt). Auch diesen Fall werden wir unten diskutieren (Abschnitte 4.4 und 5.2.2).

Schließlich kann man generell und aus unterschiedlichen Gründen die Frage stellen, ob es ausreichend ist, die Junktoren anhand von bloß zwei Wahrheitswerten zu definiern oder ob nicht ein *mehrwertiges* Setting das adäquatere wäre (Kapitel 5). Fügt man zu diesen Varianten noch die Option hinzu, dass man ganz andere Junktoren haben könnte, etwa solche, die solche Dinge wie „es gilt notwendiger Weise" oder „es gilt immer" ausdrücken (siehe Kapitel 4), dann haben wir bereits einen Großteil der hier zu diskutierenden Variationsmöglichkeiten der klassischen Logik abgedeckt.

Semantik Die *semantische Interpretation* einer formalen Sprache bindet das nichtlogische Vokabular der Sprache an eine bestimmte externe Realität, wobei diese Bindung natürlich nur *formal* erfolgt, das heißt: die externe Realität liegt nicht handgreiflich-faktisch, sondern nur der Form nach vor (oder, anders ausgedrückt: das Anbinden an die externe Realität erfolgt in der Logik nur formal und nicht anhand der Angabe von psychologischen oder physikalischen Mechanismen).

Im Fall der Aussagenlogik ist eine semantische Interpretation des Vokabulars, also der Menge A von primitiven Aussagen leicht definiert. Wir können eine Funktion $s : A \mapsto \{W, F\}$, die jeder Aussagenkonstante einen Wahrheitswert zuordnet, heranziehen oder wir nehmen einfach, was formal äquivalent dazu ist, eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq A$ von Aussagenkonstanten, die genau die Aussagenkonstanten aus A sind, die durch $\mathfrak{A}$ als wahr festgesetzt werden. Wegen der besseren Kompatibilität mit der Prädikatenlogik wählen wir hier diese zweite Option.

Eine semantische Interpretation $\mathfrak{A}$ nennen wir oft auch *Struktur* und, im wesentlichen, ist so eine Struktur auch nichts anderes als das, was wir weiter unten eine *mögliche Welt* nennen werden (auch wenn es möglich ist, hier gewisse feine Unterschiede zu finden): $\mathfrak{A}$ ist die mögliche Welt, in der genau die in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Aussagen stimmen. Mit $\mathbb{A}$ bezeichnen wir die Menge aller Strukturen über A, das ist: die Potenzmenge $\wp(A)$.

Die Semantik der klassischen Aussagenlogik wird, auf dieser Grundlage, entweder definiert als eine Menge von *Wahrheitsfunktionen* $\mathbb{A} : L_A \mapsto \{0, 1\}$, die jeder Struktur $\mathfrak{A}$ und jeder Formel ϕ einen Wahrheitswert $\mathfrak{A}(\phi)$ zuordnet oder als eine *Relation* $\vDash$ zwischen der Menge aller Strukturen $\mathbb{A}$ und der Menge aller Formeln L_A. Ausschließlich wegen der leichteren Lesbarkeit verwenden wir hier im

Allgemeinen die relationale Option (die wahrheitsfunktionale Variante werden wir nur im Fall der mehrwertigen Logik verwenden). Zur Erläuterung des Verhältnisses der beiden Strategien (die beide in Lehrbüchern zu finden sind) geben wir hier jedoch ausnahmsweise beide Optionen an. Zunächst die wahrheitsrelationale Variante. Für alle atomaren Aussagen $p \in A$, alle Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle Formeln ϕ, ψ definieren wir:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \vDash p & \text{gdw} & p \in \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{A} \vDash \neg\phi & \text{gdw} & \text{nicht } \mathfrak{A} \vDash \phi, \\ \mathfrak{A} \vDash \phi \wedge \psi & \text{gdw} & \mathfrak{A} \vDash \phi \text{ und } \mathfrak{A} \vDash \psi, \\ \text{usw.} & & \end{array}$$

In der ersten Regel definieren wir den Umgang mit dem nichtlogischen Vokabular. Die atomare Formel p ist wahr, genau dann wenn („gdw“) sie in $\mathfrak{A}$ enthalten ist, wir erzählen also nur das nach, was wir zunächst als Annahme in die Definition des Struktur-Begriffs hineingesteckt haben. Im Fall der Junktoren (also im Fall des logischen Vokabulars) wiederum wiederholen wir exakt die Definitionen, die wir oben anhand von Wahrheitstafeln gegeben haben. Aufgabe: setze die obige Liste fort und definiere die Erfülltheits-Relation für die übrigen Junktoren. – Dass diese Definitionen tatsächlich *alle* Formeln der Aussagenlogik abdecken lässt sich leicht zeigen (Induktionsbeweis).

Die wahrheits*funktionale* Definition sieht, im Unterschied dazu, folgendermaßen aus. Wiederum definieren wir, für alle $p \in A$, für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle Formeln ϕ und ψ:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}(p) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } p \in \mathfrak{A} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ \mathfrak{A}(\neg\phi) := 1 - \mathfrak{A}(\phi), \\ \mathfrak{A}(\phi \wedge \psi) := \min\{\mathfrak{A}(\phi), \mathfrak{A}(\psi)\}, \\ \text{usw.} \end{array}$$

Hier wird als Wahrheitswertemenge die Menge $\{0, 1\}$ anstelle von $\{F,W\}$ herangezogen. – Aufgabe: überlege, warum diese Definitionen äquivalent zur jeweiligen wahrheitsrelationalen sind und definiere die übrigen Junktoren, passend dazu.

Metalogik Zunächst einmal ist klar, dass sich für jede Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Formel ϕ die Aussage $\mathfrak{A} \vDash \phi$ in endlich vielen Arbeitsschritten entscheiden lässt, und zwar anhand einer einfachen passenden Wahrheitstafel. Da Formeln stets endlich sind und somit endlich viele Aussagenkonstanten $p_1, \ldots, p_n$ enthalten, können wir anhand der Wahrheitswertbelegungen dieser Aussagenkonstanten in der Struktur sowie anhand der aus den elementaren Wahrheitstafeldefinitionen folgenden Wahrheitsbedingungen folgern, ob die Formel wahr ist oder nicht. Die Formel $p \wedge \neg(q \vee r)$ beispielsweise ist in der Struktur $\{p, r\}$ falsch, da:

	p	q	r	$q \vee r$	$\neg(q \vee r)$	$p \wedge \neg(q\vee)r$
	W	W	W	W	F	F
	W	W	F	W	F	F
wahr $\rightarrow$	**W**	**F**	**W**	W	F	F
	W	F	F	F	W	W
	F	W	W	W	F	F
	F	W	F	W	F	F
	F	F	W	W	F	F
	F	F	F	F	W	F

Aufgabe: entscheide via Wahrheitstafeln, ob die Formel $(p \vee \neg r) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ wahr ist, in der Struktur $\{p, r\}$.

Analog kann man natürlich sofort die Frage beantworten, ob eine Formel eine *Tautologie* ist. Dies ist der Fall, wenn die Wahrheitstafel der Formel allen möglichen Belegungen mit Wahrheitswerten, also allen möglichen Strukturen den Wahrheitswert W zuordnet. Aufgabe: ermittle auf diese Weise ob $p \vee (q \vee \neg q)$ eine Tautologie ist.

Nun kommen wir zu dem wichtigen Begriff der *logischen Folgerung*. Wir nennen eine Struktur *Modell* einer Formel, wenn die Formel in der Struktur erfüllt ist. Analog nennen wir eine Struktur $\mathfrak{A}$ Modell einer ganzen Menge von Formeln Γ, wenn jede Formel dieser Menge in der Struktur erfüllt ist und schreiben

$$\mathfrak{A} \vDash \Gamma.$$

Anschaulich ist ein Modell einer Formelmenge eine mögliche Welt, in der alle diese Formeln wahr sind.

Von Alfred Tarski stammt die folgende Definition: *Eine Formel ϕ ist die* logische Folgerung *einer Menge von Formeln Γ – schreib $\Gamma \vDash \phi$ –, wenn jede Struktur, die ein Modell von Γ ist, auch ein Modell von ϕ ist.*

Diese Definition ist von größter Bedeutung, weil sie den klassischer Weise nur syntaktisch (anhand eines Kalküls) spezifizierten Folgerungsbegriff in die Semantik einer formalen Sprache einbettet und so die Einschätzung ermöglicht, ob ein Kalkül dieser semantischen Spezifikation überhaupt gerecht wird.

In dem Spezialfall, dass die Menge Γ endlich ist, können wir mit $\bigwedge \Gamma$ die Formel bezeichnen, die als Konjunktion aller Formeln aus Γ entsteht (im unendlichen Fall geht das hier zunächst nicht, da wir ja gefordert haben, dass Formeln endlich lang sein müssen). Dann gilt, wie man sofort sieht, dass eine Formel ϕ eine logische Folgerung von Γ ist, genau dann wenn die Formel

$$\bigwedge \Gamma \rightarrow \phi$$

eine Tautologie ist. Das heißt: im Fall einer endlichen Menge von *Prämissen* lässt sich für jede Formel entscheiden, ob sie eine logische Folgerung der Prämissen ist, indem man überprüft, ob obige Formel eine Tautologie ist.

Haben wir unendlich viele Prämissen (was außerhalb bestimmter metamathematischer Problemsituationen kaum vorkommen wird), dann müssen wir auf andere Verfahren zurückgreifen: wir benötigen dann einen Kalkül (siehe Abschnitt 2.3).

2.2 Prädikatenlogik erster Stufe

Wir beschreiben nun die zweite Variante der klassischen Logik – die Prädikatenlogik erster Stufe – als direkte Erweiterung der Aussagenlogik. Das heißt: wir haben das selbe logische und nichtlogische Vokabular, mit den selben syntaktischen und semantischen Interpretationen, wir fügen diesem Vokabular aber einige logische und nichtlogische Elemente hinzu.

Vokabular Das nichtlogische Vokabular der Prädikatenlogik erster Stufe basiert auf einer Menge Δ von *Individuen*. Da diese Menge meist *variabel* ist, also von semantischer Interpretation zu semantischer Interpretation unterschiedlich gestaltet sein kann, führen wir Δ hier als metasprachliche *Variable* ein. (Achtung: Δ ist kein Teil des objektsprachlichen Vokabulars sondern kommt nur über semantische Interpretationen überhaupt in Kontakt mit diesem.)

Zusätzlich zu Δ enthält das nichtlogische Vokabular eine abzählbare Menge von *Prädikatenkonstanten* $P, P', \ldots$, eine abzählbare Menge $f, f', \ldots$ von *Funktionenkonstanten* und eine abzählbare Menge $c, c', \ldots$ von *Individuenkonstanten*. Außerdem soll eine Funktion π definiert sein, die jeder Prädikatenkonstante und jeder Funktionenkonstante eine natürliche Zahl – ihre *Stellenzahl* – zuordnet. $\pi(f) = 3$ bedeutet also, dass f ein Symbol für eine dreistellige Funktion ist, usw.

Wollen wir in unserer Sprache auch *Aussagenkonstanten* berücksichtigen (was sinnvoll ist, wenn wir diese Sprache als *echte* Erweiterung der Aussagenlogik verstehen wollen), dann müssen wir nur annehmen, dass Prädikatenkonstanten auch die Stellenzahl 0 besitzen können: nullstellige Prädikate sind Aussagenkonstanten, weil ihre Wahrheit von keinem Argument abhängt.

Das logische Vokabular enthält dann, neben den von oben bereits bekannten aussagenlogischen Junktoren, eine abzählbare Menge von *Individuenvariablen* $x, x', \ldots$ und die *Quantoren-Symbole* $\exists, \forall$ sowie das *Identitätssymbol* $=$.

In dieser Liste des prädikatenlogischen Vokabulars sind auch Funktionen enthalten. Wir werden jedoch in der Folge fast ausschließlich solche Logiken betrachten, die Funktionen nicht explizit in ihrem Vokabular definieren. (Da Funktionen eine spezielle Form von Relationen sind, ist das keine grundsätzliche Beschränkung der formalen Ausdrucksmöglichkeiten. Vgl. auch Abschnitt 3.1, wo wir zeigen, wie man Funktionen elegant anhand des ι-Operators beschreiben kann.) Nur damit man sieht, wie man mit Funktionen formal umgeht, beschreiben wir in der folgenden Syntax und Semantik ausnahmsweise auch diese Sprachelemente.

Syntax Wir definieren zunächst den Begriff des *Terms*. Ein Term ist ein Symbol oder eine Kette von Symbolen, mit der Eigenschaft, dass jeder solche Term seinerseits als zulässiges *Argument* von Prädikaten, Funktionen sowie Identitätsausdrücken definiert ist. Wir definieren einen Term als genau jede Kette von Symbolen t, für die eine der beiden Bedingungen gilt:

(1) t ist eine Variable oder eine Individuenkonstante.

(2) Es gibt Terme $t_1, \ldots, t_n$ und eine n-stellige Funktionenkonstante f, sodass $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ gilt.

Dies ist erneut eine rekursive Definition, was zur Folge hat, dass Terme beliebig verschachtelt sein können. $f(x, c, f'(y),)$ wäre ein Beispiel für einen derartigen verschachtelten Term. (In dem einfacheren Fall einer Prädikatenlogik ohne Funktionenkonstanten sind natürlich auch Terme viel einfacher gestaltet: Terme sind dann einfach alle Individuenvariablen und -konstanten.)

Auf dieser Grundlage führen wir den Begriff der *atomaren Formel* ein. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und ist P eine n-stellige Prädikatenkonstante, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine atomare Formel.

Gegeben diese beiden Festsetzungen – Terme und atomare Formeln – können wir die Formelmenge $L_{P_{1f}}$ der Prädikatenlogik erster Stufe definieren, als:

$$\phi ::= \; a \mid t = t \mid \forall x\phi \mid \exists x\phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \bot.$$

Hier steht a für beliebige atomare Formeln, t für beliebige Terme und x für Variablen. Formeln der Art $\forall x\phi$ oder $\exists x\phi$ strukturiert man manchmal auch zusätzlich, durch Klammern, Doppelpunkte oder Punkte: $\forall x : \phi$, $\forall x.\phi$, $\forall x(\phi)$ etc.

Diejenige Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe, die wie $L_{P_{1f}}$ definiert ist, aber keine Funktionen und kein Identitätssymbol enthält, bezeichnen wir mit L_{P_1}.

Die Symbole $\forall$ und $\exists$ nennt man *Quantoren*. Intuitiv steht die Formel $\forall x\phi$ für die Aussage „Für alle x gilt ϕ“ und die Formel $\exists x\phi$ für die Aussage „Es existiert ein x, sodass ϕ gilt“. Präzisiert werden können diese Intuitionen in folgender Weise.

Wir bezeichnen mit $\phi[c/x]$ diejenige Formel, die dadurch entsteht, dass man jede Instanz von x in der Formel durch c ersetzt. Dabei ist es prinzipiell egal, ob x überhaupt in der Formel enthalten ist. Handelt es sich um die Formel $\phi := p$, dann ist $\psi[c/x]$ wiederum p, handelt es sich etwa um die Formel $\psi := P(x) \rightarrow Q(x)$, dann erzeugt $\psi[c/x]$ die Formel $P(c) \rightarrow Q(c)$. Diesen Vorgang der *Substitution* eines Zeichens durch ein anderes benützend definieren wir:

- $\forall x\phi$ ist genau dann wahr, wenn $\phi[c/x]$ gilt, für jedes Individuum c unseres Untersuchungsbereichs.
- $\exists x\phi$ ist genau dann wahr, wenn $\phi[c/x]$ gilt, für irgendein Indidivuum c unseres Untersuchungsbereichs.

Der Untersuchungsbereich ist etwas, das im Zusammenhang der semantischen Interpretation festgesetzt werden muss (siehe weiter unten).

Eine kleine abschließende Spitzfindigkeit: Wir nennen eine Variable x im Kontext einer Formel ϕ *gebunden*, wenn jedes in der Formel vorkommende x die Form $\forall x \ldots x \ldots$ oder $\exists x \ldots x \ldots$ hat, also an einen Quantor gebunden ist. In der Formel $\forall x P(x)$ ist die Variable x gebunden, während sie in der Formel $P(x) \wedge Q(x)$ aber auch in $P(x) \wedge \forall x Q(x)$ als freie Variable enthalten ist. Wir werden unsere semantischen Spezifikationen, im Rahmen dieses Buches, stets so gestalten, dass nur Formeln, die *keine* freien Variablen enthalten, semantisch interpretiert werden. Da demnach nur solche Formeln auch *sinnvolle* Zeichenfolgen sind, nehmen wir immer stillschweigend an, dass jede formale Sprache auf diejenigen Formeln ihrer Spezifikation eingeschränkt ist, die diese Eigenschaft haben, keine freien Variablen zu enthalten.

Semantik Wie im Fall der Aussagenlogik müssen wir nun zunächst eine Möglichkeit finden, wie wir die Sprache $L_{P_{1f}}$ in formal konsistenter Weise an eine externe Wirklichkeit anbinden. Eine derartige *Struktur* $\mathfrak{A}$ der Prädikatenlogik erster Stufe ist definiert als eine *Funktion*, die allen Elementen des nicht-logischen Vokabulars von $L_{P_{1f}}$ ihre Bedeutungen zuordnet. Im Detail bestimmt $\mathfrak{A}$ genau folgendes:

(1) Eine Menge $\mathfrak{A}(\Delta)$: den *Individuenbereich* oder die *Domäne* der Struktur.

(2) $\mathfrak{A}$ ordnet jeder n-stelligen Prädikatenkonstante P mit $n > 0$ eine Teilmenge von $\mathfrak{A}(\Delta)^n$ zu: die Menge aller n-Tupel, die das Merkmal P aufweisen.

(3) Im Fall von null-stelligen Prädikatenkonstanten (=Aussagenkonstanten) p bestimmt $\mathfrak{A}$ einen Wahrheitswert $\mathfrak{A}(p)$.

(4) $\mathfrak{A}$ ordnet außerdem jeder n-stelligen Funktionenkonstante f eine Funktion von $\mathfrak{A}(\Delta)^n$ nach $\mathfrak{A}(\Delta)$ zu. (Da $\mathfrak{A}(f)$ diese Funktion bezeichnet, übergibt man dieser Funktion eine Liste $t_1, \ldots, t_n$ von Argumenten in der etwas gewöhnungsbedürftigen Form $\mathfrak{A}(f)(t_1, \ldots, t_n)$.)

(5) Schließlich ordnet $\mathfrak{A}$ jeder Individuenkonstante c ein Element $\mathfrak{A}(c)$ von $\mathfrak{A}(\Delta)$ zu.

Bemerkung: $\mathfrak{A}(\Delta)^n$ ist, wie oben (S. 10) definiert, das n-fache kartesische Produkt der Menge $\mathfrak{A}(\Delta)$ mit sich selbst bzw. (was gleichbedeutend ist), die Menge aller n-Tupel, die man aus Elementen der Menge $\mathfrak{A}(\Delta)$ bilden kann.

Damit haben wir alle nicht-logischen Bestandteile der Sprache semantisch interpretiert. Ganz analog zur Aussagenlogik müssen wir jetzt nurmehr eine passende formale Spezifikation finden, die jeder Formel, im Kontext jeder Struktur, einen eindeutigen Wahrheitswert zuordnet.

Mit $L_{P_{1f}}(\mathfrak{A})$ bezeichnen wir diejenige Erweiterung der Sprache $L_{P_{1f}}$, die dadurch entsteht, dass wir die Menge der Individuenkonstanten um $\mathfrak{A}(\Delta)$ erweitern. Jedes Element i von $\mathfrak{A}(\Delta)$ verweist dann, in der an $L_{P_{1f}}(\mathfrak{A})$ angepassten Struktur $\mathfrak{A}$, auf sich selbst, es gilt also $\mathfrak{A}(i) := i$.

Nun definieren wir für jede Struktur $\mathfrak{A}$ und alle Terme der Form $f(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\mathfrak{A}(f(t_1, \ldots, t_n)) := \mathfrak{A}(f)(\mathfrak{A}(t_1), \ldots, \mathfrak{A}(t_n)).$$

Wir erhalten so, wie man leicht sieht, für jeden noch so komplexen Term t, der keine Variablen enthält, einen eindeutigen Wert $\mathfrak{A}(t) \in \mathfrak{A}(\Delta)$. Auf dieser Grundlage definieren wir, für alle Strukturen $\mathfrak{A}$, für alle Aussagenkonstanten p, alle Formeln $P(t_1, \ldots, t_n)$ und $t_{n+1} = t_{n+2}$ wo die t_i variablenfreie Terme sind sowie für alle Formeln der Form $\forall x\phi$, $\exists x\phi$, $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \vDash P(t_1, \ldots, t_n) & \text{gdw} & (\mathfrak{A}(t_1), \ldots, \mathfrak{A}(t_n)) \in \mathfrak{A}(P), \\
\mathfrak{A} \vDash t_{n+1} = t_{n+2} & \text{gdw} & \mathfrak{A}(t_{n+1}) = \mathfrak{A}(t_{n+2}), \\
\mathfrak{A} \vDash p & \text{gdw} & \mathfrak{A}(p) = W, \\
\mathfrak{A} \vDash \forall x\phi & \text{gdw} & \text{für alle Individuenkonstanten } c \text{ in } L_{P_{1f}}(\mathfrak{A}) \\
& & \text{gilt } \mathfrak{A} \vDash \phi[c/x], \\
\mathfrak{A} \vDash \exists x\phi & \text{gdw} & \text{es gibt eine Individuenkonstanten } c \text{ in } L_{P_{1f}}(\mathfrak{A}) \\
& & \text{für die } \mathfrak{A} \vDash \phi[c/x] \text{ gilt}, \\
\mathfrak{A} \vDash \neg\phi & \text{gdw} & \text{nicht } \mathfrak{A} \vDash \phi, \\
\mathfrak{A} \vDash \phi \wedge \psi & \text{gdw} & \mathfrak{A} \vDash \phi \text{ und } \mathfrak{A} \vDash \psi.
\end{array}$$

Die ersten drei Definitionen weisen jeder atomaren Aussage, die keine Variablen enthält, einen eindeutigen Wahrheitswert zu. Die Definitionen für $\forall$ und $\exists$ wiederum stellen sicher, dass jede Formel im Grunde in variablenfreie Bestandteile aufgelöst werden kann, deren Wahrheit oder Falschheit die Wahrheit oder Falschheit der Formel bestimmen.

Technische Bemerkung: Spracherweiterungen versus Interpretationen In vielen Logik-Lehrbüchern wird die Semantik der Prädikatenlogik mittels *Interpretationen I* definiert, die den freien Variablen jeder Formel Werte aus $\mathfrak{A}(\Delta)$ zuweisen. Man definiert dann:

$$\mathfrak{A} \vDash \forall x.\phi \quad \text{gdw} \quad \text{für jede Interpretation } I \text{ gilt } \mathfrak{A} \vDash \phi(I).$$

Im Unterschied dazu führen wir die Werte von $\mathfrak{A}(\Delta)$ als zusätzliche Konstanten der Metasprache ein und erreichen so in obiger Definition von $\forall x.\phi$ das selbe Ziel.

Quantoren Quantoren sind im Prinzip nichts anderes als verallgemeinerte Konjunktionen bzw. Disjunktionen. Nennen wir $I(\mathfrak{A})$ den erweiterten Bereich von Individuenkonstanten aus $L_{P_{1f}}(\mathfrak{A})$, so bedeutet der Quantor $\forall x\phi$, in einer bestimmten Struktur $\mathfrak{A}$, nichts anderes als die Konjunktion

$$\bigwedge_{c \in I(\mathfrak{A})} \phi[c/x]$$

und der Quantor $\exists x\phi$ kann auf die Disjunktion

$$\bigvee_{c \in I(\mathfrak{A})} \phi[c/x]$$

herunter gebrochen werden. – Dabei muss man aber beachten, dass man keine dieser Formeln in $L_{P_{1f}}$ ausdrücken kann, weil alleine schon die Menge der Individuenkonstanten abzählbar unendlich ist, zuzüglich der Domänen-Menge $\mathfrak{A}(\Delta)$ kann jederzeit eine überabzählbare Menge $I(\mathfrak{A})$ zustande kommen. Da wir aber in $L_{P_{1f}}$ nur *endliche* Formeln haben, können wir Quantoren leider nicht in dieser expliziten Weise als Konjunktionen und Disjunktionen einführen, sondern wir müssen den Umweg über die Symbole $\forall$ und $\exists$ und die oben angeführten metasprachlichen Definitionen gehen.

Eine abschließende Bemerkung noch zu den Quantoren: die beiden Quantoren $\forall$ und $\exists$ sind *dual*, das heißt, man kann, wie man sofort sieht, den Quantor $\forall$, äquivalent zu obiger Spezifikation, durch folgende explizite Definition festsetzen:

$$\forall x\phi := \neg\exists x\neg\phi,$$

also: „für alle x gilt ϕ“ ist gleichbedeutend mit „es gibt kein x für das nicht ϕ gilt“. Analog kann man definieren:

$$\exists x\phi := \neg\forall x\neg\phi,$$

„es ist nicht der Fall, dass für alle x nicht ϕ gilt“. Deshalb müssen wir eigentlich immer nur einen der beiden dualen Quantoren definieren. (Diese Dualitätseigenschaft werden wir später immer wieder bei den unterschiedlichsten modalen Operatoren finden, die tatsächlich struktural sehr ähnlich den Quantoren sind. Es gilt dann beispielsweise $\Diamond\phi := \neg\Box\neg\phi$ etc.)

Metalogik Unsere Überlegung über Quantoren impliziert, dass es im Fall der Prädikatenlogik im Allgemeinen unmöglich ist, die Wahrheit einer Formel in einer Struktur über einfache Wahrheitstafeln zu entscheiden, da diese Wahrheitstafel im Allgemeinen unendlich groß sein müsste, sobald die Formel einen Quantor enthält.

Zwar kann man die Situation vereinfachen, und ein $I(\mathfrak{A})$ definieren, das jeweils nur diejenigen Individuenkonstanten herauspickt, die in einer Formel enthalten sind, plus die Individuen der Domäne $\mathfrak{A}(\Delta)$. In dieser Konstruktion wird klar, dass man sofort jede Formel aus $L_{P_{1f}}$ per Wahrheitstafeln über $I(\mathfrak{A})$ entscheiden kann, so lange nur die Domäne der Struktur $\mathfrak{A}(\Delta)$ *endlich* ist. Anleitung: Verwende die Übersetzungen der Quantoren in Konjunktionen bzw. Disjunktionen. Dadurch verschwinden die Variablen aus der Formel und wir müssen nur noch die atomaren Bestandteile checken.

Im Allgemeinen Fall einer Domäne $\mathfrak{A}(\Delta)$, die unendlich und möglicher Weise sogar überabzählbar ist, ist so ein einfacher Algorithmus allerdings ausgeschlossen. Hinzu kommt, dass ein elementares Resultat der Metamathematik besagt, dass es Funktionen und Relationen über überabzählbaren und selbst über abzählbar unendlichen Mengen wie $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ gibt, die *unentscheidbar* sind. Das heißt, man kann bei solchen Funktionen und Relationen einige Funktionswerte einfach nicht bestimmen bzw. kann für einige Belegungen einfach nicht entscheiden ob sie in der Relation enthalten sind. Dieses elementare metamathematische Resultat impliziert natürlich, dass die Aufgabe: „Entscheide ob die Formel ϕ in der Struktur $\mathfrak{A}$ erfüllt ist“ für unendliche Strukturen im Allgemeinen *unlösbar* ist, weil es in solchen Strukturen meist einige Formeln ϕ geben wird, wo man diese Frage einfach nicht beantworten kann. Mit anderen Worten: die Frage, ob eine bestimmte Aussage ϕ in einer bestimmten „möglichen Welt“ $\mathfrak{A}$ *wahr* ist, kann aus rein mathematischen Gründen unbeantwortbar sein, wenn nämlich ϕ auf unentscheidbare Relationen oder Funktionen dieser „möglichen Welt“ Bezug nimmt.

Neben diese erste Aufgabe der Entscheidung, ob eine bestimmte Formel in einer bestimmten Struktur wahr ist (man spricht in diesem Zusammenhang auch – neudeutsch – von „model checking“) tritt aber, wie im Kontext der Aussagenlogik bereits ausgeführt, eine mindestens ebenso wichtige zweite Aufgabe, in der Frage, ob eine bestimmte Formel ϕ aus einer Menge von Prämissen Γ folgt (gemäß Tarskis Definition). Bei der Aussagenlogik haben wir gesehen, dass auch diese Frage, zumindest für endliche Prämissenmengen, eindeutig beantwortbar ist – und zwar erneut auf der Grundlage von Wahrheitstafeln.

Bei der Prädikatenlogik erster Stufe ist die Sachlage auch hier nicht so einfach. Eines der wichtigsten metalogischen Resultate (von Alonzo Church) besagt, dass die Frage der logischen Folgerung in der Prädikatenlogik erster Stufe im Allgemeinen *unentscheidbar* ist. Das heißt: es gibt keinen Algorithmus, der für jede beliebige (endliche) Menge von Prämissen Γ und jede Formel ϕ entscheidet, ob

ϕ aus Γ folgt.

Diese *Unentscheidbarkeit* der Prädikatenlogik erster Stufe kann aber in bestimmten Situationen umgangen werden. So findet man in vielen Fällen das Auslangen mit jenem Fragment der Sprache L_{P_1}, das ausschließlich *einstellige Prädikate* enthält. Diese *monadische Prädikatenlogik erster Stufe* – wir wollen sie mit $L_{P_{1m}}$ bezeichnen – ist, anders als der allgemeine Fall, entscheidbar.

Aber auch im Allgemeinen Fall gibt es eine sehr wichtige positive Eigenschaft der Prädikatenlogik. Man kann zwar für eine Formel nicht immer entscheiden, ob sie aus den Prämissen folgt, aber *wenn* die Formel aus den Prämissen folgt, *dann lässt sie sich auch aus diesen ableiten*. Diesen wichtigen Fall diskutieren wir im folgenden Abschnitt.

2.3 Über Kalküle

Ein Kalkül $\vdash$ ist ein formales Verfahren, das die Ableitung von Formeln aus einer Menge von Prämissen Γ ermöglicht. Ein Kalkül ist *korrekt*, wenn für jede Formel ϕ gilt dass

wenn $\Gamma \vdash \phi$ dann $\Gamma \vDash \phi$.

Also: jede im Kalkül ableitbare Formel ist auch eine logische Folgerung im semantischen Sinn. Der Kalkül ist *vollständig*, wenn gilt, dass

wenn $\Gamma \vDash \phi$ dann $\Gamma \vdash \phi$,

wenn also jede logische Folgerung, im semantischen Sinn, auch in dem Kalkül abgeleitet werden kann. Eine Logik nennt man insgesamt *vollständig* wenn ein vollständiger Kalkül für diese Logik existiert.

Die vollständigen Kalküle, die wir diskutieren, sind immer auch korrekt. Grundsätzlich gibt es aber nicht nur korrekte Kalküle, die nicht vollständig sind, also Kalküle, die zwar nur echte logische Folgerungen ableiten, aber eben *nicht alle* logischen Folgerungen. (Solche unvollständigen Kalküle verwendet man zwangsläufig in allen unvollständigen Logiken. Vgl. Abschnitt 3.3.) Es sind auch solche Kalküle denkbar, die vollständig sind, ohne korrekt zu sein. Solche Kalküle leiten zwar *alle* logischen Folgerungen aus einer Prämissenmenge ab, aber sie leiten auch solche Formeln ab, die keine logischen Folgerungen sind. Der triviale Fall eines solchen Kalküls ist die Regel „$\Gamma \vdash \phi$, für alle Γ und alle ϕ", also: „alles folgt aus allem". Dieser totale Kalkül ist zwar vollständig aber auch vollständig nutzlos. Im Regelfall wird man deshalb nur bei solchen Kalkülen die Vollständigkeitsfrage diskutieren, die auch korrekt sind bzw. wird unkorrekte Kalküle nur dann verwenden, wenn klar ist, dass diese Unkorrektheit nur einige wenige „pathologische" Formeln betrifft.

Eine vollständige Logik ist nicht notgedrungen auch *entscheidbar*. Wenn wir jede Formel, die aus den Prämissen folgt auch aus diesen ableiten können, dann impliziert das nicht, dass wir für eine beliebige Formel feststellen können, ob sie aus den Prämissen folgt. Damit das bei einer vollständigen Sprache gegeben wäre müssten wir auch einen vollständigen Kalkül haben, der es erlaubt, alle Formeln abzuleiten, die *nicht* aus einer Menge von Prämissen folgen. Wir könnten dann versuchen, sowohl eine Ableitung der Formel aus den Prämissen als auch eine Ableitung der Formel als Nicht-Folgerung aus den Prämissen zu finden und einer der beiden Suchvorgänge müsste irgendwann erfolgreich sein. – Im Fall der Prädikatenlogik erster Stufe ist es jedoch tatsächlich so, dass diese Logik zwar vollständig ist aber unentscheidbar.

Es gibt eine ganze Reihe von korrekten und vollständigen Kalkülen für die Prädikatenlogik erster Stufe. Rein formal betrachtet sind all diese Kalküle äquivalent (eben weil sie alle korrekt und vollständig sind und also die Ableitung genau der selben Formeln erlauben). Dennoch ist es sinnvoll, unterschiedliche Kalküle zu kennen, da man mit ihnen unterschiedliche Dinge unterschiedlich gut illustrieren kann. Wir sehen uns zwei verschiedene Kalküle an: den *Hilbertkalkül* (auch: axiomatischer Kalkül) und den *Kalkül des natürlichen Schließens*. Weitere Beispiele wären: der Tableaukalkül, der Sequenzenkalkül, der Dialogkalkül (vgl. die Literaturhinweise am Ende dieses Abschnitts).

Der Kalkül des natürlichen Schließens Betrachten wir das folgende bekannte Beispiel:

1	Alle Menschen sind sterblich.
2	Sokrates ist ein Mensch.
3	Also ist Sokrates sterblich.

Wir können uns sehr leicht eine Formalisierung für die drei Sätze überlegen. M und S seien die einstelligen Prädikate für „menschlich“ und „sterblich“, s die Individuenkonstante, die Sokrates bezeichnet. Dann hätten wir folgende formale Version:

1	$\forall x : M(x) \rightarrow S(x)$
2	M(s)
3	S(s)

Im Kalkül des natürlichen Schließens, dessen Regeln auf Seite 32 zusammengefasst sind, sieht der oben intuitiv präsentierte Schluss dann so aus:

1	$\forall x : M(x) \rightarrow S(x)$	
2	$M(s)$	
3	$M(s) \rightarrow S(s)$	E$\forall$ 1,s
4	$S(s)$	E$\rightarrow$ 3,2

Tafel 1:
Die Regeln des Kalküls des natürlichen Schließens

Iterationsregel

$$\begin{array}{lll} \text{n} & A & \\ \hline & A & \text{IT n} \end{array}$$

Konjunktionseinführung

$$\begin{array}{lll} \text{m} & A & \\ \text{n} & B & \\ \hline & A \wedge B & \text{I}\wedge \text{ m,n} \end{array}$$

Konjunktionselimination

$$\begin{array}{lll} \text{n} & A \wedge B & \\ \hline & A & \text{E}\wedge \text{ n} \end{array}$$

Implikationseinführung

$$\begin{array}{l|ll} \text{m} & \underline{A} & \text{H} \\ \text{n} & B & \\ \hline & A \rightarrow B & \text{I}{\rightarrow} \text{ m,n} \end{array}$$

Implikationselimination
(Modus Ponens)

$$\begin{array}{lll} \text{m} & A \rightarrow B & \\ \text{n} & A & \\ \hline & B & \text{E}{\rightarrow} \text{ m,n} \end{array}$$

Äquivalenzeinführung

$$\begin{array}{l|ll} \text{m} & \underline{A} & \text{H} \\ \text{n} & B & \\ \text{p} & \underline{B} & \text{H} \\ \text{q} & A & \\ & A \leftrightarrow B & \text{I}{\leftrightarrow} \text{ m,n,p,q} \end{array}$$

Äquivalenzelimination

$$\begin{array}{lll} \text{m} & A \leftrightarrow B & \\ \text{n} & A & \\ \hline & B & \text{E}{\leftrightarrow} \text{ m,n} \end{array}$$

Disjunktionseinführung

$$\begin{array}{lll} \text{n} & A & \\ \hline & A \vee B & \text{I}\vee \text{ n} \end{array}$$

Disjunktionselimination

$$\begin{array}{l|ll} \text{m} & A \vee B & \\ & \underline{A} & \text{H} \\ \text{n} & C & \\ & \underline{B} & \text{H} \\ \text{p} & C & \\ \hline & C & \text{E}\vee \text{ m,n,p} \end{array}$$

Negationseinführung

$$\begin{array}{l|ll} \text{m} & \underline{A} & \text{H} \\ \text{n} & B & \\ \text{p} & \neg B & \\ \hline & \neg A & \text{I}\neg \text{ m,n,p} \end{array}$$

Negationselimination

$$\begin{array}{lll} \text{n} & \neg\neg A & \\ \hline & \text{A} & \text{E}\neg \text{ n} \end{array}$$

Existenzquantoreneinführung

$$\begin{array}{lll} \text{n} & A\left[\frac{t}{x}\right] & \\ \hline & \exists x A & \text{I}\exists \text{ n,t} \end{array}$$

Existenzquantorenelimination

$$\begin{array}{l|ll} \text{m} & \exists x A & \\ \text{n} & \underline{A\left[\frac{a}{x}\right]} & \text{H} \\ \text{p} & B & \\ \hline & B & \text{E}\exists \text{ m,n,p,a} \end{array}$$

Allquantorenelimination

$$\begin{array}{lll} \text{n} & \forall x A & \\ \hline & A\left[\frac{t}{x}\right] & \text{E}\forall \text{ n,t} \end{array}$$

Allquantorenintroduktion

$$\begin{array}{lll} \text{n} & A & \\ \hline & \forall x A & \text{I}\forall \text{ n} \end{array}$$

Identitätselimination

$$\begin{array}{lll} \text{n} & t = t' & \\ \text{m} & A & \\ \hline & A\left[\frac{t}{t'}\right] & \text{E= n,m} \end{array}$$

Identitätsintroduktion

$$\begin{array}{ll} \hline t = t & \text{I=} \end{array}$$

Der Kalkül enthält für jeden Junktor und jeden Quantor eine Einführungs- und eine Eliminationsregel. Der Beweis der Korrektheit dieses Kalküls ist somit ziemlich trivial (es ist ein einfacher „Induktionsbeweis"). Um zu zeigen, dass der Kalkül vollständig ist, muss man aber zusätzlich zur Korrektheit noch zeigen, dass sich auch tatsächlich *jede* logische Folgerung ableiten lässt. (Und dies zu zeigen ist wesentlich weniger einfach.)

Der Hilbertkalkül Im Unterschied zum Kalkül des natürlichen Schließens, der nur aus *Umformungsregeln* besteht, verfolgt der Hilbertkalkül eine andere Strategie. Dieser Kalkül basiert wesentlich auf *Axiomen*. Für die *Aussagenlogik* mit den Junktoren $\rightarrow$ und $\neg$ sind dies folgende drei Axiome:

(A1) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
(A2) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$
(A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$.

Dazu gibt es dann noch drei Ableitungsregeln:

(R1) Jedes Axiom ist ein Theorem.
(R2) *Substitution*: Ersetzt man eine Satzvariable in einem Theorem durch eine Formel, so ist das Resultat erneut ein Theorem.
(R3) *Modus Ponens*: Wenn $\phi \rightarrow \psi$ und ϕ Theoreme sind, so auch ψ.

In der Prädikatenlogik erster Stufe mit dem Quantor $\forall$ benötigen wir außerdem noch folgende Axiome und Regeln[1]:

(A4) $\forall x\phi \rightarrow \phi[t/x]$ wobei t irgendein Term ist.
(A5) $\phi \rightarrow \psi \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\psi)$, falls x weder in ϕ noch in einer der vorangehenden Prämissen als freie Variable enthalten ist.

Falls die Prädikatenlogik außerdem noch das Identitätssymbol enthält, benötigen wir zusätzlich die Axiome:

(A6) $x = x$
(A7) $\forall x, y : x = y \rightarrow (\phi \rightarrow \phi[y/x])$

Und das wars auch schon! Wollen wir nun aus einer Menge von Formeln Γ eine andere Formel ϕ ableiten, so fügen wir die Elemente von Γ einfach als Axiome hinzu und wenden so lange die Regeln (R1) bis (R3) an, bis wir ϕ erhalten. Im Fall des obigen Beispiels sieht diese Ableitung etwa so aus:

[1]Der Quantor $\exists$ wird hier explizit definiert als $\neg\forall x\neg\phi$.

1	$\forall x : M(x) \to S(x)$	
2	$M(s)$	
3	$\forall x : (M(x) \to S(x)) \to (M(s) \to S(s))$	(A4) und (R2)
4	$M(s) \to S(s)$	(R3) aus 3 und 1
5	$S(s)$	(R3) aus 4 und 2

Nachteil des Hilbert-Kalküls ist, dass er bei komplexeren Ableitungen zu extrem komplizierten Konstruktionen führt (der Kalkül des natürlichen Schließens ist demgegenüber wesentlich besser geeignet für die praktische Arbeit des Ableitens von logischen Folgerungen!). Da wir aber nicht vor haben, uns in deduktiven Fingerübungen zu verlieren, muss uns das wenig kümmern. Wesentlicher ist für uns vielmehr der signifikante Vorzug des Hilbertkalküls, dass er, in vielen Fällen, besser als andere Kalküle die strukturellen Eigenschaften nichtklassischer Logiken illustrieren hilft. Wir werden daher die deduktiven Aspekte von Logiken durchwegs anhand des Hilbertkalküls diskutieren.

Der Nutzen von Kalkülen liegt für uns überhaupt weniger in der praktischen Ableitung von Formeln – diese Aufgabe können wir ruhig den Mathematikern und Informatikern überlassen, die darauf spezialisiert sind. Für unsere philosophischen Zwecke sind Kalküle primär deshalb interessant, weil sie bestimmte strukturelle Eigenschaften einer Logik illustrieren.

2.4 Die philosophische Bedeutung von Logik

Wenn man Logik ausschließlich als ein Werkzeug zur Beschreibung von „Eigenschaften des mathematischen Universums“ betrachtet, dann ist die Prädikatenlogik erster Stufe das Kernkonstrukt, das durch bestimmte Überlegungen, im Rahmen der Ausdrucksmöglichkeiten, die sich zwischen der ersten und der zweiten Stufe ergeben, zu ergänzen ist. Eine solche traditionelle Logik, wie die unten noch zu diskutierende Typenlogik, wäre vor diesem Hintergrund allerdings pure Esoterik, und solche Konstrukte wie sie die Modallogik und die mehrwertige Logik diskutieren wären in diesem Sinn betrachtet im Grunde nichts was den Namen „Logik“ verdient. Tatsächlich wurde und wird diese restriktiv mathematische Sicht der Dinge von vielen Philosophen vertreten, allen voran von W. V. O. Quine, der alle logischen Formalismen jenseits der Prädikatenlogik erster Stufe als mathematisch wie philosophisch nutzlose formale Spielereien betrachtet hat.

Quines *Ontologie* ist in diesem Zusammenhang von einiger Wichtigkeit, weil sie den mathematisch-logischen Standpunkt zu einem umfassenden wissenschaftstheoretischen Programm ausbaut, in dem alle empirischen Wissenschaften in den Zusammenhang der „Logik erster Stufe“ herein genommen werden. Dabei ist sowohl Quines ablehnende Haltung gegenüber Logiken höherer Stufe für uns von Interesse, als auch seine restriktive Ontologie, in der vor allem solche Logiken wie die Modallogik oder die mehrwertige Logik kritisiert werden.

Die Logik höherer Stufe wird von Quine ausgeklammert, weil er der Auffassung ist, dass man *in der Mathematik* das Auslangen mit der ersten Stufe findet. Alle anderen Logiken werden von Quine ausgeklammert, weil er der Auffassung ist, dass man in den gesamten Wissenschaften das Auslangen *mit der Sprache der Mathematik finden kann* (die man, was letztlich niemand bestreiten wird, im Rahmen der Mengentheorie und der Logik erster Stufe aufbauen *kann*[2]).

Quines Ontologie besagt also, dass die Wissenschaften, als formales Rahmenwerk, ausschließlich nur die Prädikatenlogik erster Stufe bzw. die mathematische Logik benötigen. Quine hat verschiedene Argumente für diese Auffassung (teils auch Argumente, die sich direkt gegen die eine oder andere „abweichende“ Logik richten), der wichtigste Grund für seine Auffassung ist jedoch offensichtlich in dem spezifischen Ontologieverständnis Quines selbst zu finden. Für Quine ist Ontologie einerseits eine sehr konkrete wissenschaftliche Kernproblematik; es geht um die Frage, welche Objekte existieren und welche nicht: Ontologie behandelt *Existenzfragen*. Und Ontologie behandelt, für Quine, insbesondere *nur* solche Fragen. Das bedeutet, dass das einzige was für die Ontologie vonseiten der Logik beigesteuert werden kann, die Spezifikation eines passenden Rahmenwerkes für das konsistente Stellen von Existenzfragen ist. Dieses Rahmenwerk liefert die Prädikatenlogik erster Stufe. „To be is to be the value of a bound variable“ lautet eine der berühmtesten Aussagen Quines. Das soll heißen, dass Existenz nichts anderes bedeutet, als die Eigenschaft zu haben, in dem von den Wissenschaften adressierten Universum der Dinge *vorhanden* zu sein. Wenn wir dann für jedes Ding D, das wir uns denken können, oder dessen Existenz wir *behaupten* können, ein Prädikat P in die Sprache einführen, das die Eigenschaft repräsentiert, dieses Ding D zu sein, dann können wir stets anhand der Formel

$$\exists x : P(x)$$

die Frage nach der Existenz dieses Dinges präzise formulieren (und es geht hier am Ende nur mehr darum, allen solchen Formeln die passenden Wahrheitswerte zuzuordnen). *Ontologie erschöpft sich für Quine darin* solche Formeln aufzustellen und damit entsprechende Existenzfragen zu formulieren, die dann von den Einzelwissenschaften beantwortet werden können. Quine spricht in dem Zusammenhang auch von „ontologischen Verpflichtungen“ (ontological commitments), die man im Rahmen der Logik definieren kann, die einzulösen aber eine Aufgabe der Einzelwissenschaften ist.

Diese Ontologieauffassung bei Quine ist ebenso *konkret* wie extrem heruntergekocht. Von der alten Ontologie als einer großen systematischen philosophischen Disziplin bleibt bei Quine nichts weiter übrig als der absolut einfache

[2]Das, was bestimmte Vertreter eines logizistischen Programms hier einwenden werden, ist eher nur, dass sich die Mathematik unter Umständen auf eine andere Weise *besser* aufbauen lässt bzw. auch, dass man so tiefere Einsichten in ihr Wesen erhält usw.

und univoke Existenzbegriff der Prädikatenlogik erster Stufe. Ontologie wird dadurch letztlich aufgelöst: es gibt einfach keine nicht-trivialen, keine *konzeptuellen* ontologischen Fragen mehr.

Ich erwähne diesen Quineschen Ontologiebegriff hier deshalb so ausführlich, weil er in gewisser Weise das genaue Gegenteil von dem repräsentiert, was ich hier vorschlagen will, dass wir unter Ontologie verstehen sollten. Dieser andere und wesentlich reichhaltigere Ontologiebegriff geht im wesentlichen auf Rudolf Carnap zurück. Für Carnap ist es die Aufgabe der Philosophie (der „Philosophie als Wissenschaftslogik“) bestimmte Logiken als „formale Rahmenwerke“ zu spezifizieren, die uns dann in die Lage versetzen, alle sprachlichen Bestandteile der Wissenschaften in einer möglichst umfassenden und eleganten Art und Weise zu formalisieren. Es geht dabei nicht um die reine Spezifikation von Existenzfragen, auch nicht darum, bloß eine Sprache zu finden, die „stark genug“ ist, das mathematische Universum zu beschreiben.

Der ontologische Gehalt, die *Ausdrucksstärke* einer formalen Sprache liegt für Carnap auf einer völlig anderen Ebene als in der mathematischen Logik oder bei Quine. Ausdrucksstärke und damit auch Ontologie insgesamt wird von Carnap nicht *metamathematisch* verstanden sondern *linguistisch*. Die Probleme der Ontologie sind für Carnap nicht Probleme, die sich auf Existenzfragen reduzieren lassen sowie auf Fragen der Charakterisierbarkeit mathematischer Universen. Vielmehr geht es in der Ontologie für Carnap darum, eine formale Sprache zu finden, die in möglichst adäquater Weise *alle Feinheiten des Ausdrucks* einer bestimmten wissenschaftlichen oder natürlichen Sprache wiederzugeben in der Lage ist. Während für Quine also die Logik etwas ist, das *völlig jenseits* der Sprache angesiedelt ist, sozusagen als deren äußeres mathematisch-ontologisches *Fundament*, ist für Carnap die Logik tatsächlich nichts weiter als *die formale Struktur von Sprache selbst*. Diese Struktur kann im Rahmen der formalen Rekonstruktion natürlich auch kritisiert oder verbessert werden, aber im wesentlichen ist es das Ziel dieser Tätigkeit, die Struktur möglichst unangetastet wieder zu geben, also die jeweilige (natürliche, wissenschaftliche) Sprache in einer formalen Logik gewissermaßen *strukturell zu spiegeln*.

Ontologie ist, für Carnap, nicht mit der Frage gleichzusetzen „Was existiert?“ (auf die es, wie Quine treffend bemerkt, nur die simple Antwort gibt: „Alles!“). Ontologie ist für Carnap also, anders als für Quine, keine genuin *wissenschaftliche* (Einlösung ontologischer Verpflichtungen!) sondern eine genuin *philosophische* Problematik. Es geht nicht um die Frage, *was* existiert, sondern darum, *wie* sich Existenz in der einen oder anderen Weise manifestiert. Logik ist deshalb für Carnap eine offene und flexible Angelegenheit, weil sie danach trachten muss, die unterschiedlichen *Modalitäten* wissenschaftlicher und natürlicher Sprachen abzubilden. Ganz anders als Quine, der eine strikt mathematische und somit monolithische Auffassung von Logik hat ist Carnaps zentraler Grundsatz das *logische Toleranzprinzip*:

> „*In der Logik gibt es keine Moral.* Jeder mag seine Logik, d. h. seine Sprachform, aufbauen wie er will. Nur muß er, wenn er mit uns diskutieren will, deutlich angeben, wie er es machen will, syntaktische Erörterungen geben anstatt philosophischer Erörterungen." (Carnap, 1968 [1934], 45)

Natürlich gibt es dann auch bei Carnap diesen Gesichtspunkt der ontologischen Verpflichtung und ihrer Einlösung, als einem völlig jenseits der philosophischen Möglichkeiten gelagerten Gesichtspunkt von Ontologie: es geht um die Frage der *Akzeptanz* und der *Bewertung* ontologischer Vorschläge, die eine Sache der Einzelwissenschaften ist. Aber dieser Gesichtspunkt ist hier deshalb eher unspektakulär, weil sich Ontologie eben nicht auf diesen Gesichtspunkt *beschränkt* und also nicht *aufhört* eine philosophische Problematik zu sein.

Diese carnapsche Sichtweise spielt eine zentrale Rolle in der Entwicklung der analytischen Philosophie. Das Gesamtgebiet der *philosophischen Logik* geht letztlich auf diese Sichtweise zurück, insbesondere die von Richard Montague begründete *formale Linguistik* und die durch Saul Kripke und andere entwickelte *Modallogik*.

Wenn wir uns hier auf diese Tradition stützen, dann tun wir das jedoch in einer bestimmten pointierten Art und Weise. Während klassischer Weise versucht wurde, den carnapschen Gesichtspunkt von Ontologie als einer formalen Charakterisierung der Strukturzusammenhänge von Sprache, *zu verbinden* mit der metamathematischen Auffassung von Logik; während also das Ideal formuliert wurde, eine Logik als *umfassende* formale Sprache zu finden, die alle metamathematischen und alle linguistischen ontologischen Belange abdecken kann, wollen wir diese beiden Problemstellungen *voneinander trennen*. Wir betrachten die Sprache der Mathematik dezidiert *als unsere Metasprache*, in der wir dann unsere Logiken (als Objektsprachen) spezifizieren. Im Fall dieser Objektsprachen aber wollen wir ausschließlich auf den Gesichtspunkt der Ausdrucksstärke in dem nicht-mathematischen, also in dem linguistischen Sinn achten.

Es scheint so, als wären viele philosophischen Probleme und auch Missverständnisse darauf zurückzuführen, dass nicht klar genug zwischen den im engen Sinn mathematischen und den philosophischen Aspekten von „Ausdrucksstärke" unterschieden wurde. Während erstere eigentlich eine Problematik definieren, die man guten Gewissens als mathematisches Detailproblem ohne tiefere philosophische Relevanz identifizieren kann (sieht man einmal ab von dem wissenschaftstheoretischen Spezialgebiet einer *Philosophie der Mathematik*), entfernt sich in letzterer der Standpunkt völlig von mathematischen Spezialdiskussionen und zieht ein Gebiet von in einem sehr klassischen Sinn philosophischen Problemstellungen auf.

Eine weitere wesentliche Frage, die wir klären müssen, ist die des Verhältnisses dieser Ontologieauffassung zu der viel älteren Tradition einer Ontologie, die *rein konzeptuell* vorgeht, mit Logik meist wenig oder nichts zu tun hat, dafür aber sehr viel mit dem Anspruch, eine systematische Beschreibung dessen zu liefern, wie die Welt wirklich ist. Ontologie oder Metaphysik, in diesem Sinn verstanden, ist eine *systematische wissenschaftliche Disziplin*, die deduktiv vor allen anderen Wissenschaften angesiedelt ist. Wir leiten die Prinzipien dieser anderen Wissenschaften dann aus der ontologisch-metaphysischen Kernkonstruktion ab: so das Ideal einer Metaphysik als „Philosophia Perennis“, das noch bei Leibniz, Kant und Hegel eine zentrale Rolle gespielt hat.

Ohne Zweifel ist die von Rudolf Carnap begründete „linguistische“ Auffassung von Ontologie ein Nachfolgemodell dieser älteren Konzeptionen von Ontologie und Metaphysik. Wie in den klassischen „Systemen“ der Philosophie werden ja auch hier *universelle Rahmenwerke* geschaffen, für die Wissenschaften und für jede andere sprachliche Ausdrucksweise. Während bei Quine diese *konzeptuelle* Seite der Ontologie gänzlich wegfällt – man hat Quines Ontologieverständnis deshalb auch als ein *deflationäres* bezeichnet – ist sie in der Carnap-Tradition kaum weniger wesentlich als in den klassischen Systemen der Metaphysik. Der fundamentale Unterschied zur klassischen Zugangsweise besteht nur darin, dass bei Carnap jeder Anspruch aufgegeben wird, vonseiten der Philosophie irgendwelche *eigenständigen* Konzeptualisierungen beizusteuern. Ontologie, im Sinne Carnaps ist, so könnte man es ausdrücken, nicht *konstruktiv*, sondern *rekonstruktiv*. Die Philosophie liefert, für Carnap, keine *theoretischen Systeme* sondern sie liefert lediglich *rationale Rekonstruktionen* von Konzepten, die stets jenseits des philosophischen Geschehens entstanden sein müssen. Während die klassische Philosophie also meint, den Wissenschaften ein konzeptuelles Gerüst unterschieben zu müssen, ist in der analytischen Philosophie Carnaps dieses Gerüst nichts, das die Philosophie erfinden könnte: es ist in den Objekten der philosophischen Analyse bereits gegeben. Philosophie, in diesem modernen Sinn, dem auch die vorliegende Darstellung verpflichtet ist, ist zwar durchaus *konzeptuell* (und nicht, wie bei Quine, deflationär), aber die Konzepte, die von der Philosophie formal rekonstruiert werden, sind keine *Eigenschöpfungen* der Philosophie mehr, sondern es sind die genuinen Bestandteile wissenschaftlicher und natürlicher Sprachen. Das *konzeptuelle Material* der Philosophie ist identisch mit dem sprachlichen Material unserer ganzen (wissenschaftlichen und außerwissenschaftlichen) Kultur.

Eigenständig sind die Konzeptualisierungen der Philosophie, in diesem carnapschen Verständnis der analytischen Philosophie, nur in dem Bereich, wo die Philosophie *formale* Konzepte ausarbeitet – Philosophie *ist*, für Carnap, so letztendlich identisch mit „Wissenschaftslogik“. Aber diese eigenständigen Konstrukte ergeben nur unter der Voraussetzung Sinn, dass es uns gelingt, sie an die intendierten sprachlichen Konstruktionen (Wissenschaft, natürliche Sprache) erfolgreich *anzubinden*. Ohne eine solche Anbindung ist „philosophische Logik“ nur eine Ansammlung formaler Spielereien und damit, wie Edmund Husserl es ausgedrückt hat, „eine Art philosophischer Kinderei“.[3] Denn: anders als die Kernkonstruktionen der *mathematischen Logik* (also Prädikatenlogik erster Stufe plus deren Erweiterungen in Richtung der zweiten Stufe) haben die meisten anderen logischen Konstruktionen keinen genuin mathematischen Nutzen. Natürlich kann man diese Diskussionen, etwa im Rahmen der Informatik, als eigenständige Formalismen einer „anwendungsorientierten Mathematik“ auffassen und als solche auch *rein formal* diskutieren. Aber das wiederum ist für die Philosophie genau so viel oder wenig relevant wie irgendein anderes Teilgebiet der angewandten Mathematik. Diese Logiken werden nur unter der Bedingung „philosophisch“, haben nur unter der Bedingung überhaupt eine „philosophische Bedeutung“, dass wir eine klare konzeptuelle philosophische Interpretation dafür anzubieten haben. Deshalb sind die Zielsetzungen und die Inhalte dieses Buches auch im Grunde in viel stärkerem Maß philosophisch-konzeptuell als formallogisch.

Wir schließen diese grundsätzlichen Bemerkungen ab durch eine Anmerkung zu den derzeit extrem weit verbreiteten Ansätzen einer „formalen Ontologie“ oder „analytischen Metaphysik“, zu Versuchen also, die klassische Metaphysik innerhalb der analytischen Tradition einer Renaissance zuzuführen. Diese Entwicklungen sind in mancher Hinsicht sicher zu begrüßen, namentlich dort wo sie allzu „deflationäre“ Positionen quinescher Provenienz ablösen. In diesem allgemeinen Sinn verstanden konvergiert die „analytische Metaphysik“ mit der von Rudolf Carnap vertretene Programmatik des „logischen Toleranzprinzips“. Überall dort aber wo diese Ansätze eher in die Richtung gehen, dass erneut ein abgeschotteter Bereich für genuin philosophische Konzeptualisierungen aufgezogen werden soll, entfernen sie sich auch von dem hier eingenommenen Standpunkt.

Das, was formal-logische Konstrukte *abbilden* können, sind bestimmte Ausdruckselemente von natürlichen oder wissenschaftlichen Sprachen oder auch nur Ausdrucks*möglichkeiten* solcher Sprachen, die in der einen oder anderen Weise zu ergreifen dann eine Sache der Benutzer dieser formalen Konstrukte ist. Es scheint jedoch einiges dafür zu sprechen, dass überschwängliche Hoffnungen, dass derartige formal elaborierte Konstruktionen am Ende in der Lage sein könnten, *direkt* so etwas wie den strukturalen Kern der Welt da draußen wiederzugeben, in der Regel überzogen sind. Denn: es scheint kaum möglich, derartige Strukturen *direkt* in der „Außenwelt“ zu identifizieren, ohne eine zwischengeschaltete Ebene von Bezügen auf Sprache bzw. auf philosophische Annahmen und Intuitionen, die zu rechtfertigen letztlich eine empirische Angelegenheit ist, eine Domäne der Geschichtswissenschaften, der Soziologie und der Psychologie. Das, was formale Logik *abbildet*, ist daher nie die Struktur der Welt da

[3](Husserl, 1981 [1929], 12).

draußen (mit Kant zu sprechen: der *Dinge an sich*) sondern die Struktur theoretischer Konstruktionen, deren Bezug auf die empirische Welt niemals innerhalb der Logik selbst hergestellt werden kann. Formale Logik und Philosophie insgesamt sind also auf die Kooperation mit den empirischen Wissenschaften angewiesen. Nur so können die formalen und konzeptuellen Vorschläge der Philosophie den Rahmen „philosophischer Kindereien“ sprengen und zu in der interdisziplinären Landschaft der Wissenschaften sowie in der gesellschaftlichen Wirklichkeit brauchbaren Beiträgen werden.

2.5 Klassische Logik und ihre Variationsmöglichkeiten

Im Grunde ist unsere Vorgangsweise in diesem Buch extrem einfach. Wir *definieren* als klassische Logik die (zweiwertige) Aussagenlogik und die Prädikatenlogik erster Stufe und alle anderen Logiken, die wir einführen, ergeben sich als Varianten und Erweiterungen dieser Kernkonstrukte, auf folgenden Ebenen:

(1) Variation des nicht-logischen Vokabulars.

(2) Variation des logischen Vokabulars.

(3) Aufhebung der Beschränkung auf zwei Wahrheitswerte.

Ad (1): das nichtlogische Vokabular einer Logik sind die Aussagen-, Prädikaten- und Funktionenkonstanten, die man in ihr zur Verfügung hat. Zwar gibt es zweifellos eine ganze Reihe von Möglichkeiten auf dieser Ebene die klassische Logik zu erweitern (man könnte Prädikate auch ohne klassische Typenstruktur einführen oder aber Funktionen im Stil des klassischen von Alonzo Church entwickelten λ-Kalküls), aber wir werden hier nur eine Variante, als die elementarste, diskutieren: die Variante der Einführung von Prädikaten *höherer Stufe* (plus den in Abschnitt 3.4 diskutierten flexiblen Typenkonstruktionen).

Ad (2): Variation des logischen Vokabulars bedeutet die Einführung von zusätzlichen Junktoren und Operatoren in eine formale Sprache. Diese Form einer Variation wird dadurch leistungsfähig, dass wir auf der semantischen Ebene neue Möglichkeiten finden, wie wir solche nicht-klassischen Junktoren und Operatoren interpretieren können. Wir diskutieren diese Variante hier vor allem im Rahmen der *Modallogik* (im allgemeinsten Sinn einer „Kripke-Semantik“).

Ad (3): Abgesehen von diesen beiden Möglichkeiten, eine formale Logik *um zusätzliche Sprachelemente* zu erweitern, bleibt dann noch die Möglichkeit, eine vorhandene Sprache auf der semantischen Ebene *flexibler* zu interpretieren. Dies kann man einerseits auf der Ebene der modallogischen Semantik erreichen (siehe Punkt (2)), aber man kann auch dadurch eine zusätzliche Flexibilität gewährleisten, dass man die semantischen Interpretationen nicht, wie im klassischen Fall, nur *zweiwertig* vornimmt (sodass jede Formel genau einen der beiden Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ erhalten muss), sondern in einem Kontext wo die beiden Grund-Wahrheitswerte um zusätzliche Werte ergänzt werden. Resultat sind die unterschiedlichen Spielarten der *mehrwertigen Logik*.

Diese drei Optionen sind zunächst nicht philosophisch motiviert sondern rein formal-struktural. Wir werden auch in jedem der drei Fälle so vorgehen, dass wir zunächst ein bestimmtes formales Ausdrucksrepertoire erarbeiten, um auf dieser Grundlage die verschiedenen philosophischen Spielarten und Interpretationsmöglichkeiten dieses Ausdrucksrepertoires zu diskutieren.

2.6 *Hinweise zur Metamathematik

Obwohl wir, wie oben angedeutet, hier nicht auf die Details der mathematischen Grundlagendebatte im Allgemeinen und der metamathematischen Aspekte von Logik im Besonderen eingehen wollen, hier ein kurzer Überblick über die wichtigsten klassischen Resultate der Metalogik und Metamathematik. (Auf diese Ausführungen wird im weiteren Verlauf dieses Buches nur in Abschnitt 3.3 Bezug genommen.)

Zu diesem Zweck führen wir zunächst ein paar modelltheoretische Begriffe ein. Zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ sind *isomorph*, wenn es eine bijektive Funktion φ von $\mathfrak{A}(\Delta)$ nach $\mathfrak{A}'(\Delta)$ gibt, die folgende Eigenschaften hat:

(1) Für jede Aussagenkonstante p gilt $\mathfrak{A}(p) = \mathfrak{A}'(p)$.

(2) Für jede Prädikatenkonstante P und jede Liste $(c_1, \ldots, c_n)$ von Objekten aus $\mathfrak{A}(\Delta)$ gilt $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathfrak{A}(P)$ genau dann wenn $(\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_n)) \in \mathfrak{A}'(P)$.

(3) Für jede Funktionenkonstante f und jede Liste $(c_1, \ldots, c_n)$ von Objekten aus $\mathfrak{A}(\Delta)$ gilt $\mathfrak{A}(f)(c_1, \ldots, c_n) = \mathfrak{A}'(f)(\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_n))$.

Mit anderen Worten: die Domänen der beiden Strukturen sind gleichmächtig und man kann die Objekte der beiden Domänen einander so zuordnen, dass entsprechende Objekte stets exakt die selben Merkmale bzw. die selben Funktionswerte aufweisen. Noch anders ausgedrückt: isomorphe Strukturen repräsentieren zwei struktural absolut identische (bzw. kongruente) „mögliche Welten“.

Eine Struktur $\mathfrak{A}$ ist dann durch eine Formelmenge Φ *bis auf Isomorphie charakterisiert*, wenn $\mathfrak{A}$ ein Modell von Φ ist und wenn jedes weitere Modell $\mathfrak{A}'$ von Φ zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist.

Nun ist es zweifellos eine legitime Zielsetzung für eine auf Logik gegründete Mathematik, dass diese alle für die Mathematik relevanten Mengen – das gesamte „mathematische Universum“ also – in dem eben spezifizierten Sinn bis auf Isomorphie zu charakterisieren hat. Gesucht wäre also eine endliche Menge von

Axiomen U, die das mathematische Universum oder zumindest solche grundlegenden Mengen wie die natürlichen oder die reellen Zahlen bis auf Isomorphie charakterisiert. Das mathematische Programm, das diese Forderung stellt, ist eine Spielart des sogenannten *Logizismus* – wir wollen hier von „platonistischem Logizismus" sprechen, weil es ein Logizismus ist, der die explizite formale Bereitstellung der mathematischen Objekte einfordert.

Demgegenüber besteht eine andere, „schwache" logizistische Forderung darin, dass die Logik für die Mathematik ausschließlich eine Sprache liefert, die es ihr erlaubt (1) über das gesamte mathematische Universum *zu sprechen*, also jede beliebige Eigenschaft dieses Universums *auszudrücken* und (2) genau in dem Fall, dass eine solche Eigenschaft beweisbar ist, müsste sie auch in dem schwach-logizistischen System *ableitbar* sein.

Anders als der schwache Logizismus, der sich nur auf den Begriff der Beweisbarkeit stützt, gibt es dann noch die Spielarten eines „starken Logizismus", der (1) die Forderung stellt, dass genau jeder wahre mathematische Satz in dem System ableitbar (beweisbar) sein muss und (2) dass das System uns in die Lage versetzen muss, alle für das Funktionieren des Systems relevanten Begriffe, also nicht nur die Begriffe der Mathematik sondern auch alle für das Funktionieren des Systems erforderlichen metamathematischen und logischen Konzepte zu spezifizieren. Diese zweite Forderung ist deshalb plausibel, weil ein logisches System, das seine eigene mathematische Konstruktion nicht auszudrücken imstande ist, ganz offensichtlich in einem bestimmten Sinn *unvollständig* wäre.

Zu diesen drei Konzepten – platonistischer, schwacher und starker Logizismus – wollen wir nun ein paar Dinge sagen. Es wird sich dabei herausstellen, dass nur der schwache Logizismus ein in jeder Hinsicht realisierbares Programm darstellt, während die beiden anderen Varianten bestimmte Limitierungen aufweisen.

Der platonistische Logizismus: Vollständigkeit und Löwenheim-Skolem
Eines der zentralen Resultate der metamathematischen Debatte ist der sogenannte Satz von Löwenheim-Skolem, der (unter anderem) besagt, dass jede erfüllbare Formelmenge der Prädikatenlogik erster Stufe (also jede Formelmenge, die überhaupt ein Modell besitzt) ein Modell besitzt, dessen Kardinalität nicht größer ist als die Kardinalität der Formelmenge selbst.

Unangenehme Konsequenz für den platonistischen Logizismus, auf der Ebene der Prädikatenlogik erster Stufe: eine endliche Formelmenge ermöglicht hier stets nur die Charakterisierung einer endlichen Menge, weder die natürlichen noch die reellen Zahlen können also in der Prädikatenlogik erster Stufe bis auf Isomorphie charakterisiert werden! (Selbst wenn wir unendliche Formelmengen zulassen, können wir immer noch die reellen Zahlen nicht bis auf Isomorphie charakterisieren, weil die gesamte Formelmenge der Prädikatenlogik erster Stufe nur abzählbar unendlich ist.)

Dem gegenüber ist die Tatsache fest zu halten, dass es sehr wohl (endliche)

Axiomensysteme gibt, die die natürlichen oder auch die reellen Zahlen bis auf Isomorphie charakterisieren. Für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind ein berühmtes Beispiel dafür die sogenannten Peano-Axiome, die $\mathbb{N}$ anhand einer Nachfolgerfunktion s beschreiben, die folgende Axiome erfüllt:

(1) 0 ist kein Wert der Nachfolgerfunktion s.

(2) s ist injektiv.

(3) Für jede Teilmenge X von $\mathbb{N}$ gilt: Ist $0 \in X$ und ist mit $n \in X$ stets $s(n) \in X$, so ist $X = \mathbb{N}$. (Induktionsaxiom)

Diese Axiome charakterisieren die natürlichen Zahlen, wie sich zeigen lässt, bis auf Isomorphie. Allerdings lässt sich das dritte Axiom (Induktionsaxiom) nicht in einer Logik erster Stufe ausdrücken, da dort die Objekte der ersten Stufe die Elemente von $\mathbb{N}$ repräsentieren würden und Teilmengen von $\mathbb{N}$ somit nur über Prädikate beschrieben werden könnten. Um über Prädikate quantifizieren zu können benötigt man aber eine *Logik zweiter Stufe*, wie wir sie in Abschnitt 3.3 beschreiben werden. Nur in einer solchen Sprache lässt sich das Induktionsaxiom formalisieren, etwa in der Form:

$$\forall X((X(0) \land \forall x(X(x) \to X(s(x)))) \to \forall y X(y)).$$

Die Variable X der zweiten Stufe quantifiziert in diesem Ausdruck über einstellige Prädikate, x und y sind gewöhnliche Variablen der ersten Stufe.

Analog existieren Axiomensysteme für die reellen Zahlen nur auf der Ebene der Logik zweiter Stufe, und daraus folgt natürlich, dass die Logik erster Stufe für die Belange des „platonistischen Logizismus" völlig ungeeignet ist: sie ist für diesen *zu ausdrucksschwach*.

Warum verwirft man also nicht die Prädikatenlogik erster Stufe und ersetzt sie durch ein System der zweiten Stufe, das diese Ausdrucksmöglichkeiten bietet? – Die Antwort auf diese Frage ist sehr einfach: es ist eine jenseits aller Logizismen absolut grundlegende Forderung, die man an ein mathematisches System stellen wird, dass genau alle in diesem System als logische Folgerungen definierten Ausdrücke auch tatsächlich in dem System ableitbar sind. Eine für die Belange der Mathematik geeignete Logik sollte also jedenfalls *vollständig* sein. Die Prädikatenlogik erster Stufe hat, wie wir oben ausgeführt haben, diese Eigenschaft, *nicht aber die Prädikatenlogik zweiter Stufe* oder irgendeine andere Logik, die ausdrucksstark genug ist zur axiomatischen Charakterisierung solcher Mengen wie $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

Das heißt: wir bezahlen für das Erlangen einer für den platonistischen Logizismus erforderlichen Ausdrucksstärke unweigerlich den Preis der Vollständigkeit. Und das entzieht dieser Programmatik doch zumindest einiges an Zugkraft. – Nichtsdestotrotz *kann* aber der platonistische Logizismus, ungeachtet all seiner Limitierungen, diskutiert werden. Man muss nur Wege finden, wie man mit der

Unvollständigkeit eines diesen Logizismus ermöglichenden Systems umgeht – und das ist kein grundsätzlich unlösbares Problem, weil die in dem System eventuell nicht ableitbaren Theoreme bzw. auch die eventuell vorhandenen Ableitungen von Sätzen, die keine Theoreme sind, ja stets nur ganz bestimmte „pathologische" Formeln betreffen. Aus diesem Grund wird der platonistische Logizismus bis heute von manchen Philosophen diskutiert.

Starker Logizismus: Gödels Unvollständigkeitstheorem Für die hier als „starker Logizismus" bezeichnete Gruppe von programmatischen Forderungen beinhalten die in klassischen Arbeiten von Alfred Tarski und Kurt Gödel präsentierten Resultate sowohl eine gute wie eine schlechte Nachricht. Grob gesprochen zeigen diese Resultate, dass sich zwar die Forderung nach einer umfassenden Beschreibung eines mathematischen Systems in sich selbst erfüllen lässt, dass aber zugleich jedes System, das diese Möglichkeit des „Selbstbezugs" beinhaltet, insofern *unvollständig* ist, als es wahre Sätze gibt, die sich in dem System nicht ableiten lassen.

Die von Tarski und Gödel zum Beweis dieser Resultate angewandte Technik besteht darin, dass man jedes Zeichen und jede Formel der Sprache mit einer eindeutigen natürlichen Zahl belegt (diese Resultate gelten also nur in solchen Systemen, die auch die Darstellung der Arithmetik der natürlichen Zahlen ermöglichen!). Dann kann man alle metalogischen Bestimmungen des Systems einfach anhand von arithmetischen Operationen über den natürlichen Zahlen treffen, die die jeweiligen Bestandteile des Systems identifizieren – man definiert also solche Merkmale wie „ist wahr" oder „folgt aus" im Rahmen der elementaren Arithmetik der natürlichen Zahlen. Eine relativ einfache Überlegung, die nur diesen „Gödelisierungs-Mechanismus" im Rahmen der elementaren Arithmetik benützt, zeigt dann die unausweichlich *Unvollständigkeit* jedes solchen Systems: es gibt in ihm stets eine wahre Formel, die sich nicht in dem System ableiten lässt.

Das Revolutionäre an diesem Resultat besteht darin, dass es ein bestimmtes logizistisches Programm, das beispielsweise Bertrand Russell mit seinen Principia Mathematica umzusetzen versuchte, wenn nicht als gescheitert so doch als definitiv *lückenhaft* ausweist. – Wenn wir annehmen, dass die Lückenlosigkeit ein unerlässlicher Bestandteil eines solchen Programms ist – es ging ja um nichts anderes als um die Angabe eines formalen Systems, das die Ableitung von *genau allen wahren mathematischen Sätzen* ermöglicht, dann ist dieses Programm sogar auf der ganzen Linie als gescheitert zu betrachten.

Schwacher Logizismus: die Stärken der Prädikatenlogik erster Stufe Auch wenn also der starke und der platonistische Logizismus aufgrund klassischer Resultate der mathematischen Logik in Bedrängnis geraten: eine bestimmte schwache Form des Logizismus bleibt von diesen Problemen unberührt. Gegeben eine der gängigen Axiomatisierungen der Mengentheorie erweist sich die Prädikatenlogik erster Stufe als perfektes Werkzeug zur Formulierung beliebiger mathematischer Aussagen. Und wegen der Vollständigkeit dieser Logik muss sich jede beweisbare Aussage, die so formuliert werden kann, auch tatsächlich in der Prädikatenlogik erster Stufe ableiten lassen. Natürlich werden dadurch sowohl alle stärkeren logizistischen Forderungen schlicht *umgangen*, wie auch alle Fragestellungen der Metalogik und Metamathematik, die sich innerhalb des so implementierten Rahmenwerkes stellen, keineswegs automatisch gelöst sind (die gesamte rezente mathematische Logik besteht im wesentlichen aus nichts anderem als einem Eingehen auf diese Fragestellungen); aber dass die Prädikatenlogik erster Stufe in dieser Weise ein geradezu perfektes Werkzeug für alle praktischen Belange der Mathematik abgibt, lässt sich kaum bestreiten. – Beschränkt man sich auf den „schwachen Logizismus“, dann ist der Logizismus alles andere als gescheitert, vielmehr *beweist* die moderne mathematische Logik geradezu seine Gültigkeit!

2.7 Literaturhinweise

Elementare Logik-Literatur für MathematikerInnen Der für die Zwecke philosophischer Diskussionen relevante Kernbereich der mathematischen Logik wird von einem klassischen Lehrbuch wie Ebbinghaus et al. (1996) abgedeckt, inklusive aller Theorembeweise. Bei Shoenfield (1967) findet man die Variante einer Definition der Semantik mittels Spracherweiterungen, die auch in diesem Buch Verwendung findet. Wer an weiterführenden Aspekten der mathematischen Logik interessiert ist, sollte das Handbuch Barwise (1977) als Ausgangspunkt nehmen.

Für einen Vergleich der unterschiedlichen logischen Kalküle siehe Sundholm (2001) und (Stegmüller & Varga von Kibéd, 1984, Kapitel 4). Zu Gödels Beweis siehe die Einführung für Philosophen Franzén (2005). Die klassischen Texte von Kurt Gödel sind in der Gesamtausgabe Gödel (1986) zu finden, die wichtigsten Arbeiten von Alfred Tarski in Tarski (1983). Zur Philosophie der Mathematik siehe Shapiro (2005), Abschnitt 6 dieses Handbuchs enthält eine Verteidigung des oben angesprochenen „platonistischen Logizismus“.

Elementare Logik-Literatur für PhilosophInnen Eine Einführung, die ein ähnliches Themengebiet abdeckt, wie die oben genannten mathematischen Einführungen, aber für Philosophen maßgeschneidert ist, also weniger formale Beweise, dafür wesentlich mehr philosophische Erläuterungen und Beispiele enthält, ist Forbes (1994). Formal anspruchsvoller sind Smullyan (1995) und Boolos et al. (2002). Weniger ein Lehrbuch, aber dennoch eine hervorragende Einführung für Philosophen ist Hodges (2001). Deutschsprachige Logik-Lehrbücher für Philosophinnen sind Bucher (1998 [1987]); Beckermann (2003 [1997]); Hoyningen-Huene (1998); Kutschera & Breitkopf (2007 [1971]); Zoglauer (2005).

Philosophische Logik Für eine erste Annäherung an viele Themen der analytischen Philosophie im Allgemeinen und der philosophischen Logik im Besonderen ist die Stanford Internet-Enzyklopädie `plato.stanford.edu` hervorragend geeignet. Das aktuellste und umfassendste Lehrbuch der philosophischen Logik ist Priest (2008 [2001]), das jedoch die Logik höherer Stufe überhaupt nicht behandelt. In dieser Hinsicht vollständiger sind handbuch-artige Darstellungen wie Goble (2001) und Jacquette (2002). Ältere sehr gute Darstellungen in deutscher Sprache sind das auf die epistemische Logik konzentrierte Buch Lenzen (1980) sowie die (allerdings ziemlich „technischen") Bücher Kreiser et al. (1987) und Kutschera (1976).

Wichtigste Ressource für Streifzüge im Dschungel der unterschiedlichen Systeme der philosophischen Logik ist nach wie vor das auf 18 Bände (von denen bisher 13 erschienen sind) angelegte Handbuch Gabbay & Guenthner (2001ff).

Die wichtigsten *Zeitschriften* zum Thema philosophische Logik sind der *Review of Symbolic Logic*, das *Journal of Philosophical Logic*, *Studia Logica*, *Logique et Analyse*, *History and Philosophy of Logic*. Daneben gibt es die eher auf rein mathematische Beiträge spezialisierten Journals wie *Journal of Symbolic Logic*, *Bulletin of Symbolic Logic*, *Philosophia Mathematica*.

Auf Literatur zu speziellen Systemen der nicht-klassischen Logik wird in den späteren Abschnitten dieses Buches verwiesen.

Philosophie der Logik Es gibt kaum eine aktuelle, umfassende Einführung in die Philosophie der Logik. Haack (1978) ist ein ausgezeichnetes Buch, das aber nicht am letzten Stand der Entwicklungen ist. Viele Aspekte finden sich in der oben zitierten Literatur zur philosophischen Logik, aber für tiefer gehende Diskussionen muss man die einschlägigen philosophischen Originalarbeiten heranziehen. Klassiker der Philosophie der Logik sind Frege (1892b,a); Russell (1905) und Wittgenstein (2001 [1922]), vor allem aber die Arbeiten von Rudolf Carnap, insbesondere Carnap (1932, 1968 [1934], 1956 [1947]) sowie die in vieler Hinsicht als Kritik an Carnap formulierten Arbeiten von W. V. O. Quine, insbesondere Quine (1980 [1948],[1951], 1963, 1986 [1970]). Weitere wichtige Philosophen der Logik sind Richard Montague (1972), Saul Kripke (1980), David Lewis (1986). Siehe auch die Anthologie Jacquette (2001).

Geschichte der Logik Leider beschränken sich historische Darstellungen der Logik bis heute vielfach auf die Rekonstruktion der Entwicklung von Formalismen, ohne auf die Bezüge zur Philosophiegeschichte und zur übrigen

Wissenschafts- und Sozialgeschichte einzugehen. Klassische Gesamtdarstellungen, in diesem Sinn, sind Bochenski (2002 [1956]) und Kneale & Kneale (1962). Soeben erscheint ein umfassendes Handbuch der Geschichte der Logik Gabbay & Woods (2004ff) mit Beiträgen von sehr unterschiedlicher Qualität. Besonders verwiesen sei hier noch auf die Arbeit Peckhaus (1997) zur Logik im neunzehnten Jahrhundert sowie auf die Studien zur Leibnizschen Logik Lenzen (2004).

3 Spielarten der Prädikatenlogik

Im Zentrum dieses Kapitels steht die Logik höherer Stufe, aber wir betrachten auch andere Formen der Erweiterung, die im Kontext einer beliebigen Prädikatenlogik (also auch auf der ersten Stufe) möglich sind. Diese Erweiterungen sind: λ-Abstraktionen, ι-Terme und die sogenannte Existenzannahmenfreiheit (alles Abschnitt 3.2). Außerdem betrachten wir den Aufbau flexibler (nicht-hierarchischer) Typenstrukturen, im Rahmen einer starren Logik, bei der nicht zwischen nicht-logischen Konstanten und von diesen bezeichneten externen Objekten unterschieden wird (Abschnitt 3.4). Metalogische Gesichtspunkte der Logik höherer Stufe werden in Abschnitt 3.3 behandelt.

3.1 Eine einfache Typenlogik

Dass die Objekte der uns umgebenden Welt in irgendeiner Form eine formale Hierarchie aufweisen scheint auf der Hand zu liegen. So können wir die Bezeichnungen für materielle Gegenstände und deren Merkmale in ziemlich eindeutiger Weise in eine Stufenhierarchie einordnen:

1. Stufe: Tisch, Baum
2. Stufe: rot, eckig
3. Stufe: Farbe, Form
usw.

Eine Logik höherer Stufe ist linguistisch-ontologisch also alleine aus dem Grund unerlässlich, dass wir es in den von unseren Sprachsystemen adressierten Objektbereichen mit derart hierarchisch konstruierten Zusammenhängen zu tun haben, wo primitive Objekte vorkommen (1. Stufe) und Mengen solcher Objekte (2. Stufe), Mengen von Mengen solcher Objekte (3. Stufe) usw.

Derartige Hierarchien können noch dadurch verfeinert werden, dass man mehrstellige Prädikate betrachtet, bei denen sich dann wiederum die einzelnen Argumentstellen auf Objekte einer ganz unterschiedlichen Stellung in der Objekthierarchie beziehen können. Eine Logik, die auf der ganzen Bandbreite einer solchen Hierarchie aufbaut nennt man *Typenlogik*.

Das Vokabular Grundlage des typenlogischen Vokabulars ist die oben angesprochene *Typenhierarchie*. Wir definieren diese Hierarchie rekursiv:

(1) 0 ist ein Typ

(2) Jede endliche (und möglicher Weise leere) Folge von Typen ist erneut ein Typ.

0 ist der Typ von Individuen der ersten Stufe (also das worüber man in der Logik erster Stufe quantifiziert). Die leere Folge von Typen $\langle\rangle$ repräsentiert „nullstellige Prädikate“, die wir als Aussagenkonstanten auffassen. Dagegen liefert $\langle 0\rangle$ den Typ von einstelligen Prädikaten über den Individuen der ersten Stufe. Mit $\langle 0, 0\rangle$ ist der Typ von zweistelligen Prädikaten über Individuen der ersten Stufe charakterisiert, mit $\langle\langle 0\rangle\rangle$ der Typ von einstelligen Prädikaten über Individuen des Typs $\langle 0\rangle$ (also über Individuen der zweiten Stufe) usw. Umgelegt auf die obigen Beispiele:

1. Stufe: Tisch, Baum – Typ 0
2. Stufe: rot, eckig – Typ $\langle 0\rangle$
3. Stufe: Farbe, Form – Typ $\langle\langle 0\rangle\rangle$
usw.

Man beachte aber auch, dass diese Typenkonstruktion auch Typen umfasst, die Objekte unterschiedlichen Typs als Argumente enthalten. Der Typ $t = \langle\langle 0\rangle, 0\rangle$ etwa beschreibt Beziehungen zwischen Objekten der zweiten Stufe und Objekten der ersten Stufe. Ein Beispiel, wie man solche Beziehungen nützen könnte, wäre eine alternative Beschreibung von Farben. Eine Relation R des Typs t könnte Farbzuordnung charakterisieren. Ist (rot, Tisch) in R enthalten, so bedeutet dies, dass der Tisch die Farbe Rot aufweist.

Für jeden der so definierten Typen werden wir eine abzählbare Menge von *Konstanten* einführen, für jeden nichtleeren Typ (also für jeden Typ außer dem Aussagentyp) außerdem eine abzählbare Menge von *Variablen*. Meist lassen wir bei Konstanten und Variablen der Übersichtlichkeit halber die Angabe des Typs weg. Falls eine solche Angabe doch nötig ist, fügen wir den Typ als Index bei. x_t, c_t stehen dann für Variablen und Konstanten des Typs t. Dass wir die unterschiedlichen Typen nicht „vermischen“ können stellt aber ohnedies die Syntax sicher:

Syntax Jede Variable und jede Konstante des Typs t ist ein *Term* des Typs t. Für jede Folge von Termen $\tau_1, \ldots, \tau_n$ der Typen $t_1, \ldots, t_n$ und jeden Term τ des Typs $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ ist $\tau(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ eine atomare Formel. Die *Formeln* der Sprache L_{P_t} sind dann so definiert:

$$\phi ::= a \mid \forall x.\phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi,$$

wobei a für atomare Formeln steht und x für Variablen.

Ein Kalkül für die Typenlogik Ein Hilbert-Kalkül für die Typenlogik basiert erneut auf den Axiomen und Regeln der Prädikatenlogik erster Stufe (A1) bis (A5) und (R1) bis (R3), wobei wir im Fall von (A4) auf Typenkonsistenz achten müssen:

(A4) $\forall x\phi \to \phi[t/x])$ wobei t ein Term des selben Typs wie x ist.

Außerdem benötigen wir hier eine Klasse von sogenannten *Komprehensionsaxiomen*. Für jede Formel ϕ mit den freien Variablen $x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}$ und eine Variable x des Typs $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ ist

(A8) $\exists x \forall x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}(x(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \leftrightarrow \phi(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}))$

ein Axiom. Dieses Axiom stellt sicher, dass es zu jeder *Formel* ϕ mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ein Prädikat x passenden Typs gibt, das das durch ϕ ausgedrückte *Merkmal* charakterisiert.

Strukturen Eine *Struktur* $\mathfrak{A}$ legt eine Menge $\mathfrak{A}(0)$ von Individuen des Typs 0 fest. Für jeden anderen nichtleeren Typ $t = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ bestimmt die Struktur eine Menge von Relationen:

$$\mathfrak{A}(t) \subseteq \wp(\mathfrak{A}(t_1) \times \ldots \times \mathfrak{A}(t_n)).$$

Im Fall der Gleichheit heißt die Struktur *Standard-Struktur*, allgemeine Strukturen (mit und ohne Gleichheit) nennt man auch *Henkin-Strukturen*. (Die Bedeutung des Unterschieds zwischen Henkin-Strukturen und Standard-Strukturen wird im Abschnitt 3.3 erklärt.)

Für den leeren Typ ist $\mathfrak{A}(\langle\rangle) = \{W,F\}$ definiert als Menge von Wahrheitswerten. Außerdem muss die Struktur jeder Konstante c eines beliebigen Typs t einen Wert $\mathfrak{A}(c) \in \mathfrak{A}(t)$ zuordnen.

Semantik Wie bei der Prädikatenlogik erster Stufe praktiziert, führen wir für jede Struktur $\mathfrak{A}$ eine Erweiterung $L_{P_t}(\mathfrak{A})$ der Sprache L_{P_t} ein, die die Konstantenmenge jedes Typs t um die Menge $\mathfrak{A}(t)$ erweitert. Wir setzen dann, für jedes $i \in \mathfrak{A}(t)$ erneut $\mathfrak{A}(i) := i$.

Auf dieser Grundlage definieren wir, für jede Struktur $\mathfrak{A}$, für jede Aussagenkonstante a, jede konstantenbelegte atomare Formel $c(c_1, \ldots, c_n)$ sowie für jede Formel $\forall x.\phi$, $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$:

$\mathfrak{A} \models a$	gdw	$\mathfrak{A}(a) = W$,
$\mathfrak{A} \models c(c_1, \ldots, c_n)$	gdw	$(\mathfrak{A}(c_1), \ldots, \mathfrak{A}(c_n)) \in \mathfrak{A}(c)$,
$\mathfrak{A} \models \forall x.\phi$	gdw	für alle Konstanten c in $L_{P_t}(\mathfrak{A})$ die den selben Typ wie x besitzen

$$
\begin{array}{lll}
 & & \text{gilt } \mathfrak{A} \models \phi\left[\frac{c}{x}\right], \\
\mathfrak{A} \models \neg\phi & \text{gdw} & \text{nicht } \mathfrak{A} \models \phi, \\
\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi & \text{gdw} & \mathfrak{A} \models \phi \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi.
\end{array}
$$

Die aus dieser Spezifikation der Syntax und Semantik resultierenden metalogischen Eigenschaften sind ganz analog zur Prädikatenlogik zweiter Stufe (siehe Abschnitt 3.3).

Strukturell unterscheidet sich die so definierte Logik von der Prädikatenlogik erster Stufe nur darin, dass (1) Prädikate unterschiedlichen Typs (im Rahmen der Typenhierarchie) möglich sind sowie (2) wir nicht nur über Objekte der ersten Stufe sondern über Objekte beliebigen Typs quantifizieren können.

3.2 Intensionale Typenlogik

Wir beschreiben nun eine Typenlogik, die einige zusätzliche Ausdrucksmittel besitzt, nämlich intensionale Typen, λ-Abstraktionen und ι-Terme. Diese Ausdrucksmittel sind nichts für die Typenlogik Spezifisches. Sie können grundsätzlich in jeder quantifizierten Logik eingeführt werden, wir illustrieren sie aber nur für den typenlogischen Fall. Weiter unten wird sich zeigen, dass gerade die hier eingeführten zusätzlichen Ausdrucksmittel interessant werden, wenn man zusätzlich modale Konstruktionen einführt (also über „möglichen Welten" quantifizieren kann).

λ-Abstraktionen als verallgemeinerte Prädikate *λ-Abstraktionen* sind Formeln der Form $[\lambda x_1, \ldots, x_n.\phi](c_1, \ldots, c_n)$. Diese Formeln dienen der Beschreibung des Merkmales, das durch eine Formel ϕ mit den freien Variable $x_1, \ldots, x_n$ charakterisiert ist. Sie stellen also *eine Verallgemeinerung des Begriffs eines Prädikates dar*: $\lambda x_1, \ldots, x_n.\phi$ beschreibt das durch die Formel ϕ mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ symbolisierte n-stellige Prädikat. Der Wahrheitswert der Formel $[\lambda x_1, \ldots, x_n.\phi](c_1, \ldots, c_n)$ ist somit nichts weiter als der Wahrheitswert der Formel $\phi\left[\frac{c_1,\ldots,c_n}{x_1,\ldots,x_n}\right]$ in der die x_i durch c_i ersetzt werden.

ι-Terme als verallgemeinerte Funktionen Sind λ-Abstraktionen eine Verallgemeinerung des Prädikatenbegriffs, so liefern ι-Terme eine Verallgemeinerung des Funktions- bzw. des Termbegriffs. $\iota x.\phi$ bezeichnet das definite Individuum, das die Eigenschaft ϕ besitzt; wenn kein solches Individuum existiert so weisen wir dem Term einen „Dummy-Wert" `NULL` zu. Ist P ein zweistelliges Prädikat, so kann die dadurch definierte Funktion beschrieben werden als:

$$\iota y.P(x, y).$$

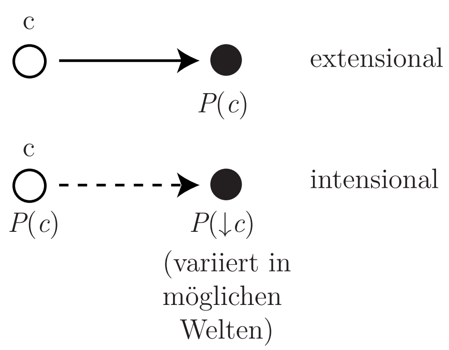
Übergeben wir diesem Term ein Argument x dann liefert er den Funktionswert y zurück, unter der Voraussetzung, dass P für diesen Wert überhaupt als Funktion definiert ist, es also *genau ein* y mit $P(x,y)$ gibt. Falls ein solches Prädikat für einige Werte nicht als Funktion definiert ist, so ist das Resultat eine *partielle Funktion*, also eine Funktion, die für einige Argumente den Wert `NULL` zurück liefert.

Die klassische Interpretation von ι-Termen sind *definite Deskriptionen*, also Beschreibungen, die genau ein Individuum „herauspicken“ und somit die Grundlagen von *Eigennamen* bilden. Den λ-Operator kann man hingegen so interpretieren, dass er ganze Klassen von Individuen charakterisiert, also *Klassenbegriffe*.

Intensionale und extensionale Typen In der klassisch-extensionalen Logik sind nicht-logische Konstanten bloße Markierungen von Objekten des jeweiligen Typs. Eine Individuenkonstante bezeichnet ein bestimmtes Objekt, eine einstellige Prädikatenkonstante erster Stufe eine Menge von Objekten, eine einstellige Prädikatenkonstante zweiter Stufe eine Menge von Mengen von Objekten usw., wobei dieses Objekt bzw. diese Menge in einer semantischen Interpretation zugewiesen werden.

Konstanten haben jedoch, in der extensionalen Logik, für sich genommen, *keinerlei Bedeutung*. Wenn wir eine Aussage *über eine Konstante c* treffen, dann wird diese Aussage in der extensionalen Logik in Wahrheit *als Aussage über das von c bezeichnete Objekt* aufgefasst, und als nichts sonst. *Intensionale Logik* ändert diese Vorgangsweise, einem Vorschlag folgend, den man bis auf Gottlob Frege, Alonzo Church und Richard Montague zurück verfolgen kann.

Die Idee ist, dass hier jeder Name, also jede nicht-logische Konstante der Sprache, *für sich genommen eine Bedeutung besitzt*, die mit dem Namen assoziiert ist und deren Eigenschaften nicht unbedingt und in jedem Fall mit den Eigenschaften des von dem Namen bezeichneten Objekts korrespondieren müssen.



Sei e der Name für „Einhorn“. Dann kann man diesem Namen in einer intensionalen Logik bestimmte Eigenschaften zuweisen, etwa H für „Hat ein Horn“

und die Aussage

$H(e)$

kann gelten, obwohl die Aussage

$H(\downarrow e)$,

die die Eigenschaft H dem von e bezeichneten Ding zuschreibt, falsch ist (weil es kein solches Ding gibt).

Ist t ein Typ der klassischen Typenlogik, dann quantifizieren wir in der intensionalen Logik auf zwei Weisen über t:

(1) *klassisch*, indem wir über die in einer semantischen Interpretation diesem Typ zugeordneten Objekte quantifizieren – Objekte, die in allen möglichen Welten die selben sind.

(2) *intensional*, indem wir über die mit diesem Typ verbundenen nicht-logischen Konstanten quantifizieren, Objekte also, die in allen möglichen Welten eine jeweils unterschiedliche Extension besitzen können (und *deshalb* intensional sind!).

Dieser Variation Rechnung tragend müssen wir dann aber klarer Weise *für jeden* klassischen Typ einen zusätzlichen *intensionalen Typ* definieren und erhalten so eine komplexere *intensionale Typenhierarchie*:

(1) 0 ist ein extensionaler Typ.

(2) Für jede endliche Folge $t_1, \ldots, t_n$ von extensionalen oder intensionalen Typen ist $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ ein extensionaler Typ.

(3) Ist t ein extensionaler Typ, so ist $\mathfrak{I}t$ ein intensionaler Typ.

Mit allen intensionalen Typen quantifizieren wir dann über die jeweiligen Mengen von nicht-logischen Konstanten und alle nicht-logischen Konstanten des klassischen Typs t werden hier entsprechend zu Konstanten des intensionalen Typs $\mathfrak{I}t$. Extensionale Typen hingegen enthalten keine Konstanten (siehe auch Abschnitt 3.2.2).[1]

[1] Im Unterschied dazu wird in Fitting (2002), von wo die Konstruktion intensionaler Typen hier im wesentlichen übernommen wird, ein zweisortiger Ansatz verfolgt. Seine typenlogische Sprache enthält dann überhaupt keine Konstanten und extensionale wie auch intensionale Objekte werden jeweils als eigenständige Objektdomänen eingeführt über die man mit entsprechenden Variablen quantifizieren kann. Diese Vorgangsweise führt zu einer ausdrucksstärkeren Logik, hat aber den Nachteil, dass es kaum intuitiv ist, dass man selbst intensionale Objekte (also Namen!) nur mittels Quantoren und Variablen, aber niemals direkt adressieren kann.

3.2.1 Syntax und Semantik von $L_{P_t\mathfrak{I}}$

Das Vokabular $L_{P_t\mathfrak{I}}$ enthält zu jedem intensionalen Typ eine abzählbare Menge von Konstanten $c, c', \ldots$ und eine abzählbare Menge von intensionalen Variablen $i, i', \ldots$, für jeden extensionalen Typ existiert außerdem eine abzählbare Menge von Variablen $x, x', \ldots$ (aber keine Konstanten!). Zusätzlich existiert zu jedem Typ t eine spezifische Konstante `NULL`, als Instanz der leeren Menge, die einen Dummy-Namen repräsentiert, der nichts bezeichnet bzw. auch ein leeres Objekt („Nichts"). Jede Konstante `NULL` wird dann semantisch so interpretiert, dass sie wiederum auf `NULL` referiert, also kein Objekt aus der jeweiligen Domänenmenge bezeichnet. Sie kann formal auch als leere Relation aufgefasst werden (da sie als Instanz der leeren Menge definiert ist). `NULL` referiert also auf nichts bzw. repräsentiert eine Eigenschaft, die kein Objekt der Domänenmenge einer Struktur aufweist.

Als neue Bestandteile des logischen Vokabulars führen wir die Operator-Symbole λ, ι und $\downarrow$ ein.

Terme Die Terme von $L_{P_t\mathfrak{I}}$ sind wie folgt definiert:

(1) Alle Konstanten und alle Variablen eines Typs t sind Terme.

(2) Ist x eine Variable des Typs t und ϕ eine Formel, die x als einzige freie Variable enthält, dann ist $\iota x.\phi$ als Term des Typs t definiert.

(3) Zu jedem Term τ des Typs $\mathfrak{I}t$ ist $\downarrow\tau$ als Term des Typs t definiert.

ι-Operatoren picken ein Objekt heraus, das die Eigenschaft ϕ aufweist. ϕ muss dabei in dem unten spezifizierten Sinn als Formel definiert sein.

Atomare Formeln Ist τ ein Term *entweder* des Typs $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ *oder* des Typs $\mathfrak{I}\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ und sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Terme der Typen $t_1, \ldots, t_n$, dann ist $\tau(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ eine atomare Formel.

Formeln Die Menge der $L_{P_t\mathfrak{I}}$-Formeln ist so bestimmt:

$$\phi ::= a \mid \tau = \tau \mid [\lambda x.\phi_x](\tau_x) \mid \forall x.\phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi.$$

Hier steht a für atomare Formeln, τ für Terme, x für (extensionale oder intensionale) Variablen, τ_x für Terme des selben Typs wie x und ϕ_x für Formeln, die x als freie Variable enthalten. Bei λ-Abstraktionen schreiben wir für verschachtelte Formeln im Stil von $[\lambda x.[\lambda y\phi](d)](c)$ auch $[\lambda x, y].\phi(c, d)$ usw. und erhalten so die eingangs beschriebenen mehrstelligen Varianten.

$L_{P_t\mathfrak{I}}$ ist eine Art *existenzannahmenfreie Logik* (*free logic*), weil sowohl im Fall von Konstanten als auch im Fall von definiten Deskriptionen $\iota x.\phi$ die Situation möglich ist, dass ein Name nichts bezeichnet. Da das Nicht-Referieren eines

Namens hier formal so implementiert wird, dass der Name auf die „Dummy-Konstante“ NULL „referiert“, kann ein Existenzprädikat E, für beliebige Terme, so definiert werden:

$$\mathsf{E}(t) := \neg(t = \mathtt{NULL}).$$

Manchmal wird, neben dem zu $\forall$ dualen Quantor $\exists$ auch der zusätzliche Quantor $\exists!$ verwendet, für „es gibt genau ein“. Dieser wird so definiert:

$$\exists! x\phi := \exists y[\lambda x.\phi](y) \wedge (\forall z[\lambda x.\phi](z) \leftrightarrow z = y).$$

Wir geben keinen Kalkül für $L_{P_t\mathfrak{I}}$ an sondern beschränken uns auf die Beschreibung der Semantik. Nur so viel: um den korrekten syntaktischen Umgang mit NULL zu gewährleisten wird man Axiome wie das folgende einführen müssen:

$$\neg\tau_1(\tau_2, \ldots, \tau_n) \text{ falls } \tau_i = \mathtt{NULL} \text{ für irgendein } i.$$

In Abschnitt 3.4 diskutieren wir außerdem eine Logik, die sogar noch stärkere philosophische Ausdrucksmöglichkeiten wie $L_{P_t\mathfrak{I}}$ besitzt, aber in der jede Formel auch ohne Kalkül entscheidbar ist (hinsichtlich Wahrheit, Gültigkeit und logischer Folgerung), einfach weil wir die Logik auf eine endliche Grundgesamtheit von Objekten restringieren.

Strukturen Eine *Struktur* $\mathfrak{A}$ ist nun so definiert, dass sie zunächst eine Menge $\mathfrak{A}(0)$ von Objekten des Typs 0 festsetzt und für jeden anderen nichtleeren extensionalen Typ $t = \langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ eine Menge

$$\mathfrak{A}(t) \subseteq \wp(\mathfrak{A}(t_1) \times \ldots \times \mathfrak{A}(t_n)).$$

Weiters gilt $\mathfrak{A}(\emptyset) := \{\mathrm{W}\}$ und für jeden intensionalen Typ t ist $\mathfrak{A}(t)$ bestimmt als die Menge der Konstanten des Typs t.

Außerdem ordnet die Struktur jeder Konstante c eines intensionalen Typs $\mathfrak{I}t$ den Wert $\mathfrak{A}(c) := c$ zu sowie einen Wert

$$\mathfrak{A}(\downarrow c) \in \mathfrak{A}(t) \cup \{\mathtt{NULL}_t\}.$$

Das bedeutet, dass jede Konstante c in $\mathfrak{A}$ sich selbst bezeichnet, ihre Extension aber stammt aus dem Wertevorrat des ihr korrespondierenden extensionalen Typs. Diese Extension wiederum kann auch den Wert $\mathtt{NULL}_t$ annehmen.

Für den leeren Typ ist $\mathfrak{A}(\langle\rangle) = \{\mathrm{W}\}$ hier als einelementige (!) Menge definiert, die den Wahrheitswert W enthält. Die Struktur ordnet dann jeder Konstante c eines beliebigen Typs t einen Wert $\mathfrak{A}(c) \in \mathfrak{A}(t) \cup \{\mathtt{NULL}_t\}$ zu. Im Fall von Aussagenkonstanten repräsentiert dieses $\mathtt{NULL}_t$ den Wahrheitswert „falsch“, in allen anderen Fällen repräsentiert es ein Dummy-Objekt das indiziert dass ein Name keine Extension besitzt.

Anmerkung: Wir interpretieren ι-Terme *nicht* als intensionale Objekte, d. h. diese Terme für sich genommen haben keine positiven Eigenschaften, wohl aber ihre Extensionen.

Die Sprache $L_{P_t\mathfrak{I}}(\mathfrak{A})$ Für jede Struktur $\mathfrak{A}$ definieren wir nun die Interpretation $L_{P_t\mathfrak{I}}(\mathfrak{A})$ als jene Erweiterung der Sprache $L_{P_t\mathfrak{I}}$, die die Konstantenmenge jedes extensionalen Typs t als die Menge $\mathfrak{A}(t) \cup \{\mathtt{NULL}_t\}$ ansetzt.

Terminterpretation Für gewöhnliche Konstanten c eines Typs t haben wir den Wert $\mathfrak{A}(c)$, den eine Struktur als Extension von c festsetzt, oben bereits definiert. Für Dummy-Konstanten $\mathtt{NULL}_t$ definieren wir

$$\mathfrak{A}(\mathtt{NULL}_t) := \mathtt{NULL}_t.$$

Hier kommt das selbe Symbol sowohl in der Metasprache als auch in der Objektsprache vor, aber das muss uns kein Kopfzerbrechen bereiten, da die Funktion dieser Symbole auf den beiden Sprachebenen klar unterschieden ist.

Nun fehlt nur noch die Spezifikation eines Wertes für ι-Terme. Für jede Formel ϕ, die als einzige freie Variable x enthält und jede Struktur $\mathfrak{A}$ definieren wir:

$$\mathfrak{A}(\iota x.\phi) := \begin{cases} \text{das definite } x \text{ mit } \mathfrak{A} \vDash \phi, \\ \mathtt{NULL} \text{ falls kein solches } x \text{ existiert.} \end{cases}$$

Diese im Grunde einfache Definition ist dadurch tendenziell verwirrend, dass sie auf die Definition der Extensionen von Formeln zurückgreift, die ihrerseits wieder auf der Definition der Extensionen von Termen aufbaut. Dass hier dennoch keine Zirkularität entsteht, liegt daran, dass man es stets nur mit Formeln zu tun hat, die aus endlich vielen Sprachelementen entstehen. Wir können also schrittweise die Term-Spezifikation in der Formel-Spezifikation auflösen, aus dieser wieder auf die Termspezifikation zurückgreifen usw., je nach dem Grad der Durchsetzung von Formeln mit ι-Termen.

Erfülltheit Auf dieser Grundlage definieren wir, für jede Struktur $\mathfrak{A}$, für jede Aussagenkonstante a, jede atomare Formel $\tau(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, jede Formel $\tau = \tau'$, $\mathsf{E}(\tau)$, $[\lambda x.\phi](\tau)$ wo die τ_i bzw. τ und τ' konstante $L_{P_t\mathfrak{I}}$-Terme sind und P eine $L_{P_t\mathfrak{I}}$-Konstante sowie für jede Formel $\forall x.\phi$, $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \vDash a & \text{gdw} & \mathfrak{A}(a) = \mathrm{W}, \\
\mathfrak{A} \vDash \tau(\tau_1, \ldots, \tau_n) & \text{gdw} & (\mathfrak{A}(\tau_1), \ldots, \mathfrak{A}(\tau_n)) \in \mathfrak{A}(\tau), \\
\mathfrak{A} \vDash \tau = \tau' & \text{gdw} & \mathfrak{A}(\tau) = \mathfrak{A}(\tau'), \\
\mathfrak{A} \vDash [\lambda x.\phi](\tau) & \text{gdw} & \mathfrak{A}(\tau) \neq \mathtt{NULL} \text{ und } \mathfrak{A} \vDash \phi[\tau/x], \\
\mathfrak{A} \vDash \forall x.\phi & \text{gdw} & \text{für alle Konstanten } c \text{ in } L_{P_t\mathfrak{I}}(\mathfrak{A}), \\
 & & \text{die den selben Typ wie } x \text{ besitzen,} \\
 & & \text{gilt } \mathfrak{A} \vDash \phi[c/x], \\
\mathfrak{A} \vDash \neg\phi & \text{gdw} & \text{nicht } \mathfrak{A} \vDash \phi, \\
\mathfrak{A} \vDash \phi \wedge \psi & \text{gdw} & \mathfrak{A} \vDash \phi \text{ und } \mathfrak{A} \vDash \psi.
\end{array}$$

Bei λ-Abstraktionen setzen wir fest, dass $[\lambda x.\phi](\tau)$ jedenfalls falsch ist, falls τ den Wert `NULL` aufweist. Diese naheliegende Annahme, dass nicht-referierende Terme keine positiven Eigenschaften besitzen können, wird unten (S. 62) näher erläutert.

Für intensionale Terme, die nicht referieren, gilt $\tau = \tau$ nur dann, wenn es sich um die selbe Konstante handelt. Es gilt also „Zeus = Zeus" aber nicht „Zeus = Sherlock Holmes". Wohl aber gilt „↓Zeus = ↓Sherlock Holmes". Diese etwas seltsame Situation kann man aber dadurch bereinigen, dass man eine zweite Form von Identität definiert, die zusätzlich die Existenz sicher stellt:

$$\tau \equiv \tau' := \mathsf{E}(\tau) \wedge \tau = \tau'.$$

Bei atomaren Formeln der Form $\tau(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ist zu beachten, dass, da τ ein beliebiger konstanter Term sein kann, es sich zum einen um einen ι-Term handeln kann, die Formel könnte also etwa so aussehen:

$$[\iota x.P(x)](c_1, \ldots, c_n).$$

Hier werden dem durch $\iota x.P(x)$ definierten Prädikat die Argumente $(c_1, \ldots, c_n)$ übergeben. Dass diese Argumente zum Typ von $\iota x.P(x)$ passen wird in der Spezifikation der Syntax auf elementarer Ebene garantiert. Außerdem kann der Fall eintreten, dass der Wert des Terms τ ein Dummy-Objekt `NULL` ist, sodass die resultierende atomare Formel die Form $\mathtt{NULL}(c_1, \ldots, c_n)$ aufweist. In diesem Fall einer „nicht existierenden Relation" stellt die Spezifikation der Semantik jedoch sicher, dass eine solche Formel stets falsch ist.

3.2.2 Extension versus Intension

Seien m und a zwei Individuenkonstanten, die die Namen „Morgenstern" und „Abendstern" repräsentieren. A sei außerdem das Merkmal am Abend zu leuchten und M das Merkmal am Morgen zu leuchten. Dann erhalten wir folgende wahre Aussagen:

$$\begin{array}{ll}
\downarrow m = \downarrow a, & \text{aber} \\
\neg m = a. & \\
M(m) \wedge A(a), & \text{aber} \\
\neg M(a) \wedge \neg A(m) & \text{und} \\
M(\downarrow a) \wedge A(\downarrow m). &
\end{array}$$

Für intensionale Typen wird Identität also intensional definiert. Das bedeutet, dass wir für intensionale Terme t, t' die übliche (extensionale) Identität so ausdrücken müssen:

$$\downarrow t = \downarrow t'.$$

Es kann hier den Fall geben, wo ein Ding, das intensional die Eigenschaft P besitzt, diese extensional nicht aufweist, wo also das Extensionalitätsaxiom:

(E) $P(c) \to P(\downarrow c)$

nicht gilt. Dies wäre der Fall wenn c ein nichtexistierendes Ding ist, also ein Fabelwesen wie das Einhorn, das kein Ding bezeichnet aber doch die Eigenschaft hat ein pferdartiges Tier zu sein. Ein anderes Beispiel für Nicht-Extensionalität wäre der Fall wo ein Ding schlicht *falsch* beschrieben wird. So könnte man der Lichtgeschwindigkeit die Eigenschaft zuschreiben, dass sie unendlich ist, ohne dass dies in Wahrheit der Fall ist.

Intensionale Typen haben somit bestimmte Eigenschaften, die wir, wie sich unten zeigen wird, auch in *modalen Logiken* ausdrücken können. Man könnte sagen, sie überlappen sich mit diesen.

3.2.3 Von leeren Domänen und nicht-referierenden Namen

In der klassischen Logik wird meist gefordert, dass die Domäne der Quantifikation nichtleer ist und dass Eigennamen (Individuenkonstanten) stets eine Referenz besitzen. Die erste Forderung wird deshalb gestellt, weil die Möglichkeit einer leeren Domäne im Fall der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe bedeuten würde, dass sowohl die Formel $\exists x : \top$ als auch die Formel $\exists x : x = x$ keine Tautologie darstellen würden, was seltsam erscheint.

In unserer Spezifikation enthält die Domäne irgendeines Typs t allerdings stets auch dieses ominöse „Dummy-Objekt", was bedeutet, dass selbst im Fall einer leeren Domäne, aufgrund des Dummy-Objekts, eine zumindest einelementige Domäne „simuliert" wird. Die beiden Formeln $\exists x : \top$ und $\exists x : x = x$ sind daher gültig, auch dann, wenn die Domäne leer ist.

Die zweite Forderung der klassischen Logik, nämlich dass Eigennamen stets eine Referenz besitzen müssen, hängt zusammen mit einer Grundkonzeption von Logik, die man als das *Extensionalitätsprinzip* (bzw. als „Extensionalismus") bezeichnet. Eine Konsequenz dieser Forderung wäre beispielsweise dass die Formel

$$\exists x : x = \downarrow c$$

für jede Individuenkonstante c eine Tautologie darstellen müsste. – Rein intuitiv betrachtet scheint dieses Axiom allerdings nicht sonderlich plausibel. So würde, wenn alle Formeln dieser Art Tautologien darstellen würden und wir einen Eigennamen g hätten, der „Gott" bezeichnet, das Theorem

$$\exists x : x = \downarrow g$$

resultieren. Das Extensionalitätsprinzip schummelt also gewissermaßen einen Gottesbeweis in die klassische Logik hinein.

Da wir aber, wie oben bereits ausgeführt, auf das Prinzip der nichtleeren Domänen verzichten und die damit verknüpften Probleme anhand unserer „Dummy-Objekte“ beheben, ist für uns auch das Prinzip, dass eine Individuenkonstante immer etwas bezeichnen muss, nicht zwingend. Unsere „Dummy-Objekte“ garantieren, dass sowohl die Formeln $\exists x.\top$ und $\exists x : x = x$, als auch alle Instanzen von Formeln $\exists x : x = \downarrow c$ Theoreme darstellen und trotzdem das klassische Extensionalitätsprinzip ungültig ist, einfach weil $\downarrow x$ immer auch auf das Dummy-Objekt $\mathtt{NULL}$ referieren kann.

Weiters können wir, für beliebige extensionale Variablen x, die folgenden beiden Quantoren definieren, mit denen nur über die jeweils existierenden Dinge quantifiziert wird:

$$\forall^{\mathsf{E}} x.\phi := \forall x.\mathsf{E}(x) \to \phi.$$
$$\exists^{\mathsf{E}} x.\phi := \exists x.\mathsf{E}(x) \land \phi.$$

Gegeben diese Definitionen gelten dann weder $\exists^{\mathsf{E}} x.\top$ noch $\exists^{\mathsf{E}} x : x = x$. Man kann also sagen: die Logik $L_{P_t\Im}$ vereinigt die Ausdruckselemente der klassischen extensionalen Logik mit den Ausdruckselementen der *free logic*.

Das Nichts nichtet Eine halb scherzhafte Bemerkung zum Umgang mit nichtreferierenden Namen und deren „Referenz“. Es liegt nahe, diese Referenz, also die Konstante $\mathtt{NULL}$ (in ihrer Instanz der ersten Stufe) als Name für „Nichts“ aufzufassen. Analog könnte man die Konstruktion $\lambda x.x = \mathtt{NULL}$ als Merkmal eines x interpretieren, nichts zu sein bzw. „zu nichten“. Gegeben diese Interpretationen würde die Formel

$$[\lambda x.x = \mathtt{NULL}](\mathtt{NULL})$$

so etwas ausdrücken wie: „Das Nichts nichtet“. Diese Aussage ist, in unserer Logik, eine Kontradiktion, da $[\lambda x.\phi](\mathtt{NULL})$ hier als Kontradiktion definiert ist. Wir könnten eine ähnliche Formalisierung aber auch in folgender Weise entwickeln. Sei $\mathtt{NULL}$ erneut als formale Entsprechung von „Nichts“, das Prädikat „nichten“ hingegen sei hier explizit definiert als:

$$N(x) := x = \mathtt{NULL}.$$

Dann erhalten wir $N(\mathtt{NULL})$ als Formalisierung für „Das Nichts nichtet“. Diesmal stellt die Formel eine Tautologie dar (nämlich $\;\; = \mathtt{NULL}$), weil sie unter Umgehung des Prinzips formalisiert wurde, dass λ-Abstraktionen nicht-referierenden Termen keine positiven Eigenschaften zuweisen können. – Wie auch immer aber wir die Formalisierung drehen, sie führt in jedem Fall zu einer gehaltlosen (weil analytischen) Aussage. (Heidegger hingegen hätte offensichtlich mit der Aussage „Das Nichts nichtet“ eher etwas im Stil eines synthetischen Urteils a priori formulieren wollen.)

Anmerkung: Rudolf Carnap hat in seinem berühmten Aufsatz Carnap (1932) diese Aussage, die sich in Heideggers „Was ist Metaphysik?" findet, als Inbegriff einer sinnlosen metaphysischen Aussage präsentiert. Die Begründung war, dass die Negation (also unser Junktor $\neg$) weder ein Prädikat darstellt noch einen Namen, sodass die Aussage „Das Nichts nichtet" gewissermaßen doppelt sinnlos ist. In der von Carnap später, in „Bedeutung und Notwendigkeit", konzipierten Logik lassen sich aber Formulierungen wie die obige entwickeln, da diese Logik ein Dummy-Objekt enthält. Spricht das jetzt für oder gegen Heidegger bzw. Carnap?

3.2.4 Definite Deskriptionen

Das Problem der definiten Deskriptionen ist eines der klassischen Probleme der analytischen Philosophie. Es geht um die Frage wie man mit Eigennamen umgeht, die unter Umständen nichts bezeichnen könnten. Diese Frage ist ein ernstes Problem, wenn man bedenkt, dass die Idee des Extensionalitätsprinzips ausgesprochen grundlegend war für die Entwicklung der modernen Logik.

Der Name $k =$ „Der gegenwärtige König von Frankreich" ist ein solches Beispiel eines nicht referierenden Eigennamens. Was passiert, wenn wir diesem Namen ein Merkmal zuschreiben, etwa die Eigenschaft $G =$ „Hat eine Glatze"? – In „On Denoting" analysiert Bertrand Russell zunächst zwei Antworten auf diese Frage. Für Alexius Meinong ist es so, dass auch nicht-referierende Namen wie k sinnvolle Namen sind, sie beziehen sich auf „Dinge", die zwar kein „Sein" besitzen aber zumindest ein „Sosein". Die Aussage $G(k)$ ist daher nicht-trivial und könnte unter Umständen auch wahr sein. Für Gottlob Frege hingegen ist ein Name wie k ein logisches Unding. Da der Wahrheitswert einer Aussage $G(k)$ von dem Objekt abhängt, das k bezeichnet, kann, für Frege, im Fall eines nicht-referierenden Namens wie k eine Aussage $G(k)$ *überhaupt keinen Wahrheitswert besitzen*, sie ist also schlicht sinnlos.

Russell kritisiert beide Optionen: Meinongs Lösung ist ontologisch überzogen, da der Fall einer wahren Aussage $G(k)$ ziemlich absurd erscheint. Aber auch Freges Variante scheint wenig plausibel, einfach deshalb weil die Aussage $G(k)$ *nur aufgrund der Tatsache dass k nichts bezeichnet* als *falsch* identifiziert sein sollte. Eine Logik, die mit dem Problem nicht-referierender Namen korrekt umgeht, sollte also stets implizieren, dass eine Aussage wie $G(k)$ unter allen Umständen falsch ist.

Russell gewährleistet dies dadurch, dass er (zumindest im Fall von Nicht-Referenz) auf die Verwendung von Individuenkonstanten gänzlich verzichtet. Anstelle von k zieht er das Prädikat $K =$ „Ist der gegenwärtige König von Frankreich" heran und *ersetzt* $G(k)$ durch die äquivalente Aussage:

$$\exists x : K(x) \wedge (\forall y : K(y) \leftrightarrow y = x) \wedge G(x).$$

Diese Aussage ist offensichtlich notwendiger Weise falsch wenn k nicht referiert.

Die Logik, die wir hier spezifiziert haben, führt zu den selben Resultaten wie Russells Konzeption, hat jedoch den Vorteil, dass man auf die Einführung von Eigennamen als Terme nicht verzichten muss. Wir können den Namen k entweder direkt einführen oder anhand der definiten Deskription

$$\iota x.K(x).$$

Sowohl die Formel $G(\downarrow k)$ als auch die Formel $G(\iota x.K(x))$ ist notwendiger Weise falsch sobald $\mathsf{E}(\downarrow k)$ bzw. $\mathsf{E}(\iota x.K(x))$ nicht gilt.

Russell merkt aber auch an, dass in einer brauchbaren logischen Konzeption nicht nur die Aussage „Der gegenwärtige König von Frankreich hat eine Glatze" falsch sein muss sondern auch die Aussage:

(N) Der gegenwärtige König von Frankreich hat *keine* Glatze.

In Russells Theorie ist dies gewährleistet, da die Formel

$$(\mathrm{N}_r) \quad \exists x : K(x) \wedge (\forall y : K(y) \leftrightarrow y = x) \wedge \neg G(x)$$

offensichtlich der Aussage (N) entspricht und falsch ist. Dagegen ist es in einer Sprache, die mit gewöhnlichen Prädikationen arbeitet, überhaupt nicht möglich, die Aussage (N) zu formulieren! Weder $\neg G(\downarrow k)$ noch

$$\neg G(\iota x.K(x))$$

haben etwas mit (N) zu tun, da beide Aussagen wahr sind und so etwas ausdrücken wie

(N*) Es ist nicht wahr dass der gegenwärtige König von Frankreich eine Glatze hat.

Dennoch ist es möglich, dieses Problem auch in unserem Umfeld zu lösen. Wir müssen dazu nur auf die Möglichkeit zurückgreifen, Prädikation durch λ-Abstraktionen auszudrücken. Man betrachte folgende Aussagen:

$$(\mathrm{N}_d) \quad [\lambda x.\neg G(x)](\iota x.K(x))$$
$$(\mathrm{N}^*_d) \quad \neg[\lambda x.G(x)](\iota x.K(x)).$$

Damit ist das Problem gelöst: (N_d) entspricht der Aussage (N) und ist wie Russells Formel (N_r) falsch. Erreicht wird dies durch die Klausel in unserer Definition der λ-Abstraktionen, die sicherstellt, dass eine Formel $[\lambda x.\phi](\tau)$ falsch ist, falls τ nicht referiert. Hingegen entspricht (N^*_d) der Aussage (N*) und ist wie diese wahr.

3.3 *Logik zweiter Stufe

Die Logik zweiter Stufe L_{P_2} entsteht aus der Logik erster Stufe durch Hinzufügen von *Prädikatenvariablen*: für jede beliebige Stellenzahl n enthält das Vokabular dieser Sprache neben einigen Prädikatenkonstanten auch eine abzählbare Menge von Prädikaten*variablen*. Diese Variablen symbolisieren wir mit $X, Y, \ldots$

In der Logik zweiter Stufe werden also keine zusätzlichen *nicht-logischen* Sprachelemente eingeführt (keine zusätzlichen Prädikatenkonstanten u. dgl.). Die einzige Modifikation besteht darin, dass wir anhand von Prädikatenvariablen auch auf der „zweiten Stufe“ (also auf der Ebene von Relationen über Objekten der „ersten Stufe“) quantifizieren können.

Die Syntax muss auf dieser Grundlage so erweitert werden:

(1) Ist $t_1, \ldots, t_n$ eine Liste von Termen und ist X eine n-stellige Prädikatenvariable so ist $X(t_1, \ldots, t_n)$ eine atomare Formel.

(2) Ist ϕ eine Formel und X eine Prädikatenvariable so ist auch $\forall X\phi$ eine Formel.[2]

Als Beispiel für einen L_{P_2}-Kalkül betrachten wir den Hilbert-Kalkül. Zu den Regeln (R1) bis (R3) und den Axiomen (A1) bis (A5) für die Prädikatenlogik erster Stufe müssen wir die folgenden beiden Axiome hinzufügen:

(A4’) $\forall X\phi \rightarrow \phi[T/X]$ wobei T ein Term und X eine Variable zweiter Stufe ist.

(A5’) $\phi \rightarrow \psi \rightarrow (\phi \rightarrow \forall X\psi)$, falls X weder in ϕ noch in einer der vorangehenden Prämissen als freie Variable enthalten ist.

Außerdem ist noch das sogenannte *Komprehensionsschema* festzusetzen. Für jede L_{P_2}-Formel ϕ mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und jede n-stellige Relationenvariable X ist dann

(A8) $\exists X \forall x_1, \ldots, x_n(X(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n))$

ein Axiom, das festsetzt, dass es ein Prädikat X gibt, das die durch ϕ charakterisierte Eigenschaft repräsentiert.

Standardsemantik Wir diskutieren nun zwei Möglichkeiten wie man die Semantik von L_{P_2} definieren kann. In der ersten Möglichkeit, der sogenannten *Standardsemantik*, bleibt die Semantik auf der modelltheoretischen Seite ganz die selbe wie im Fall der Prädikatenlogik erster Stufe: wir haben die selben *Strukturen*, wie in $L_{P_{1f}}$ und L_{P_1}, da es keine zusätzlichen *nichtlogischen* Sprachelemente

[2] Den Quantor $\exists X\phi$ definieren wir „dual“ als $\neg\forall X \neg\phi$.

gibt, die eine Struktur interpretieren müsste (wir haben ja bloß zusätzliche Variablen, also *logische* Sprachelemente hinzugefügt).

Allerdings müssen wir auch auf der Seite der Semantik zusätzliche Regeln definieren, die die zusätzlichen Formeln in L_{P_2} interpretieren. Wir bezeichnen dazu mit $L_{P_2}(\mathfrak{A})$ diejenige Sprache, die dadurch entsteht, dass wir die Menge der Individuenkonstanten, wie in der ersten Stufe, um die Domänenmenge $\mathfrak{A}(\Delta)$ erweitern und jedem $i \in \mathfrak{A}(\Delta)$ sich selbst zuordnen: $\mathfrak{A}(i) := i$. Zusätzlich erweitern wir aber dann noch jede Menge von n-stelligen Prädikatenkonstanten um die Potenzmenge $\wp(\mathfrak{A}(\Delta)^n)$, also um die Menge aller möglichen n-stelligen Prädikate über $\mathfrak{A}(\Delta)$ und wir ordnen wiederum jedes $i \in \wp(\mathfrak{A}(\Delta)^n)$ sich selbst zu: $\mathfrak{A}(i) := i$.

Diese Maßnahme ist wichtig für ein Verständnis des spezifischen Charakters der Prädikatenlogik zweiter Stufe. Sie zeigt, dass wir in dieser Logik (so lange wir die Standardsemantik verwenden) in jedem Fall *über alle formal möglichen Prädikate einer bestimmten Stellenzahl* quantifizieren (also nicht etwa nur über die durch die Prädikatenkonstanten jeweils explizit festgesetzten). Dadurch wächst, wie die Erweiterung $L_{P_2}(\mathfrak{A})$ zeigt, das Universum der Quantifikation in gigantischem Ausmaß. Die größere Ausdrucksstärke, aber auch die metalogischen Probleme der Prädikatenlogik zweiter Stufe (Unvollständigkeit), sind die unmittelbare Folge davon.

Da wir erneut nur Formeln ohne freie Variablen betrachten benötigen wir für L_{P_2} nur eine zusätzliche semantische Regel, für Formeln $\forall X\phi$ wo X eine n-stellige Prädikatenvariable ist:

$$\mathfrak{A} \vDash \forall X\phi \quad \text{gdw} \quad \text{für alle } T \in \wp(\mathfrak{A}(\Delta)^n) \text{ gilt } \mathfrak{A} \vDash \phi[T/X].$$

Die Formel $\phi[T/X]$ entsteht hier dadurch, dass wir jede Instanz von X in der Formel ϕ durch das (in $L_{P_2}(\mathfrak{A})$ wohldefinierte!) Prädikat T ersetzen.

Die *Metalogik* von L_{P_2} mit Standardsemantik führt dann zu den oben bereits besprochenen Resultaten: zwar haben wir hier eine größere Ausdrucksstärke wie im Fall der Prädikatenlogik erster Stufe. So gilt der Satz von Löwenheim Skolem hier nicht und sind wir in der Lage beispielsweise die Peano-Axiome zu formulieren, die die natürlichen Zahlen bis auf Isomorphie charakterisieren. Auf der anderen Seite haben wir aber das Problem der *Unvollständigkeit*, das heißt es gibt keinen Kalkül für L_{P_2} mit Standardsemantik der genau alle logischen Folgerungen einer Prämissenmenge ableitet. Der oben beschriebene Hilbert-Kalkül ist zwar *korrekt* in L_{P_2} mit Standardsemantik, d. h. er ermöglicht nur die Ableitung logischer Folgerungen, aber es gibt Formeln, die gemäß der Standardsemantik logische Folgerungen sind, aber die man nicht in dem Kalkül ableiten kann (das selbe gilt für jeden korrekten L_{P_2}-Kalkül).

Henkin-Semantik In der Standardsemantik quantifiziert man mit Prädikatenvariablen immer über die Gesamtheit aller möglichen Relationen über der Domäne einer Struktur. Die Folge ist eine hohe Ausdrucksstärke sowie die Tatsache, dass der Satz von Löwenheim Skolem hier ebenso wenig gilt wie der Vollständigkeitssatz. Man kann diese Situation aber durchaus ändern und die Logik zweiter Stufe in einer Weise anpassen, dass genau die selben metalogischen Eigenschaften vorliegen wie im Fall der ersten Stufe (also Löwenheim Skolem, Vollständigkeit usw.).

Der Trick, dessen man sich dabei bedient, besteht darin, dass man mit Prädikatenvariablen nicht stets über die Gesamtheit aller möglichen Relationen quantifiziert sondern jeweils über einer fixen durch die Struktur festgelegten Menge von Relationen. Das bedeutet, dass in einer semantischen Interpretation hier zusätzlich zu der Domäne der ersten Stufe entsprechende Domänenmengen von Objekten der zweiten Stufe (Relationen) angegeben werden müssen. Die resultierende Logik ist zwar, syntaktisch gesehen, eine Logik zweiter Stufe, semantisch handelt es sich aber um eine spezielle Abart von Logik der ersten Stufe, nämlich eine sogenannte *mehrsortige* Logik der ersten Stufe (weil sie mehrere Domänenmengen enthält). Dadurch „erbt“ dann die so interpretierte Logik der zweiten Stufe, wie wir sehen werden, die metalogischen Eigenschaften von der ersten Stufe. (Von „Henkin-Semantik“ spricht man hier übrigens deshalb, weil dieser Trick mit der Mehrsortigkeit von dem Logiker Leon Henkin stammt.)

Anders als im Fall der Standardsemantik operieren wir hier also nicht mit den gewöhnlichen Strukturen der Logik erster Stufe, sondern mit erweiterten sogenannten *Henkin-Strukturen*. Eine Henkin-Struktur $\mathfrak{A}$ trifft die selben Festsetzungen wie eine Struktur der ersten Stufe; zusätzlich setzt sie zu jedem natürlichen $n > 0$ die Menge $\mathfrak{A}(n)$ als eine Teilmenge der Potenzmenge von $\mathfrak{A}(\Delta)^n$ fest. Diese Menge $\mathfrak{A}(n)$ repräsentiert also eine Teilmenge aller über $\mathfrak{A}(\Delta)$ möglichen n-stelligen Relationen. Für jede n-stellige Prädikatenkonstante P muss dann $\mathfrak{A}(P) \in \mathfrak{A}(n)$ gelten.

Nun müssen wir noch eine semantische Regel für Formeln der Art $\forall X\phi$ angeben. Dazu definieren wir $L_{P_2}(\mathfrak{A})$ als diejenige Sprache, die wie oben durch Erweiterung der Menge der Individuenkonstanten um $\mathfrak{A}(\Delta)$ entsteht. Zusätzlich erweitern wir jede Menge von n-stelligen Prädikatenkonstanten um die Menge $\mathfrak{A}(n)$, also um die Menge aller durch $\mathfrak{A}$ festgesetzten n-stelligen Prädikate und wir ordnen wiederum jedes $i \in \mathfrak{A}(n)$ sich selbst zu: $\mathfrak{A}(i) = i$. Dann definieren wir:

$$\mathfrak{A} \vDash \forall X\phi \quad \text{gdw} \quad \text{für alle } T \in \mathfrak{A}(n) \text{ gilt } \mathfrak{A} \vDash \phi[T/X].$$

Für die so definierte Logik gilt zunächst, dass der Hilbert-Kalkül für L_{P_2} *nicht korrekt* ist, d. h. es gibt logische Folgerungen im Hilbert-Kalkül, die in den Henkin-Strukturen von L_{P_2} nicht als logische Folgerungen definiert sind. Der Grund ist, dass sich sehr leicht Henkin-Strukturen finden lassen, in denen Instanzen des Komprehensionsschemas nicht erfüllt sind.

Beispielsweise sei $\mathfrak{A}$ mit der zweielementigen Domäne $\mathfrak{A}(\Delta) = \{a, b\}$ gegeben und mit einem $\mathfrak{A}(2)$ das nur die eine Relation $\{(a, a), (a, b)\}$ enthält. Dann gilt in

$\mathfrak{A}$ die folgende Instanz des Komprehensionsschemas nicht:

$$\exists X \forall x \forall y : X(x, y) \leftrightarrow x \neq x.$$

Denn: dieses Axiom erfordert die Existenz einer leeren binären Relation, die aber in $\mathfrak{A}$ nicht enthalten ist. (Grob gesprochen: wenn eine Relation, die man als Formel beschreiben kann, nicht in dieser Struktur enthalten ist, dann ist das entsprechende Komprehensionsaxiom verletzt.)

Diese unangenehme Situation kann aber umgangen werden. Man nennt eine Henkin-Struktur *treu*, wenn sie keine Instanz des Komprehensionsschemas verletzt. Beschränkt man sich auf die treuen Henkin-Strukturen, dann lässt sich zeigen, dass der Hilbert-Kalkül in diesem Fall nicht nur korrekt sondern auch vollständig ist und dass auch die übrigen metalogischen Eigenschaften wie der Satz von Löwenheim-Skolem hier gelten.

Spätestens jetzt sollte klar sein, dass Ausdrucksstärke eine zweischneidige Angelegenheit ist. Wenn wir die Logik zweiter Stufe mit Standardsemantik heranziehen, dann können wir zwar mathematische Mengen wie $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ bis auf Isomorphie charakterisieren, aber wir haben keinen vollständigen Kalkül. Beschränken wir uns umgekehrt auf die Logik zweiter Stufe mit treuen Henkin-Strukturen, dann haben wir zwar einen vollständigen Kalkül aber die Möglichkeit einer Charakterisierung von $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ fällt, wegen der Gültigkeit des Satzes von Löwenheim-Skolem, weg.

Logiken „zwischen“ der ersten und der zweiten Stufe Die Logik zweiter Stufe mit Standardsemantik ist (im metamathematischen Sinn) die ausdrucksstärkste aller Logiken. Das heißt, dass alle anderen Logiken höherer Stufe (die Logik dritter oder *n*-ter Stufe und die Typenlogik), wenn wir sie mit Standardsemantik ausstatten, exakt die selbe Ausdrucksstärke wie die Logik zweiter Stufe mit Standardsemantik aufweisen. All diese Logiken sind also für die Belange der Mathematik von untergeordneter Bedeutung.

Umgekehrt gibt es neben den beiden Varianten Logik erster Stufe und Logik zweiter Stufe mit Standardsemantik noch eine ganze Reihe von Logiken, die in metamathematischen Diskussionen heran gezogen werden, weil sie Varianten von Ausdrucksstärke repräsentieren. Beispielsweise hat eine Logik erster Stufe, in der *unendliche Konjunktionen* erlaubt sind (also Formeln der Form $\bigwedge \Gamma$ mit unendlichem Γ) augenscheinlich mehr Ausdrucksmöglichkeiten wie die Logik erster Stufe, da man in ihr jederzeit unendliche Axiomensysteme in der Gestalt von einzelnen Formeln darstellen kann (diese Logik nennt man *infinitary logic*).

Eine weitere Möglichkeit, die Ausdrucksstärke der Logik erster Stufe zu variieren besteht darin, zusätzliche Quantoren einzuführen, die solche Dinge ausdrücken wie „es gibt endlich viele x“, „es gibt überabzählbar viele x“ usw. Da die standardmäßige Logik erster Stufe solche „generalisierten Quantoren“ im Allgemeinen nicht ausdrücken kann, handelt es sich auch hier um Variantionen der Ausdrucksstärke von Logik.

3.4 *Starre Logik mit flexiblen Typenstrukturen

Starre Logik ist eine alternative Option, intensionale Logik zu implementieren. In einer starren Logik werden Objekte nur in der Gestalt von Namen eingeführt, die starr auf ein bestimmtes Ding referieren. Jeder Typ einer starren Logik wird anhand einer solchen Menge von starren Namen definiert, was den Vorteil hat, dass wir Typenstrukturen beliebig flexibel (und nicht zwingend hierarchisch) organisieren können.

Objekte und Relationen Die *starre Logik* $L_s(\mathcal{S},\mathcal{R})$ basiert auf einer Menge $\mathcal{S}$, die sich als Partition einer endlichen Menge $\mathcal{O}$ von *Objekten* identifizieren lässt (d. h. $\mathcal{S}$ besteht aus paarweise disjunkten Teilmengen von $\mathcal{O}$, deren Vereinigungsmenge $\mathcal{O}$ ergibt).[3] Die einzelnen in $\mathcal{S}$ enthaltenen Mengen repräsentieren die unterschiedlichen „Typen“ der nicht-hierarchisierten starren Logik. Wir nennen die Elemente von $\mathcal{S}$ die *Sorten* der Logik $L_s(\mathcal{S},\mathcal{R})$.

Nun sei N die Menge aller endlichen Folgen von Elementen von $\mathcal{S}$. Dann ist die Menge der L_s*-Relationen* $\mathcal{R}$ definiert als endliche Teilmenge von N. $\mathcal{R}$ legt einfach eine gewisse Menge von Folgen von Sorten fest, als *sinnvolle Folgen*. Wir werden dann zwar jede beliebige endliche Folge von Objekten als atomare Formel definieren, aber nur solche atomaren Formeln, die auch einer definierten Relation entsprechen, können in irgendeiner Struktur *wahr* sein!

Strukturen Dieser Idee folgend definieren wir die Menge $\mathcal{R}_\times$ aller sinnvollen Folgen von Objekten als

$$\mathcal{R}_\times := \bigcup_{(s_j)_{j=1}^i \in \mathcal{R}} s_1 \times \ldots \times s_i.$$

Das sind alle Tupel, die wir anhand von in $\mathcal{R}$ definierten Sorten-Folgen bilden können. Eine L_s*-Struktur* ist dann einfach definiert als Teilmenge von $\mathcal{R}_\times$. Die Komplexität von $L_s(\mathcal{S},\mathcal{R})$ lässt sich sehr leicht abschätzen, da die Kardinalität

[3] Natürlich kann man L_s, rein formal betrachtet, auch mit einer unendlichen Objektmenge definieren. Allerdings scheint eine solche Logik keine wirklich brauchbaren metalogischen Eigenschaften zu haben: im Fall unendlicher Ontologien scheint die klassische Prädikatenlogik dezidiert die bessere Wahl zu sein.

der Menge $\mathbb{A}$ aller Strukturen gegeben ist als:

$$|\mathbb{A}| = 2^{\left(\prod_{(s_j)_{j=1}^{i} \in \mathcal{R}} |s_1| \cdots |s_i|\right)}.$$

Das Existenzprädikat E werden wir hier so definieren, dass $\mathsf{E}(c)$ gilt, falls $c \in \mathfrak{A}$ gilt, was wiederum nur der Fall sein kann, wenn die Sorte von c als Relation in $\mathcal{R}$ definiert ist. Das bedeutet, dass Strukturen hier im Allgemeinen auch solchen Dingen positive Eigenschaften zuschreiben können, die in dieser Struktur gar nicht existieren. Sinnvoll erscheint dies deshalb weil hier jeder Name ein fixes Objekt identifiziert und somit auch im Fall des „Nicht-Referierens“ klar ist, worauf sich der „Name“ im Allgemeinen bezieht.

Positive und negative *free logic* in L_s Dennoch kann man natürlich auch hier die Einschränkung vornehmen, dass Objekte c, für die $\mathsf{E}(c)$ nicht gilt, keine positiven Eigenschaften haben dürfen. Dies ist gewährleistet in der Klasse $\mathbb{A}_{\mathsf{E}}$ aller Strukturen $\mathfrak{A}$ für die gilt:

$$(c_1, \ldots, c_n) \in \mathfrak{A} \rightarrow c_1 \in \mathfrak{A} \wedge \ldots \wedge c_n \in \mathfrak{A}.$$

Vokabular und Syntax Jedes Element einer Sorte s ist definiert als *Konstante* des Typs s. Außerdem gibt es für jede Sorte eine abzählbare Menge von Variablen. Konstanten und Variablen sind *Terme*. Außerdem ist, für jede Variable x und jede Formel ϕ (im unten definierten Sinn), die die freie Variable x enthält, $\iota x.\phi$ ein Term.

Es gibt außerdem eine Konstante $\mathtt{NULL} \notin O$ deren Typ $\mathtt{NULL}$ ist. Mit $\mathtt{T}$ bezeichnen wir die Funktion, die jedem Term t seinen Typ $\mathtt{T}(t)$ zuordnet.

Jede endliche Folge von Termen ist eine *atomare Formel*. Die L_s-Formeln sind definiert als:

$$\phi ::= a \mid t = t \mid [\lambda x.\phi](t_x) \mid \forall x.\phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi.$$

Hier bezieht sich a auf atomare Formeln, t auf Terme, x auf Variablen, t_x auf Terme des selben Typs wie x.

Semantik Wir definieren für jede Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Konstante c

$$\mathfrak{A}(c) := c.$$

Für jeden Term $\iota x.\phi$ definieren wir außerdem:

$$\mathfrak{A}(\iota x.\phi) := \begin{cases} c & \text{falls ein definites } c \in \mathtt{T}(x) \text{ existiert} \\ & \text{sodass } \mathfrak{A} \vDash \phi[c/x] \text{ gilt,} \\ \mathtt{NULL} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Definitionen für $\forall$, $\neg$, $\wedge$ sind wie üblich. Für Strukturen $\mathfrak{A}$, Folgen $(t_1, \ldots, t_n)$ von Termen und Formeln $\mathsf{E}(t)$, $t = t'$, wo die Terme $t, t', t_1, \ldots$ keine Variablen sind, definieren wir außerdem:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \vDash (t_1, \ldots, t_n) & \text{gdw} & (\mathfrak{A}(t_1), \ldots, \mathfrak{A}(t_n)) \in \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{A} \vDash t = t' & \text{gdw} & \mathfrak{A}(t) = \mathfrak{A}(t'). \end{array}$$

Einstellige atomare Formeln Eine wichtige Funktion übernehmen in der starren Logik *einstellige atomare Formeln*. Da die einstellige atomare Formel (c) genau dann erfüllt ist, in einer Struktur $\mathfrak{A}$, wenn $c \in \mathfrak{A}$ gilt, kann man diesen Sachverhalt entweder so deuten, dass eine durch c ausgedrückte Proposition wahr ist oder aber dass das Objekt c in $\mathfrak{A}$ existiert. Einstellige atomare Formeln fungieren also sowohl als Existenzprädikate als auch als Propositionen (letzteres scheint natürlich vor allem dann sinnvoll, wenn es keine mehrstellige Relation gibt, die c als Argument enthalten kann). Will man das Existenzprädikat E mit der selben Bedeutung wie in der Typenlogik $L_{P_t\mathfrak{J}}$ einführen, so definiert man einfach:

$$\mathsf{E}(c) := (c).$$

Flexible Typen Eine dezidierte Schwäche der Typenlogik bzw. der klassischen Prädikatenlogik überhaupt liegt in der Starrheit der Typisierung. Wenn wir einen Typ $\langle 0 \rangle$ der ersten Stufe definieren und in ihm eine Prädikatenkonstante einführen, die die Eigenschaft *Rot* beschreibt, dann können wir diese Eigenschaft nur den Objekten zuschreiben, die im Bereich des Typs liegen, also den Objekten 0 der ersten Stufe. Nun wäre es aber, intuitiv gesehen, durchaus sinnvoll, wenn man manche Eigenschaften prinzipiell *beliebigen* Objekten eines beliebigen Typs zuschreiben kann bzw. auch beliebigen Objektstrukturen, die unterschiedliche Stellenzahl besitzen können. In der starren Logik ist all das völlig problemlos und in natürlicher Weise möglich. Nehmen wir beispielsweise das Objekt *Rot* (aus irgendeiner Sorte von Farben o. dgl.). Dann müssen wir nur *festsetzen*, dass jede Formel (Rot, c) *bedeutet*, dass das Objekt c das Merkmal *Rot* aufweist. Es ist dann, formal gesehen, völlig egal, aus welcher Sorte c stammt. Ob es *möglich* ist, dass irgendein c, in diesem Sinn, die Eigenschaft *Rot* aufweist, bestimmen wir auf der Ebene der elementaren Sprachspezifikation, indem wir festsetzen ob die Sortenfolge (t, u) in $\mathcal{R}$ enthalten ist, mit $Rot \in t$ und $c \in u$.

Eine andere Möglichkeit flexibler Typen besteht darin, dass wir Merkmale definieren können, die sich auf ganz unterschiedliche Anzahlen von Argumenten beziehen. Wenn wir beispielsweise festsetzen, dass dass Objekt *Verwandt* bedeutet, dass jede Formel der Form

$$(Verwandt, c_1, \ldots, c_n)$$

ausdrückt, dass die c_i alle miteinander verwandt sind, wobei n beliebig variieren kann, dann können wir erneut im fundamentalen Layout der Sprache, durch geeignete Wahl von $\mathcal{R}$, festsetzen, welche Folgen von Argumentenstellen für diese Eigenschaft infrage kommen.

Mit anderen Worten: wie flexibel oder unflexibel die Sprache ist, hängt davon ab, wie wir $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$ wählen (bzw. auch, wie wir die entsprechende Wahl interpretieren).

Intensionale und extensionale Gegenstände Eine Möglichkeit, mit dem Problem der Referenz bzw. dem Verhältnis von Zeichen und Bezeichnetem umzugehen, besteht in L_s darin, dass man eine oder mehrere Sorte(n) bestimmt, die *Namen* enthalten (bzw. deren Objekte sich auf Namen einer natürlichen Sprache beziehen). Zweistellige atomare Formeln der Form (n, o) können dann so interpretiert werden, dass der Name n das Objekt o bezeichnet. Ist n ein Eigenname, dann bedeutet das, dass

$$\iota x.(n, x)$$

existiert (zumindest im Rahmen der Sorte von x) usw. Dies bietet auch eine Möglichkeit, zwischen intensionalen und extensionalen Eigenschaften zu unterscheiden. – Sei p eine Sorte, die als einstellige Prädikate interpretierte Objekte enthält, insbesondere solche Merkmale wie A „geht am Abend auf“, M „geht am Morgen auf“. Dann können wir die Namen a „Abendstern“ und m „Morgenstern“ und das Objekt v das den Planeten Venus repräsentiert in geeigneter Weise interpretieren, sodass folgende Aussagen wahr sind:

(a, v)	a bezeichnet v.
(m, v)	m bezeichnet v.
$(A, a) \wedge (M, m)$	a hat das Merkmal A, m das Merkmal M.
$(A, v) \wedge (M, v)$	v hat die Merkmale A und M.
$\neg(A, m) \wedge \neg(M, a)$	m hat nicht das Merkmal A und a nicht das Merkmal M.
usw.	

Man kann das Referieren natürlich auch von Bedingungen abhängig machen. So könnte man fordern, dass (a, v) impliziert, dass v tatsächlich alle Merkmale hat, die man a zuschreibt. Mit einer Variable x der Sorte p gewährleisten wir das in dem Axiom:

$$\forall x : (x, a) \to (x, v).$$

Zusammenfassend: wir können in L_s die Ausdrucksmöglichkeiten einer intensionalen Logik durch eine mehrsortige Konstruktion bereitstellen.

Typenhierarchien Wir zeigen nun noch, wie man einen Teil der Sorten von L_s als hierarchische Typenstruktur interpretieren kann. Dazu benötigt man eine endliche Typenstruktur T und eine injektive Filterfunktion $\Theta : T \mapsto \mathcal{R}$, sodass für jeden nicht-trivialen Typ $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in T$ gilt dass:

$$\Theta(\langle t_1, \dots, t_n \rangle) = (\Theta(\langle t_1, \dots, t_n \rangle), \Theta(t_1), \dots, \Theta(t_n)).$$

So kann man jeden beliebigen Typ aus T in der Menge von Relationen $\mathcal{R}$ identifizieren. Beispielsweise muss es zu dem Typ $\langle 0 \rangle$ der ersten Stufe und zum Typ $\langle\langle 0 \rangle, \langle 0 \rangle\rangle$ der zweiten Stufe passende Sorten t und u geben mit

$$\Theta(\langle 0 \rangle) = (\Theta(\langle 0 \rangle), \Theta(0)) = (t, s) \qquad \text{und}$$
$$\Theta(\langle\langle 0 \rangle, \langle 0 \rangle\rangle) = (\Theta(\langle\langle 0 \rangle, \langle 0 \rangle\rangle), \Theta(\langle 0 \rangle), \Theta(\langle 0 \rangle)) = (u, t, t).$$

D. h.: die erste Stelle in den durch Θ identifizierten Relationen aus $\mathcal{R}$ steht für die entsprechenden Prädikate des dazu korrespondierenden Typs aus T.

3.5 Literaturhinweise

Die wichtigsten formalen Grundlagen der Typenlogik werden in van Benthem & Doets (2001) diskutiert. Ein ausgezeichnetes Lehrbuch der Typenlogik, das die Modallogik (sowie eine Darstellung von Kurt Gödels Gottesbeweis!) einbezieht, ist Fitting (2002). In diesem Buch findet man auch die Beschreibung des Konzepts von intensionalen Objekten, das ich hier weitgehend übernehme (mit der Ausnahme, dass bei Fitting intensionale Objekte einer beliebigen Domäne angehören während wir sie auf die Domäne der nichtlogischen Konstanten beschränken: vgl. Fußnote 1, oben, S. 54). Als Erfinder intensionaler Objekte gelten Gottlob Frege (1892b), Alonzo Church (1946) und Richard Montague (1972). In der neuen Literatur findet man ein System, das alle montagueschen Finessen bietet beispielsweise in Zalta (1988). Weitere (hier nicht behandelte) Spielarten einer Logik höherer Stufe wie der λ-Kalkül oder die Kategorienlogik werden in van Benthem (1995) diskutiert.

Das hier verwendete Konzept einer *free logic* mit Dummy-Objekten geht auf Carnap (1972) zurück. Zur *free logic* generell siehe Bencivenga (2002). Obwohl es ein Lehrbuch der Modallogik ist, findet man viele der hier diskutierten Konzepte (ι-Operatoren, λ-Abstraktionen, *free logic*) in Fitting & Mendelsohn (1998) erläutert.

Ein Standardwerk zur Logik zweiter Stufe und ihrer metamathematischen Signifikanz (inklusive des Vergleichs Standard- versus Henkin-Semantik) ist Shapiro (2000). (Komprimierte Fassungen dieses Buches findet man auch in Goble (2001) und Shapiro (2005).) . Logische Systeme zwischen der ersten und der zweiten Stufe werden in (Ebbinghaus et al., 1996, Kapitel IX) und in Shapiro

(2001) diskutiert sowie, in umfassender Weise, in Barwise & Feferman (1985). Zu generalisierten Quantoren siehe auch Keenan & Westerståhl (1997).

Das Konzept einer starren Logik stammt von mir: siehe Damböck (2005, 2009).

4 Modallogik

4.1 Grundideen der modalen Aussagenlogik

Die im vorigen Kapitel besprochene Logik höherer Stufe ist eine Variation der klassischen Logik, die sich gewissermaßen von selbst ergibt. Klassische Logik war ursprünglich Logik höherer Stufe und wurde erst auf der Grundlage der klassischen metalogischen Resultate auf die erste Stufe zurechtgestutzt. Im Unterschied dazu stellt die Modallogik echte Erweiterungen der klassischen Logik bereit.

Es geht in der Modallogik darum (und das ist durchaus schon der Ansatz zu einer Definition), alle Arten von Bedeutungen von Namen oder Aussagen fest zu machen, die sich nicht in dem gerade aktuellen, deren Extension definierenden Kontext, erschließen lassen. Modallogik geht also dadurch in den intensionalen Bereich hinein, dass sie Ausdrucksmöglichkeiten schafft, deren Semantik von Verhältnissen abhängen, *die jenseits der gerade aktuellen semantischen Interpretation (jenseits der gerade aktuellen „Welt") liegen*. Bedeutet „Intensionalität" also im Rahmen der Prädikatenlogik das Unterscheiden zwischen der Extension und der Intension eines Namens, so geht es in der Modallogik um ein Interpretieren der Gültigkeit von Formeln, die, jenseits von aktualer Gültigkeit, in einem übergeordneten intensionalen Kontext definiert ist. Beispiele für solche Gültigkeitsformen sind: „notwendig wahr", „immer wahr".

Die Entwicklung der Modallogik kann zwar in gewisser Weise bis auf Aristoteles zurück verfolgt werden. Auch Leibniz muss als Pionier gerade der formalen Seiten der modernen Modallogik gelten. Für die unmittelbaren Entwicklungen im zwanzigsten Jahrhundert können aber drei Philosophen als entscheidend wichtig identifiziert werden: C. I. Lewis, Rudolf Carnap und vor allem Saul Kripke, der die Modallogik in die Form gebracht hat, die sie bis heute im wesentlichen besitzt.

Am Anfang der Entwicklungen stand die Idee, Logiken durch bestimmte zusätzliche logische Sprachelemente zu erweitern, wie etwa die Operatoren $\Box$ für „es gilt notwendiger Weise" und $\Diamond$ für „es gilt möglicher Weise". Die Intuition, die hinter diesen Operatoren stand, war, dass $\Box\phi$ bedeutet, dass etwas *immer*, also *unter allen denkbaren oder möglichen Umständen* gilt bzw. auch, wie man es später ausdrückte, „in allen möglichen Welten". $\Diamond\phi$ hingegen sollte bedeuten, dass etwas unter irgendwelchen denkbaren oder möglichen Umständen gilt bzw. in irgendwelchen möglichen Welten. Eine weitere derartige Erweiterung, die sehr früh schon diskutiert wurde, ist die *strikte Implikation* $\prec$, wobei $\phi \prec \psi$ als plausiblere Fassung der Implikation im Sinne der klassischen Aussagenlogik intendiert war. – Während in der klassischen Logik eine falsche Aussage alles impliziert, also solche absurden Sätze wie

(FW*) „Der Mond ist aus grünem Käse also liegt Wien an der Donau."

wahr sind, sollte die strikte Implikation so definiert sein, dass, wenn immer ϕ gilt, auch ψ gilt. Nehmen wir an, dass es denkbare Situationen gibt, in denen der Mond aus grünem Käse ist aber Wien nicht an der Donau liegt, dann würde (FW*) nicht gelten, sobald wir „also" mittels $\prec$ interpretieren.

Modallogik syntaktisch (C. I. Lewis) Der amerikanische Logiker C. I. Lewis griff um 1920 herum diese Idee der syntaktischen Erweiterung einer formalen Sprache um „modale Elemente" auf und überlegte sich eine Reihe von Optionen wie man einen axiomatischen Kalkül gestalten könnte, der bestimmten intuitiven Annahmen genügt, die man mit solchen zusätzlichen Sprachelementen verknüpfen kann. Resultat dieser Bemühungen waren die Axiomensysteme **S1** bis **S5**, die bis heute in der Modallogik diskutiert werden.

Ohne der Lewisschen Darstellung wörtlich zu folgen, kann zu diesen elementaren Axiomatisierungen folgendes gesagt werden. Zunächst einmal ist klar, dass zwischen den modalen Operatoren $\Box$, $\Diamond$ und $\prec$ bestimmte elementare Beziehungen bestehen müssen. Die Operatoren $\Box$ und $\Diamond$ sind (wie die beiden Quantoren $\forall$ und $\exists$) *dual*, d. h. es gilt:

(D1) $\Box\phi$ gdw $\neg\Diamond\neg\phi$,

also: etwas ist notwendiger Weise der Fall, genau dann wenn es nicht möglich ist, dass es nicht der Fall ist. Weiters gilt:

(D2) $\Diamond\phi$ gdw $\neg\Box\neg\phi$,

also: etwas ist möglicher Weise der Fall, genau dann wenn es nicht notwendiger Weise nicht der Fall ist. Die strikte Implikation wiederum kann anhand von $\Box$ so beschrieben werden:

(D3) $\phi \prec \psi$ gdw $\Box(\phi \rightarrow \psi)$,

der Zusammenhang mit $\Diamond$ lautet:

(D4) $\phi \prec \psi$ gdw $\neg\Diamond(\phi \wedge \neg\psi)$,

usw. – *Aufgabe*: natürlich sind diese Beziehungen in einem bestimmten Sinn willkürliche Festsetzungen. Überlege ob bzw. warum es kaum sinnvoll wäre, hier andere, zu diesen formal inkompatible Festsetzungen zu treffen.

Aufgrund dieser Beziehungen ist klar, dass man stets nur einen der drei elementaren Operatoren definieren muss und dann automatisch die anderen, auf der

Basis von expliziten Definitionen, erhält. Wir werden daher, auf der rein syntaktischen Ebene, durchwegs nur den Operator $\Box$ definieren und annehmen, dass $\Diamond$ und $\multimap$ auf obiger Grundlage spezifiziert sind: ist $\Box$ definiert, dann können wir stets auch auf $\Diamond$ und $\multimap$ zurückgreifen.

Ein Axiomensystem bzw. ein Kalkül der Modallogik muss daher nur angeben, wie man mit dem in einer beliebigen Logik eingeführten zusätzlichen Operator $\Box$ umgeht. Diese Basis-Logik soll für alle Überlegungen in den ersten Abschnitten dieses Kapitels die Aussagenlogik L_A sein. Der elementaren Syntax der Aussagenlogik fügen wir dann im einfachsten Fall nur den Operator $\Box$ hinzu, durch die Regel: wenn ϕ eine Formel ist, so ist auch $\Box\phi$ eine Formel. Die so resultierende Sprache bezeichnen wir mit $L_{A\Box}$.

Normale Modallogiken Der $L_{A\Box}$-Kalkül **K** enthält neben den Axiomen und Regeln von L_A die Ableitungsregel

(R4) Wenn ϕ ein Theorem ist, so auch $\Box\phi$.

sowie das Axiom

K $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$.

Jeder $L_{A\Box}$-Kalkül, der auf **K** aufbaut, durch Hinzufügen weiterer Axiome, wird auch *normal* genannt. Leider lassen sich nicht alle möglichen modalen Kalküle als normale Kalküle darstellen, so insbesondere die von Lewis eingeführten klassischen Systeme **S1** bis **S3** (siehe Abschnitt 4.3.5).

Die meisten wichtigen modalen Logiken sind jedenfalls „normal". – Aber warum ist das so? Was macht die Regel (R4) und das Axiom (K) so unwiderstehlich? – Die Regel (R4), zunächst, besagt nichts weiter als dass jede in einer Logik *gültige* Formel, jede Tautologie also, auch „notwendig" ist. Die Tautologien sind somit definiert *als eine Unterklasse der notwendigen Formeln*. Und diese Intuition ist überaus nahe liegend: Es könnte zwar wohl sein, dass einige Aussagen notwendig sind, *ohne* tautologisch zu sein – dies wäre eine Form von nichttrivialer Notwendigkeit –, aber in dem Fall, dass Aussagen tautologisch sind, werden wir in fast allen Fällen annehmen wollen, dass sie auch notwendig sind.

Etwas weniger eindeutig scheint die Sachlage im Fall des Axioms (K) zu sein. Aber dieses Axiom steht dennoch in direktem Zusammenhang mit der Regel (R4). Es besagt nämlich nichts anderes als dass der Operator $\Box$ auf die logische Implikation so reagiert, wie dies die klassische Logik erwartet. Man kann sagen, dass beide Festsetzungen, die den Begriff einer normalen Modallogik definieren, zusammen genommen nichts anderes bestimmen als dass *die logische Folgerung* bzw. die *Implikation* hier in einem bestimmten Sinn klassisch interpretiert wird. Folgerichtig ist es so, dass nicht-normale modale Logiken in aller Regel den

Zweck verfolgen nicht-klassische Interpretationen der logischen Folgerung zu liefern! (Vgl. Abschnitt 4.3.4)

Aber zunächst bleiben wir einmal bei den normalen Modallogiken. Wichtige Axiome, die zur Konstruktion weiterer Kalküle der normalen Modallogik herangezogen wurden, sind:

D	$\Box\phi \to \Diamond\phi$
T	$\Box\phi \to \phi$
4	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$
E	$\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$ bzw. $\neg\Box\phi \to \Box\neg\Box\phi$
B	$\phi \to \Box\Diamond\phi$
H	$(\Diamond\phi \wedge \Diamond\psi) \to (\Diamond(\phi \wedge \psi) \vee \Diamond(\phi \wedge \Diamond\psi) \vee \Diamond(\psi \wedge \Diamond\phi))$
Triv	$\phi \to \Box\phi$
Ver	$\Box\phi$

Darauf aufbauende wichtige Axiomensysteme sind:

KT = **T**
KT4 = **S4**
KT4B = **KT4E** = **S5**
KD = **D** oder deontisches **T**
KD4 = **D4** oder deontisches **S4**
KD4E = **D4E** oder deontisches **S5**
KTB = Brouwersches System

Auf der durch C. I. Lewis zunächst beschrittenen rein syntaktischen Ebene lässt sich nur so viel über diese modalen Varianten sagen: es gibt offensichtlich keine Axiomatik für die Modallogik, die alle möglichen Interpretationen abdeckt, wie dies in der klassischen Logik zumindest in Ansätzen der Fall ist. Vielmehr drängen sich für unterschiedliche Interpretationen jeweils unterschiedliche Systeme auf. Aber dieser ganze Dschungel von deduktiven Systemen der Modallogik scheint völlig unentwirrbar, so lange es nicht gelingt eine griffige *semantische* Interpretation einer Sprache wie $L_{A\Box}$ zu liefern.

Semantik der L-Wahrheit: Rudolf Carnap Einen ersten wichtigen Schritt in dieser Richtung hat Rudolf Carnap in „Bedeutung und Notwendigkeit" getan. Carnaps Idee lautete, Notwendigkeit im Sinne von logischer Wahrheit zu interpretieren. $\Box\phi$ bedeutet dann semantisch nichts anderes als „ist in allen Strukturen der Sprache L_A wahr".

Carnap konnte zeigen, dass eine so konstruierte Modallogik eine Instanz von **S5** ist (wir werden unten sehen, dass es sich dabei allerdings um einen *Sonderfall* dieser Logik handelt). Damit konnte Carnap zwar keine semantische Interpretation bereitstellen, die flexibel genug war, um alle Varianten von Modallogiken semantisch zu interpretieren, aber er lieferte immerhin eine erste und für die folgenden Entwicklungen entscheidende Idee in dieser Richtung:

Notwendigkeit bedeutet Wahrheit nicht bloß in einer bestimmten Struktur $\mathfrak{A}$, sondern in allen in irgendeiner Form durch $\mathfrak{A}$ definierten Strukturen aus einer Gesamtheit von „möglichen Welten“.

Mögliche-Welten-Semantik: Saul Kripke Diesen Gedanken aufgreifend entwickelte Saul Kripke den semantischen Formalismus auf dem Modallogik bis heute basiert.[1] Eine *modale Struktur* ist ein Paar $(\mathcal{W}, R)$ wo $\mathcal{W}$ eine Menge von L_A-Strukturen ist (also eine Teilmenge der Potenzmenge $\wp(A)$) und R eine zweistellige Relation über $\mathcal{W}$. Nun definiert man $\Box\phi$ als Erfülltheit, relativ zu R, für jede Struktur $\mathfrak{A} \in \mathcal{W}$:

$$\mathfrak{A} \vDash \Box\phi \quad \text{gdw} \quad \text{für jedes } \mathfrak{A}' \in \mathcal{W} \text{ mit } R(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') \text{ gilt } \mathfrak{A}' \vDash \phi.$$

Eine Formel ist dann *gültig*, in einer modalen Struktur, wenn sie in jeder möglichen Welt der Struktur erfüllt ist. Ist **L** eine Klasse von modalen Strukturen, dann ist eine Formel **L**-*gültig*, wenn sie in jeder modalen Struktur aus **L** gültig ist.

Erläuterung: Wahrheit – $(\mathcal{W}, R)$-Gültigkeit – L-Gültigkeit – Gültigkeit Streng genommen muss man bei der Definition von Erfülltheit stets die modale Struktur mit angeben:

$$(\mathcal{W}, R), \mathfrak{A} \vDash \phi$$

bedeutet, dass die Formel ϕ in der Struktur $\mathfrak{A} \in \mathcal{W}$ der modalen Struktur $(\mathcal{W}, R)$ erfüllt bzw. wahr ist. Analog bedeutet dann

$$(\mathcal{W}, R) \vDash \phi,$$

[1] Wir verwenden hier durchgängig einen gegenüber der in der Literatur sonst üblichen (und direkt auf Kripke zurückgehenden) Vorgangsweise vereinfachten Formalismus. Während normaler Weise ein modaler *frame* (W, R) als Grundlage gesetzt wird, also eine Menge von „möglichen Welten“ plus einer Menge von Relationen über R und dann ein *modales Modell* (W, R, I) als aus einem frame und einer Interpretationsfunktion I zusammengesetzt eingeführt wird, wobei I für jedes $w \in W$ die nichtlogischen Elemente der Sprache interpretiert, sprechen wir hier immer nur von *modalen Strukturen* $(\mathcal{W}, R)$, wo $\mathcal{W}$ eine Menge von Strukturen der Grundsprache ist und R eine Relation über $\mathcal{W}$. Der Unterschied besteht darin, dass man im klassischen Fall drei Begriffe von Gültigkeit definieren kann: Gültigkeit (1) als Wahrheit in allen Welten eines modalen Modells, (2) als Gültigkeit in allen modalen Modellen über einem Frame und (3) als Gültigkeit in allen Frames einer bestimmten Klasse **L**. In unserem Fall können wir nur von Gültigkeit (1) als Wahrheit in allen möglichen Welten einer modalen Struktur und (2) als Gültigkeit in allen modalen Strukturen einer Klasse **L** sprechen. Aber diese Einschränkung sollte kein Problem sein, da wir ohnedies nur an *Wahrheit* in einer modalen Struktur auf der einen Seite und **L**-Gültigkeit auf der anderen interessiert sind: beides kann man in beiden Varianten ausdrücken.

dass ϕ in der modalen Struktur $(\mathcal{W}, R)$ gültig ist, also wahr in allen $\mathfrak{A} \in \mathcal{W}$. Außerdem bedeutet

$$\mathbf{L} \vDash \phi,$$

dass ϕ in allen modalen Strukturen aus **L** gültig ist und

$$\vDash \phi,$$

dass ϕ in *allen* modalen Strukturen gültig ist. Wir vereinfachen die Schreibweise für Erfülltheit hier jedoch durchwegs und schreiben $\mathfrak{A} \vDash \phi$ anstelle von $(\mathcal{W}, R), \mathfrak{A} \vDash \phi$, so lange klar ist, in welcher modalen Struktur $(\mathcal{W}, R)$ hier Erfülltheit definiert werden soll.

Ordnungseigenschaften und Kalküle Die fundamentalen metalogischen Resultate, die Kripke und andere auf der Basis dieses Formalismus zeigen konnten, bestehen darin, dass bestimmte modale Kalküle genau die gültigen Formeln liefern, von bestimmten Klassen von modalen Strukturen, die bestimmte *Ordnungseigenschaften* aufweisen. Beispielsweise liefert der Kalkül **S5** genau die Formeln, die in all den modalen Strukturen gültig sind, deren Vergleichbarkeitsrelation eine Äquivalenzrelation ist. Diese Bedingung, der die Relation einer modalen Struktur genügen muss nennen wir auch die *Strukturbedingung*. Weitere derartige Resultate lauten:

Logik	Strukturbedingung
K	keine Bedingung
T	R ist reflexiv
S4	R ist reflexiv und transitiv
S5	R ist eine Äquivalenzrelation (reflexiv, transitiv, symmetrisch)

In der Folge kann man für jede beliebige Modallogik die sie definierenden Strukturbedingungen suchen. Die Idee ist, dass sich letztlich *jedes* intensionale Konzept auf der Grundlage solcher struktureller Zusammenhänge zwischen „möglichen Welten“ beschreiben lässt.

Wofür steht die Vergleichbarkeitsrelation? Die in einer modalen Struktur angegebene Relation nennt man auch Vergleichbarkeits- oder Erreichbarkeitsrelation. Die Idee ist, dass diese Relation für jede „mögliche Welt“ bzw. für jeden möglichen Zustand eines modallogisch beschriebenen Systems genau diejenigen möglichen Welten/Zustände heraus pickt, die mit dieser/m „vergleichbar“ sind. Das kann bedeuten, dass die durch R definierten Zustände *mögliche Alternativen* zu einem Zustand darstellen, zu diesem *ähnliche* oder von ihm aus *erreichbare* Zustände usw. Was genau die durch R definierten Welten/Zustände bedeuten, das hängt von der jeweiligen philosophisch-wissenschaftlichen Interpretation einer Sprache ab. Man kann also dieses Konzept nur *verstehen*, indem man sich verschiedene Beispiele solcher Interpretationen und Anwendungen ansieht und dann seine Schlüsse zieht.

Die Beziehung normaler Modallogiken Axiomatische Festsetzungen in normalen Modallogiken entsprechen eindeutig bestimmten algebraischen Eigenschaften der Vergleichbarkeitsrelation (Strukturbedingungen). Wir haben beispielsweise:

Axiom		Strukturbedingung
K		keine Bedingung, gilt in jeder Relation R
D	$\Box\phi \to \Diamond\phi$	seriell: es gibt ein $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}'$
T	$\Box\phi \to \phi$	reflexiv: $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}$ gilt
4	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$	transitiv: $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}' \wedge \mathfrak{A}'R\mathfrak{A}'' \to \mathfrak{A}R\mathfrak{A}''$
E	$\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$	euklidisch: $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}' \wedge \mathfrak{A}R\mathfrak{A}'' \to \mathfrak{A}'R\mathfrak{A}''$
B	$\phi \to \Box\Diamond\phi$	symmetrisch: $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}'R\mathfrak{A}$

Die „schwächste“ der normalen Modallogiken ist **K**. Das heißt: dieses Axiom gilt in allen Klassen von modalen Strukturen und es ist ein Axiom in allen anderen normalen Modallogiken. **K** ist also die Modallogik mit den wenigsten Tautologien. Lassen wir das Axiom **K** und die Regel (R4) auch noch weg, so resultiert eine Logik, die ausschließlich die klassischen Tautologien als Theoreme enthält, in der also keine Tautologie einen modalen Operator enthält. Nicht-normale Modallogiken erhalten wir, wenn wir darüber hinaus noch den Modus Ponens als ungültig ansetzen (vgl. Abschnitt 4.3.4).

„Stärke“ einer Modallogik definiert sich also anhand der Anzahl der Tautologien. **K** enthält mehr Tautologien als die klassische Logik, **S4** mehr als **K** und **S5** mehr als **S4**

S5 ist dann zwar nicht die „stärkste“ normale Modallogik, aber man kann in gewisser Weise sagen, dass es die stärkste „brauchbare“ normale Modallogik bildet. Eine normale Modallogik, die stärker als **S5** ist, ist das „triviale System“, das man durch Hinzufügen des Axioms

(**Triv**) $\phi \to \Box\phi$

zu **KD** erhält. Diese Logik ist *maximal*, insofern als man keine Formel als Axiom hinzufügen kann, die nicht bereits als Tautologie definiert ist, ohne dass das System inkonsistent wird. Man hat also eine größtmögliche Anzahl von Tautologien. Ebenfalls maximal ist das System „Verum“, das man durch Hinzufügen des Axioms

(**Ver**) $\Box\phi$

zu **K** erhält. Die Systeme **Triv** und **Ver** sind überdies inkompatibel, d. h. das System das als Kombination von **Triv** und **Ver** resultiert, ist inkonsistent. Außerdem lässt sich zeigen, dass *jede* normale Modallogik in einem der beiden Systeme **Triv** oder **Ver** enthalten ist. Abbildung 4.1 zeigt die sich so ergebenden Verhältnisse zwischen der klassischen Logik und einigen wichtigen normalen Modallogiken.

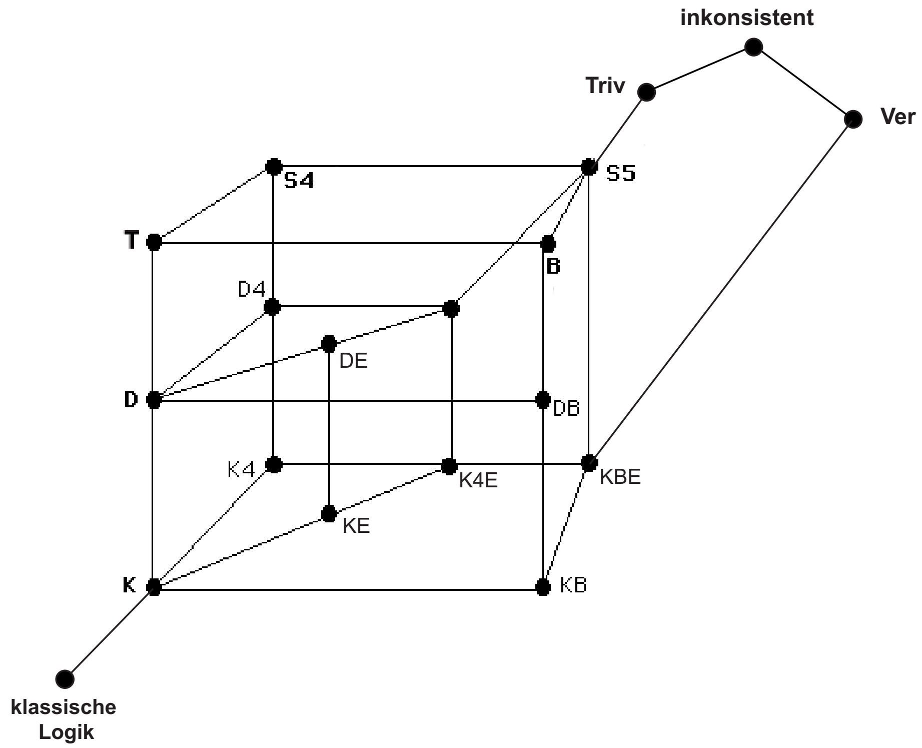


Abbildung 4.1: Einige normale Modallogiken (modifiziert, nach SEP)

Vollständigkeit versus Entscheidbarkeit Wenn eine Logik vollständig ist, dann können wir jede logische Folgerung in endlichen Schritten aus einer Menge von Prämissen ableiten. Daraus folgt aber nicht, dass wir auch in der Lage sind, für eine beliebige Formel festzustellen, ob diese eine logische Folgerung aus bestimmten Prämissen ist. Hat eine Logik auch diese Eigenschaft, so ist sie *entscheidbar*. Die Prädikatenlogik erster Stufe ist, wie wir angemerkt haben, zwar vollständig aber unentscheidbar. Im Fall der Modallogik gibt es jedoch eine ganze Reihe von Logiken, die sowohl vollständig als auch entscheidbar sind. Wir gehen hier nicht weiter auf die Frage der Entscheidbarkeit ein und verweisen auf die Ausführungen in der Literatur zum Thema Entscheidbarkeit, Endliche Modelle und die *finite model property*.

Was sind „mögliche Welten"? Für uns ist der Begriff der möglichen Welt in erster Linie ein technisches Konzept und letztlich nur ein Synonym für den weniger philosophisch klingenden Begriff „semantische Interpretation der nichtlogischen Elemente einer formalen Sprache". Zwar gab es in der heißen Phase der Entwicklung der Modallogik durchaus Philosophen, die der Auffassung waren, dass die „möglichen Welten", von denen in der modallogischen Semantik die Rede ist, tatsächlich diese unsere Welt (unser physikalisches Universum) plus alle möglichen Alternativen dazu adressieren (Kripke war einer dieser Philosophen, David Lewis ein anderer, der diese These mit besonderer Radikalität vertreten hat). Aber boshafte Kritiker könnten über derartige Auffassungen sagen, dass sie ebenso philosophisch sinnlos wie formal nutzlos sind.

Aus heutiger Sicht ist die Frage, was eine „mögliche Welt" jeweils bedeutet, überhaupt nur im Kontext einer ganz konkreten Interpretation der Modallogik zu beantworten und kann überhaupt nur im Kontext einer solchen philosophische Relevanz besitzen. Jenseits der konkreten *Anwendung* der einen oder anderern Instanz modallogischer Formalismen ist der Begriff „mögliche Welt" tatsächlich nichts weiter als eine leere mathematische Festsetzung.

Dennoch könnten wir natürlich versuchen eine ganz bestimmte philosophisch-wissenschaftliche Interpretation von Notwendigkeit als *Standardinterpretation* herauszuarbeiten – wir könnten dann diese Interpretation mit dem Operator $\Box$ identifizieren und andere, etwa zeitlogische oder deontische Interpretationen, mit anderen Operatoren assoziieren. Die entscheidende Frage, bei der Entwicklung einer solchen Standardinterpretation, wäre, welches modale System wir verwenden sollen, wenn wir die Standardinterpretation meinen? – Viele werden hier sicher sofort das System **S5** ins Gespräch bringen, weil es in gewissem Sinn das einfachste System ist: Notwendigkeit ist in ihm stets definiert als Wahrheit in allen Instanzen einer fixen Klasse von „möglichen Welten". Das hat etwas für sich, so lange man nicht beginnt, an diese Standardinterpretation überzogene metaphysische Hoffnungen zu knüpfen.

Wahrheit statt Gültigkeit Apropos Standardinterpretationen: natürlich spielen die Begriffe „Gültigkeit" und „logische Folgerung" auch in philosophischen Diskussionen eine wichtige Rolle. Aber gerade im Fall der sehr konkreten Beispiele, die wir im Folgenden diskutieren, ist in aller Regel die Fragestellung nicht die, welche Formeln in einer Logik Tautologien sind bzw. welche Formeln aus anderen folgen. Vielmehr ist es hier durchwegs eine echte Standardinterpretation, anzunehmen, dass man im konkreten Fall einer Logik, die Zeit, Wissen, Normen u. dgl. formalisiert, *die Welt* in der Gestalt einer konkreten semantischen Interpretation der formalen Sprache vorliegen hat. Die Fragen, die dann zu diskutieren sind, laufen durchwegs auf die Frage der *Wahrheit* einer Formel im Kontext der jeweils *aktualen* Welt hinaus.

Formal gesehen ist somit also die wichtigere metalogische Frage hier nicht die der logischen Folgerung sondern die der Erfülltheit einer Formel in einer Struktur (logische Folgerung wird, im Kontext der Modallogik, zu einem *Spezialfall* dieser Frage). Im Allgemeinen ist die Frage der Erfülltheit einer Formel aber nur dann zu beantworten, wenn die zugrundeliegende Struktur *endlich* ist. Da das gerade im Fall von Problemen, die die konkrete empirische Wirklichkeit betreffen, keine problematische Einschränkung sein dürfte, können wir hier also stillschweigend Endlichkeit voraussetzen. Wir werden weiter unten (Abschnitt 4.8) noch Varianten der Modallogik diskutieren, die dieser philosophischen Endlichkeitsannahme entgegenkommen. Hier bleiben wir aber vorläufig bei dem modallogischen Standardformalismus. Diese Bemerkung sollte aber immerhin klar machen, dass *die semantische Spezifikation* einer Logik im Allgemeinen ausreicht und dass es nicht immer zwingend notwendig ist, auch einen vollständigen Kalkül für eine solche Spezifikation anzugeben.

4.2 Ausgewählte normale Modallogiken

Wir betrachten im Folgenden eine Reihe von Beispielen normaler Modallogiken. Allerdings werden manche der Logiken (insbesondere die Zeitlogik) mehr als einen modalen Operator haben und wir werden kurz (auf S. 84) auch auf die Möglichkeit eingehen, Modaloperatoren zu definieren, die mehr als eine Formel als Argumente besitzen.

Eine Notationsfestsetzung: wenn ein Operator von dem Symbol [#] bezeichnet ist, dann soll $\langle\#\rangle$ stets den dazu dualen Operator bezeichnen. Es gilt also:

$$[\#]\phi \quad \text{gdw} \quad \neg\langle\#\rangle\neg\phi.$$

Man merkt sich diese Unterscheidung leicht, weil die eckigen und spitzen Klammern die Form von $\Box$ und $\Diamond$ nachzeichnen.

Manchmal setzt man für # hier dann einfach den Namen der metasprachlichen Vergleichbarkeitsrelation. $[R]\phi$ wird dann so definiert, dass es wahr ist, wenn ϕ in allen möglichen Welten gilt, die in R vergleichbar zur aktualen sind. Modallogiken, die in diesem Sinn eine ganze Reihe von Relationen $R_1, R_2, \ldots$ enthalten, mit denen man über mögliche Welten quantifizieren kann, nennt man auch *multimodale Logiken* (siehe die Abschnitte 4.3.1 und 4.7).

4.2.1 Zeitlogik

Im Grunde kann Zeitlogik als Versuch gesehen werden, die am Ende des vorigen Abschnittes angedeutete „Standardinterpretation“ des Notwendigkeitsbegriffs in einer etwas subtileren und auch auf die physikalischen Gegebenheiten besser eingehenden Weise zu reformulieren. Tatsächlich ist unser Universum zeitlich (und räumlich, genauer: raumzeitlich) geordnet. Wenn wir eine Sprache so definieren, dass man in ihr lediglich einzelne Zustände des Universums (bzw. irgend eines anderen zeitlich geordneten Systems!) beschreiben kann, dann können wir zeitliche Zusammenhänge anhand modaler Operatoren beschreiben.

Grundlage jeder Zeitlogik ist eine Vergleichbarkeitsrelation $<$, die, wie wir oben (S. 11f) ausgeführt haben, jedenfalls reflexiv, antisymmetrisch und transitiv sein muss, also eine *partielle Ordnung* bildet. In dem Sonderfall, dass es nur einen möglichen Zeitverlauf gibt, ist die Relation außerdem konnexiv, also eine *lineare Ordnung*.

Basis der Zeitlogik $L_{A[P][F]}$ sind die beiden Operatoren $[F]$ und $[P]$. Gegeben eine modale Struktur $(\mathcal{W}, <)$ definieren wir dann, für jede Struktur $\mathfrak{A} \in \mathcal{W}$:

$\mathfrak{A} \models [F]\phi$ gdw $\mathfrak{A} < \mathfrak{A}'$ impliziert $\mathfrak{A}' \models \phi$.
$\mathfrak{A} \models [P]\phi$ gdw $\mathfrak{A}' < \mathfrak{A}$ impliziert $\mathfrak{A}' \models \phi$.

Das Spezifische an der Zeitlogik ist also, dass die modalen Operatoren hier *paarweise* auftreten. Die beiden Operatoren, gemeinsam mit ihren dualen Operatoren indizieren folgende Interpretationen:

$[F]$ Es wird künftig stets der Fall sein.
$\langle F\rangle$ Es wird irgendwann in der Zukunft der Fall sein.
$[P]$ Es war in der Vergangenheit immer der Fall.
$\langle P\rangle$ Es war irgendwann in der Vergangenheit der Fall.

Die *minimale Zeitlogik* $\mathbf{K}_t$ ist dann definiert als jene normale Modallogik (siehe S. 75), die zusätzlich folgende Axiome enthält:

$\mathbf{C}_P$ $\phi \to [P]\langle F\rangle\phi$,
$\mathbf{C}_F$ $\phi \to [F]\langle P\rangle\phi$,
$\mathbf{4}_F$ $[F]\phi \to [F][F]\phi$,
$\mathbf{4}_P$ $[P]\phi \to [P][P]\phi$.

Diese Axiome erlauben die Ableitung von genau allen Formeln, die in den partiellen zeitlichen Ordnungen gültig sind. Für den Sonderfall einer linearen Ordnung gibt es ebenfalls einen vollständigen Kalkül, nämlich die Zeitlogik $\mathbf{K}_t$**'**, die neben den Axiomen von $\mathbf{K}_t$ noch die folgenden beiden Axiome enthält:

$\mathbf{H}_F$ $(\langle F\rangle\phi \wedge \langle F\rangle\psi) \to (\langle F\rangle(\phi \wedge \psi) \vee \langle F\rangle(\phi \wedge \langle F\rangle\psi) \vee \langle F\rangle(\psi \wedge \langle F\rangle\phi))$,
$\mathbf{H}_P$ $(\langle P\rangle\phi \wedge \langle P\rangle\psi) \to (\langle P\rangle(\phi \wedge \psi) \vee \langle P\rangle(\phi \wedge \langle P\rangle\psi) \vee \langle P\rangle(\psi \wedge \langle P\rangle\phi))$.

Auf der Grundlage von $[P]$ und $[F]$ kann man die zusätzlichen Operatoren $\blacksquare$ und $\blacklozenge$ definieren, für „ist immer der Fall“ und „ist manchmal der Fall“:

$\blacksquare\phi := [P]\phi \wedge \phi \wedge [F]\phi$.

Für den dualen (also als $\neg\blacksquare\neg\phi$ definierten) Operator $\blacklozenge$ gilt dann:

$\blacklozenge\phi$ gdw $\langle P\rangle\phi \vee \phi \vee \langle F\rangle\phi$.

Neben den Grundausdrucksmöglichkeiten der Zeitlogik gibt es dann noch die Möglichkeit zusätzliche Operatoren mit ganz eigenständigen Funktionen zu implementieren. Ein sehr instruktives Beispiel dafür sind die beiden zweistelligen (!) Operatoren $\mathcal{S}$ und $\mathcal{U}$ (für „since“ und „until“) der Logik $L_{A\mathcal{U}\mathcal{S}}$. Die Semantik dieser beiden Operatoren sieht so aus:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \models \phi\mathcal{U}\psi & \text{gdw} & \text{es gibt ein } \mathfrak{A}' \text{ mit } \mathfrak{A} < \mathfrak{A}' \text{ und } \mathfrak{A}' \models \psi, \text{ sodass} \\ & & \mathfrak{A}'' \models \phi \text{ gilt, für alle } \mathfrak{A}'' \text{ mit } \mathfrak{A} < \mathfrak{A}'' \text{ und } \mathfrak{A}'' < \mathfrak{A}'. \\ \mathfrak{A} \models \phi\mathcal{S}\psi & \text{gdw} & \text{es gibt ein } \mathfrak{A}' \text{ mit } \mathfrak{A}' < \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{A}' \models \psi, \text{ sodass} \\ & & \mathfrak{A}'' \models \phi \text{ gilt, für alle } \mathfrak{A}'' \text{ mit } \mathfrak{A}' < \mathfrak{A}'' \text{ und } \mathfrak{A}'' < \mathfrak{A}. \end{array}$$

Diese Operatoren sind nicht nur ausdrucksstärker als die Basisoperatoren von $L_{A[P][F]}$ sondern sie beinhalten die Ausdrucksmöglichkeiten dieser Sprache. Denn wir können definieren:

$$\langle F\rangle\phi := \top\mathcal{U}\phi$$

und erhalten so die Operatoren $[F]$ und $[P]$ auch in $L_{A\mathcal{U}\mathcal{S}}$. – *Aufgabe*: Erkläre warum das so ist.

4.2.2 Epistemische Logik

Epistemische Logik studiert Operatoren wie K für „wissen“ (knowledge) und B für „glauben“ (belief). Der Fokus wird also hier auf eine völlig andere Ebene verlagert. Während es im Fall der Zeitlogik darum ging, die zeitliche Ordnung der Zustände eines Systems anhand von modalen Operatoren zu beschreiben, wollen wir im Fall der epistemischen Logik die Zustände des Glaubens oder Wissens von Personen oder Gruppen von Personen charakterisieren.

Was sind, im Fall von Glauben und Wissen, plausible axiomatische Annahmen? Eine fundamentale Annahme ist sicher, dass im Fall von Wissen stets

$$(\mathbf{T}_K) \quad K\phi \to \phi$$

gelten sollte, während im Fall von Glauben diese Implikation nicht zwingend vorliegen muss. Über alle anderen möglichen Grundannahmen lässt sich dagegen streiten. So könnte man folgende Axiome in der einen oder anderen Situation als plausibel ansetzen (überlege was für oder gegen sie spricht!):

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{4}_K) & K\phi \to KK\phi, \\ (\mathbf{4}_B) & B\phi \to BB\phi, \\ (\mathbf{E}_K) & \neg K\phi \to K\neg K\phi, \\ (\mathbf{E}_B) & \neg B\phi \to B\neg B\phi. \end{array}$$

Für den Fall der Glaubenslogik ist außerdem die Annahme von *Konsistenz* von einiger Plausibilität:

$$(\mathbf{D}_B) \quad B\phi \to \neg B \neg \phi.$$

Eine noch wesentlich grundlegendere Frage ist aber, ob man, im Fall von epistemischen Logiken, überhaupt davon ausgehen kann, dass es sich um normale Modallogiken handelt! Die Grundannahmen der normalen Modallogik, also das Axiom

$$(\mathbf{K}) \quad \Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$$

und die Ableitungsregel (R4)

$$\frac{\phi}{\Box\phi}$$

würden hier ja implizieren, dass man (1) jede logische Wahrheit weiß bzw. glaubt und (2), dass man, sobald man ϕ weiß oder glaubt, auch alles weiß oder glaubt, das logisch aus ϕ abgeleitet werden kann. Die Annahme, dass es sich um eine normale Modallogik handelt, bedeutet im Fall der epistemischen Logik also nichts anderes als dass man es mit einem „idealen logischen Agenten“ zu tun hat, quasi einem unendlich leistungsstarken Computer.

Mit anderen Worten: epistemische Logiken als normale Modallogiken sind maßgeschneidert für den Fall wo man Glauben und Wissen nur bezogen *auf empirische Sachverhalte* verstehen will. In diesem zweifellos überaus bedeutsamen Fall erscheint es als zulässige wenn nicht unumgängliche Form von Idealisierung, anzunehmen, dass der Agent auf der Ebene nicht-empirischer Inhalte schlicht allwissend ist. (Ohne diese Annahme müsste man sich mit logischen und mathematischen Fragen herumschlagen, die hier keine Rolle spielen.)

Gegeben diese Überlegung gilt also die Gruppe der epistemischen Logiken, die normale Modallogiken sind, sicher nicht zu unrecht als Standardinterpretation dieser Logik. Im Fall einer Logik, die, als normale Modallogik, Wissen interpretiert, erhalten wir so als den Standardfall die Logik **KT**, die nur das Axiom $\mathbf{T}_K$ als zusätzliche Annahme ansetzt. Nehmen wir außerdem noch das Axiom $\mathbf{4}_K$ an, so ist die resultierende Wissens-Logik unserer Wahl das System **S4**. Fügen wir noch das Axiom $\mathbf{E}_K$ hinzu ist die resultierende Logik **S5**.

Im Fall einer Glaubenslogik, die sich von der Wissenslogik dadurch unterscheidet, dass das Axiom **T** wegfällt, erhalten wir analog die Logiken **K** sowie **K4** bzw. **K45**, durch Hinzufügen der entsprechenden Axiome $\mathbf{4}_B$ bzw. $\mathbf{E}_B$. Fügt man außerdem noch das Konsistenzaxiom $\mathbf{D}_B$ (auch „deontisches Axiom“ genannt) hinzu, so erhält man die Logik **KD4E**.

Eine reizvolle Variante zu einer primitiv definierten Wissenslogik besteht darin K im Rahmen einer Glaubenslogik explizit zu definieren, und zwar so:

$$K\phi := B\phi \wedge \phi.$$

Neben diesen unterschiedlichen Varianten epistemischer Logik sind natürlich eine ganze Reihe von weiteren Optionen und Modifikationen denkbar. Ich erwähne diese hier nur stichwortartig und verweise für die Details auf die unten angeführte Literatur bzw. auf die einschlägigen Diskussionen im weiteren Verlauf dieses Buches. Varianten zu den Standardinterpretationen der epistemischen Logik können auf folgende Weise entstehen:

(1) Man kann sich andere oder zusätzliche Axiome überlegen.
(2) Man kann versuchen die Operatoren für Glauben und Wissen zu kombinieren. Mögliche daraus resultierende Axiome könnten sein:

$$K\phi \to B\phi,$$
$$B\phi \to KB\phi.$$

(3) Man kann eine Glaubens- und/oder Wissenslogik mit anderen modalen Elementen kombinieren, etwa mit den Elementen einer Zeitlogik, um die zeitliche Dynamik von Wissen beschreiben zu können.
(4) Man kann Glaubens- bzw. Wissensoperatoren für eine größere Menge von *Agenten* einführen. Diese Agenten könnten einzelne Personen oder Maschinen sein, aber auch ihrerseits wieder Gruppen von Agenten, die man dann zueinander in Beziehung setzen kann. (Weiß eine Gruppe etwas, so auch jeder Agent in der Gruppe, aber nicht umgekehrt. . .)
(5) Man kann nicht-normale Varianten finden, in denen das Postulat der logisch-mathematischen Allwissenheit aufgehoben ist.
(6) Man kann Glauben und Wissen im Kontext der Prädikatenlogik diskutieren.
(7) Man kann ganz andere Möglichkeiten finden, Glauben und Wissen zu modellieren. Beispielsweise wäre die Wahrscheinlichkeitstheorie hier ein Kandidat (subjektive Wahrscheinlichkeit, Bayesianismus). Vgl. auch induktive Logik, nichtmonotone Logik, Glaubensrevision.

Es gibt also eine ganze Reihe von Möglichkeiten, das Problem des Wissens logisch-formal zu diskutieren und zu modellieren. Dennoch sind die hier präsentierten Varianten insofern grundlegend, als sie zeigen, wie man, auf der Grundlage *der klassischen Logik*, als direkte Erweiterung derselben, Glaubens- und Wissensprädikate definieren kann. Der Formalismus der Mögliche-Welten-Semantik scheint hier unumgänglich. Wissen und Glauben sind jeweils (also im jeweiligen Zustand eines Systems) verkörpert in einer bestimmten Klasse von „Welten“:

genau alle Zustände, die mit der Summe dessen was eine Person oder Gruppe weiß/glaubt kompatibel sind. Die Bedeutung dieses Formalismus und der Möglichkeit im Rahmen desselben bestimmte fundamentale axiomatische Annahmen zu treffen kann nicht hoch genug eingeschätzt werden.

Historisch steht die epistemische Logik ganz am Anfang der Entwicklung der modernen Modallogik. Während Saul Kripke seinen Formalismus im Rahmen des Begriffs der Notwendigkeit entwickelt hat und damit solche Konzepte wie „mögliche Welt“ ins Zentrum der Modallogik gerückt hat, gemeinsam mit einer generellen Tendenz zu metaphysischen Lesarten, hat Jaakko Hintikka, etwa zur selben Zeit und völlig unabhängig von Kripke (!), einen analogen Formalismus entwickelt, aber eben nicht mit den metaphysischen Begrifflichkeiten „notwendig“, „mögliche Welt“ etc. konnotiert, sondern in der rein *erkenntnistheoretischen* Intention, eine Erweiterung der klassischen Logik um Ausdrucksmöglichkeiten für Glauben und Wissen zu finden. Wenn wir heute die metaphysische Interpretation als „Standardinterpretation“ der Modallogik betrachten, dann ist dies viel eher historischen Zufälligkeiten geschuldet als einer „inneren Notwendigkeit“.

4.2.3 Deontische Logik

Während die epistemische Logik sich mit dem Wissen eines Agenten über die Welt auseinandersetzt, befasst sich die deontische Logik mit *normativen Vorgaben*, die Agenten in der Welt festlegen. Sie ist also *die Logik des Sollens*, die Logik der Gesetze und Vorschriften. Typische deontische Operatoren sind:

O Sollen („ought to“)
P Dürfen („is permitted“)
F Verbot („is forbidden“)[2]

Die Operatoren P und F können in einer deontischen Logik stets anhand von O definiert werden, P, als sein dualer Operator:

$$P\phi := \neg O \neg \phi.$$

„Erlaubt ist was nicht verboten ist“. F wiederum wird aufgefasst als Vorschrift einer Unterlassung:

$$F\phi := O\neg\phi.$$

Zweite grundlegende Annahme ist, dass eine deontische Logik eine normale Modallogik sein soll. Dies scheint deshalb nahezu uneingeschränkt plausibel weil

[2]Die Verwechslung mit den zeitlogischen Operatoren wird dadurch ausgeschlossen, dass wir bei $[P]$ und $[F]$ etc. immer die eckigen oder spitzen Klammern verwenden.

ein System von Gesetzen ja stets so konstruiert sein sollte, dass es logische Folgerungen korrekt implementiert und dass es insbesondere logische Tautologien als solche anerkennt. Ausnahmen sind dennoch denkbar: so könnte man nach einer Logik suchen, die es ermöglicht, schlechte oder inkonsistente Gesetze zu implementieren oder auch das Denken eines realen Richters, der unter Umständen kein idealer logischer Agent sein könnte. In diesen Fällen wäre eine nicht-normale Modallogik unter Umständen unumgänglich. So lange es aber darum geht, ein (optimal) *konsistentes* System von Normen zu implementieren (und sei es nur als Ideal!) ist die normale Modallogik die richtige Wahl.

Fundamental für die deontische Logik ist nun jedenfalls das folgende Axiom (das man deshalb auch „deontisches Axiom“ nennt):

(**D**) $O\phi \to P\phi$. Was vorgeschrieben ist ist auch erlaubt.

Die deontische Standardlogik ist also die Logik **D**. Durch Hinzufügen weiterer, mehr oder weniger plausibler Axiome:

4 $O\phi \to OO\phi$,
E $P\phi \to OP\phi$,

erhält man die Varianten **D4** und **D4E**. Interessant ist für ein Verständnis der elementaren Zusammenhänge der deontischen Logik aber auch die Einsicht, dass bestimmte, in anderen Kontexten überaus nahe liegende Axiome hier offensichtlich nicht gelten können. Wichtigstes Beispiel:

$$O\phi \to \phi.$$

Dass was sein soll auch stets der Fall ist, kann nicht einmal ein ideales Rechtssystem (mit Ausnahme vielleicht des nordkoreanischen) annehmen. Deshalb sind die Logik **S4** und alle „stärkeren“ Systeme ungeeignet als Grundlage einer deontischen Logik.

4.3 Das Problem der Folgerung

Das prinzipielle Layout der gegenständlichen Darstellung sieht vor, Mathematik und mit ihr mathematische Logik als nicht hinterfragte Voraussetzung zu betrachten. Genauer wird hier die heute den Mainstream der Forschung bildende Herangehensweise an Mathematik im Rahmen der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe (inklusive Mengentheorie) zugrunde gelegt. Den so etablierten *logischen Folgerungsbegriff*, der sich aus der Wahrheitstafel-Definition der Imnplikation

ϕ	ψ	$\phi \to \psi$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

plus dem darauf aufbauenden Gesetz des Modus Ponens

$$\frac{\phi, \phi \to \psi}{\psi}$$

zusammensetzt sowie aus dem die semantische Seite dieser Spezifikationen repräsentierenden Folgerungsbegriff Tarskis:

> ϕ folgt aus Γ, genau dann, wenn jedes Modell von Γ Modell von ϕ ist,

werden wir hier grundsätzlich nicht hinterfragen. Das ist auch der Grund, warum die *intuitionistische Logik*, als innermathematische Alternative zu dieser Herangehensweise, hier keine zentrale Rolle spielt (siehe aber Abschnitt 4.3.3, wo wir diese Logik als philosophische Logik interpretieren). Während die intuitionistische Logik jedoch *den mathematischen* bzw. *den logischen Folgerungsbegriff* als solchen thematisiert und auf eine nicht-klassische Weise reinterpretiert, setzen im engeren (bzw. im nicht-mathematischen) Sinn philosophische Debatten auf einer ganz anderen Ebene an. Sie versuchen nicht den logisch-mathematischen Folgerungsbegriff zu hinterfragen und formal zu interpretieren sondern den Folgerungsbegriff, der in natürlichen Sprachen und, diesen folgend, zumindest teilweise auch in den (nicht-formalen) Wissenschaften, zu finden ist. *Folgerung* also, die nicht bloß auf *logisch-analytischen* sondern, zumindest partiell, auf *empirisch-kontingenten* Voraussetzungen basieren.

Dass der logische Folgerungsbegriff und seine Bestandteile – die logische Implikation, der Modus Ponens und der semantische Folgerungsbegriff nach Tarski – diesen Spielarten von Folgerungen und Ableitungen oft nicht gerecht werden können, überrascht keineswegs. Wenn wir in der Folge philosophische Alternativen zum logischen Folgerungsbegriff einführen, so betrachten wir diese, ganz analog zur strikten Implikation $\prec$, dem historischen Ausgangspunkt all dieser Alternativen, niemals als formalen *Ersatz* für den logischen Folgerungsbegriff sondern führen sie stets in der Gestalt von zusätzlichen Operatoren ein.

4.3.1 Konditionale Logik (Ceteris-paribus-Logik)

Generell gibt es verschiedene Gründe, warum man zur Modellierung von Folgerungsbeziehungen *nicht* auf das klassische logische Folgerungskonzept zurück greift. Klassische Probleme sind:

(FF) Falsche Aussagen implizieren alles.
(FW) Wahre Aussagen folgen aus allem.

Beispiele für derartige Situationen, die dem Folgerungsbegriff der natürlichen Sprache zuwiderlaufen, sind:

(FF*) „Der Mond ist aus grünem Käse also ist die Welt eine Scheibe."
(FW*) „Der Mond ist aus grünem Käse also liegt Wien an der Donau."

Die strikte Implikation

$$\phi \prec \psi := \Box(\phi \to \psi)$$

bietet eine gute Lösung für diese beiden Problemfälle (und zwar bereits in solchen Fällen wo die zugrundeliegende Logik **S4** oder **S5** ist). Wenn es eine mögliche Welt gibt, in der der Mond aus grünem Käse ist *und* die Welt keine Scheibe ist bzw. Wien nicht an der Donau liegt, dann erweisen sich die beiden Aussagen (FF*) und (FW*) als falsch.

Komplizierter wird die Sachlage jedoch in Fällen logischer Folgerungen, die folgende Form besitzen:

(FP)	$A \to B \,/\, (A \wedge C) \to B$	Prämissenverstärkung
(FT)	$A \to B,\ B \to C \,/\, A \to C$	Transitivität
(FK)	$A \to B \,/\, \neg B \to \neg A$	Kontraposition.

Beispiele dafür, dass diese logischen Folgerungen zu durchaus paradoxen Konsequenzen führen können, sind:

(FP*) Wenn ich Zucker in meinen Kaffee gebe schmeckt er gut. Also gilt: Wenn ich Zucker und Benzin in meinen Kaffee gebe schmeckt er gut.

(FT*) Wenn Karl stirbt kann er nicht laufen gehen. Wenn Karl nicht laufen gehen kann geht er in die Oper. Also gilt: Wenn Karl stirbt geht er in die Oper.

(FK*) Wenn wir das Auto nehmen wird es nicht den Geist aufgeben. Also gilt: Wenn das Auto den Geist aufgibt haben wir es nicht genommen.

All diese Folgerungen sind logisch korrekt. Ersetzen wir hier die Implikation $\to$ durch die strikte Implikation $\prec$, dann zeigt sich, dass alle diese Folgerungen ebenfalls gelten (selbst dann wenn wir schwächere Systeme wie **S1**, **S2** oder **S3** ansetzen). Denn: sobald die Prämissen der Argumente wahr sind (was wir wollen) sind auch die Konklusionen wahr (was wir nicht wollen).

Der Schlüssel zum Problem scheint, einem Ansatz von Richard Stalnaker und David Lewis folgend, darin zu liegen, dass in all diesen Folgerungen bestimmte Annahmen über „Normalbedingungen“ stecken, die man explizit formulieren muss, um tatsächlich korrekte Schlussfolgerungen zu erhalten. Im Fall des ersten Beispiels müsste die korrekte Schlussfolgerung folgender Maßen lauten:

(FP**) Wenn ich Zucker in meinen Kaffee gebe und ich kein Benzin hinein schütte oder sonst etwas passiert, das die Wirkung des Zuckerns beeinträchtigt, *dann* schmeckt er gut.

bzw.:

(FP**') Wenn ich Zucker in meinen Kaffee gebe dann schmeckt er *ceteris paribus* gut.

Die zusätzliche Klausel „und ich kein Benzin hinein schütte oder sonst etwas passiert, das die Wirkung des Zuckerns beeinträchtigt“ bezeichnet man als *Ceteris-paribus-Klausel* (lat.: „wobei die übrigen Dinge gleich sind“). Diese Klausel hält fest, dass die durch eine Prämisse ϕ definierten Bedingungen einer Situation *unverändert* sein müssen: nur unter diesen Umständen gilt dann die Schlussfolgerung.

Fügen wir derartige Ceteris-paribus-Klauseln hinzu, dann bewirkt das auch im zweiten und dritten Beispiel, dass die Schlüsse korrekt interpretiert werden. So muss es heißen:

(FT**) ... Wenn Karl nicht laufen gehen kann geht er *ceteris paribus* in die Oper...

(FK**) Wenn wir das Auto nehmen wird es *ceteris paribus* nicht den Geist aufgeben...

Eine *konditionale Logik* $L_{A>}$ soll diese Idee umsetzen, wobei $>$ hier ein zweistelliger Operator ist, den wir so definieren wollen, dass $\phi > \psi$ ausdrückt, dass ϕ die Formel ψ *ceteris paribus* impliziert.

Eine *modale C-Struktur* $(\mathcal{W}, \{R_\phi : \phi \in L_{A>}\})$ für $L_{A>}$ besteht aus einer Menge $\mathcal{W}$ von L_A-Strukturen plus einer Menge von Relationen über $\mathcal{W}$: *für jede Formel* ϕ ist eine solche Relation R_ϕ definiert, die anschaulich die durch ϕ definierten *Ceteris-Paribus-Bedingungen* beschreibt. Die semantische Spezifikation von $\phi > \psi$ lautet dann:

$$\mathfrak{A} \vDash \phi > \psi \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A}' \vDash \psi \text{ für alle } \mathfrak{A}' \text{ mit } \mathfrak{A} R_\phi \mathfrak{A}'.$$

$\phi > \psi$ ist also wahr, wenn ψ in allen möglichen Welten wahr ist, die den durch ϕ definierten Ceteris-Paribus-Bedingungen genügen.

Ein Kalkül für die Logik $L_{A>}$ basiert auf den Umformungsregeln:

(R6) $\phi \leftrightarrow \psi \;/\; (\phi > \chi) \leftrightarrow (\psi > \chi)$
(R7) $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi \;/\; ((\chi > \phi_1) \wedge \ldots \wedge (\chi > \phi_n)) \rightarrow (\chi > \psi)$

Die so resultierende *normale konditionale Logik* **C** liefert alle Formeln, die gültig sind in der Klasse aller modalen C-Strukturen. Analog zu den normalen Modallogiken mit einstelligem Modaloperator können hier weitere axiomatische Einschränkungen vorgenommen werden: vgl. die Literatur zur konditionalen Logik.

Relative Notwendigkeit Eine sinnvolle Interpretation konditionaler Logik ist die der *relativen Notwendigkeit*. Wir interpretieren dann $\phi > \psi$ als

$$[\phi]\psi$$

was so viel bedeutet wie „ψ gilt notwendiger Weise, relativ zu ϕ“:

$$[\phi]\psi := \phi > \psi$$

Den zu $[\phi]$ dualen Möglichkeitsoperator $\langle\phi\rangle$ erhalten wir als

$$\langle\phi\rangle := \neg\phi > \neg\psi.$$

Wir können $L_{A>}$ also in einem völlig eindeutigen Sinn als multimodale Variante von $L_{A\Box}$ identifizieren, die zu jeder Formel ϕ aus L_A einen eigenen modalen Operator $[\phi]$ enthält.

4.3.2 Relevanzlogik

Relevanzlogik basiert auf der formalen Sprache $L_{A\Rightarrow}$ mit dem zweistelligen Operator $\Rightarrow$, der erneut als alternatives Folgerungskonzept implementiert wird. Während die konditionale Logik auf Ceteris-paribus-Bedingungen aufbaut, die für jede Formel einer Sprache definiert sind, basiert die Relevanzlogik auf einer Verallgemeinerung des strikten Konditionals.

Hatten wir $\phi \prec\!\!3\; \psi$, im Rahmen von **S5**, definiert als den Umstand, dass in allen möglichen Welten $\phi \rightarrow \psi$ gilt, so verlagern wir für $\Rightarrow$ die Bestimmung der Voraussetzungs- und Folgerungsbedingungen ihrerseits auf mögliche Welten. Dies wird realisiert anhand einer dreistelligen (!) Relation R, die wir so interpretieren, dass $R(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'')$ bedeutet, dass $\mathfrak{A}'$ eine durch $\mathfrak{A}$ definierte Voraussetzungsbedingung ist, $\mathfrak{A}''$ eine durch $\mathfrak{A}$ definierte Folgerungsbedingung. $\phi \Rightarrow \psi$ gilt genau dann, in einer möglichen Welt $\mathfrak{A}$, wenn immer dann wenn eine Voraussetzungsbedingung erfüllt ist, auch die entsprechende Folgerungsbedingung erfüllt ist. Genauer:

Eine *modale R-Struktur* $(\mathcal{W}, R)$ besteht aus einer Menge $\mathcal{W}$ von L_A-Strukturen und einer dreistelligen Relation über $\mathcal{W}$ (d. h. es gilt $R \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W} \times \mathcal{W}$). Wir definieren:

$$\mathfrak{A} \vDash \phi \Rightarrow \psi \quad \text{gdw} \quad \text{für alle } \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'' \text{ mit } R(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'') \text{ impliziert } \mathfrak{A}' \vDash \phi \text{ dass } \mathfrak{A}'' \vDash \psi \text{ gilt.}$$

Die so definierte Logik ist von sehr großer Flexibilität und gleichzeitig von sehr großer Ausdrucksschwäche. So gelten für $\Rightarrow$, ohne weitere Einschränkungen, weder der Modus Ponens noch solche Axiome wie $\phi \Rightarrow \phi$ (überlege warum!). Ausdrucksschwäche in diesem Sinn ist aber insofern ein Vorteil als man durch geeignete Einschränkungen der Ausdrucksstärke (also durch Festsetzung von Strukturbedingungen) sehr viele Logiken als Spezialfälle erhält. Für eine Diskussion unterschiedlicher deduktiver Systeme und Axiomatisierungen von $L_{A\Rightarrow}$ verweisen wir auf die Literatur.

Wie könnten wir die dreistellige Vergleichbarkeitsrelation R der Relevanzlogik philosophisch interpretieren? – Jedenfalls handelt es sich um eine Verallgemeinerung der klassischen Implikation $\rightarrow$, die wir als den Spezialfall von $\Rightarrow$ erhalten, wo $R(w, w, w'')$ genau dann gilt, wenn $w = w' = w''$ ist. Allgemein gilt, dass R zu jeder aktualen Welt eine (möglicher Weise leere) Menge von Paaren (v, h) aus möglichen Welten liefert, wo v die Vorderglieder und h die Hinterglieder der Folgerung bilden. Wann immer eine Formel ϕ in v gilt, muss ψ in h gelten, damit $\phi \Rightarrow \psi$ gilt. So kann man sich leicht überlegen, dass auch hier die Probleme aus (FP), (FT) und (FK) vermieden werden können. Die entsprechenden *Ceteris-paribus*-Bedingungen können hier durch geeignete Auswahl von v und h eingebaut werden. Die Relevanzlogik ist insofern ein Formalismus, der ähnliche Möglichkeiten bietet, wie die konditionale Logik.[3]

*4.3.3 *Intuitionistische Logik*

Die intuitionistische Logik geht zurück in die Frühzeit der mathematischen Grundlagendebatte. Der von L. E. J. Brouwer postulierte Intuitionismus definiert Wahrheit mathematischer Sätze nicht, wie dies in der Mainstream-Mathematik bis heute geschieht, anhand von analytischen Wahrheitsbedingungen, die so etwas wie objektive Gegebenheiten simulieren, auf die die Mathematik dann rekurriert. Die Intuitionistin betrachtet einen Satz vielmehr genau dann als *wahr*, wenn er direkt aus anderen als wahr erkannten mathematischen Sätzen abgeleitet werden kann. Spezifikum dieser Konstruktion ist also, dass es hier keine apriorisch-analytisch definierte externe Masse von Theoremen gibt, sondern dass wir nur die Formeln als Theoreme begreifen, für die wir auch tatsächlich eine Ableitung aus anderen Theoremen *angeben* können.

Die metamathematischen Meriten dieses Ansatzes sollen uns hier nicht beschäftigen. Was für uns von Interesse ist, ist ein ganz anderer (und viel eher empirisch zu nennender) philosophischer Gesichtspunkt des Intuitionismus. Wenn

[3] Für weitere philosophische Interpretationen der dreistelligen Vergleichbarkeitsrelation der Relevanzlogik siehe (Priest, 2008 [2001], S. 206-208).

wir den Folgerungsbegriff so definieren, dass wir stets nur solche Prämissen akzeptieren, die wir als gesichert ansetzen können, dann liefert uns das ganz augenscheinlich eine weitere Möglichkeit, mit bestimmten Paradoxien umzugehen, die sich aus der Anwendung des logischen Folgerungsbegriffs auf Folgerungen im Rahmen natürlicher Sprachen ergeben. Deswegen definieren wir auch nicht die klassischen logischen Junktoren in einem intuitionistischen Sinn neu sondern wir fügen logische Junktoren hinzu, die wir dann (als modale Operatoren) intuitionistisch interpretieren.

Intuitionistische Logik definiert die Junktoren $\sqsubset, \rightharpoondown, \wedge, \vee$ anhand folgender Regeln (wobei $\wedge$ und $\vee$ mit der klassischen Logik konvergieren, weshalb wir keine neuen Symbole benötigen):

Ein Beweis von $\phi \wedge \psi$ ist ein Beweis von ϕ plus einem Beweis von ψ.
Ein Beweis von $\phi \vee \psi$ ist ein Beweis von ϕ oder ein Beweis von ψ.
Ein Beweis von $\rightharpoondown\phi$ ist ein Beweis dass es keinen Beweis von ϕ gibt.
Ein Beweis von $\phi \sqsubset \psi$ ist eine Konstruktion die, gegeben einen Beweis von ϕ, einen Beweis von ψ liefert.

Wir definieren die Junktoren $\rightharpoondown$ und $\sqsubset$ hier nicht primitiv sondern führen sie als explizite Definitionen in der Modallogik $L_{A\Box}$ ein:

$$\rightharpoondown\phi := \Box\neg\phi,$$
$$\phi \sqsubset \psi := \Box(\phi \rightarrow \psi).$$[4]

Die intuitionistische Logik **I** ist semantisch definiert durch die Strukturbedingungen, dass die Vergleichbarkeitsrelation R reflexiv und transitiv ist und dass außerdem für alle Aussagenkonstanten $p \in A$ gilt:

für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{W}$ impliziert $\mathfrak{A} \vDash p$ und $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}'$ dass $\mathfrak{A}' \vDash p$ gilt.

Syntaktisch erhalten wir **I**, indem wir zu **S4** das Axiomenschema

$p \rightarrow \Box p$, für alle $p \in A$

hinzufügen. Für weitere Details, insbesondere für den Fall der intuitionistischen Prädikatenlogik, siehe die einschlägige Literatur.

4.3.4 **Lewis' Systeme **S1** bis **S3***

Nicht-normale Modallogiken sind *schwächer* als die normale Modallogik **K**, das heißt, sie enthalten weniger Tautologien als **K** oder genauer: einige **K**-Tautologien sind in einer nicht-normalen Modallogik stets keine Tautologien. Da die beiden **K** definierenden Grundannahmen, also das Axiom

(**K**) $\Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$

[4] $\sqsubset$ ist also ein Spezialfall der strikten Implikation ⥽.

und die Ableitungsregel

(R4) $\phi \,/\, \Box\phi$

letztlich nur festsetzen, dass *logische Folgerung* in einer modalen Logik struktural nach den durch die für die logische Implikation festgesetzten Prinzipien funktioniert, wird das, was jemanden treibt, wenn er zu einer nicht-normalen Modallogik greift, meist damit zu tun haben, dass er mit diesen Prinzipien unzufrieden ist. Das Argument könnte etwa darin bestehen, dass man, wie im Fall der epistemischen Logik angedeutet, die Regel (R4) generell als eine zu starke Annahmen empfindet, also dass man die Möglichkeit vorsehen will, dass für einige Tautologien ϕ nicht $\Box\phi$ gelten könnte.

So verwundert es keineswegs, dass ausgerechnet einige der von C. I. Lewis vorgeschlagenen modallogischen Systeme nicht-normal sind, da es die hauptsächliche Intention von Lewis gewesen ist, die strikte Implikation als philosophische Ergänzung zur logischen Implikation (mit ihren bekannten philosophischen Macken) einzuführen.

Als gemeinsame Basis für die Systeme **S1** bis **S3** verwenden wir die, von E. Lemmon eingeführte, alternative Ableitungsregel

(R5) $\phi \,/\, \Box\phi$, falls ϕ eine L_A-Tautologie oder ein Axiom ist.

Wir leiten hier also nicht *jedes* modallogische Theorem ab, sondern nur die aussagenlogischen Tautologien plus die Axiome des modalen Kalküls. (R5) garantiert somit, dass auch in einer darauf aufbauenden nicht-normalen Modallogik alle klassischen Tautologien enthalten sind, indem der Modus Ponens hier nur für den modalen Teil der Sprache nicht gilt.

Wir betrachten nun die zusätzlichen Axiome:

1 $(\phi \prec \psi \wedge \psi \prec \chi) \rightarrow (\phi \prec \chi)$
2 $\Diamond(\phi \wedge \psi) \prec \Diamond\phi$
3 $(\phi \prec \psi) \prec (\neg\Diamond\phi \prec \neg\Diamond\psi)$
4' $\Box\phi \prec \Box\Box\phi$
E' $\Diamond\phi \prec \Box\Diamond\phi$

Man beachte, dass $\prec$ hier immer mittels der Formel $\Box(\phi \rightarrow \psi)$ definiert ist. Gegeben diese Festsetzungen erhält man **S1**, indem man zu der Regel (R5) das Axiom **1** und das Axiom **T** ($\Box\phi \rightarrow \phi$) hinzufügt, usw.:

S1 = (R5) + **T** + **1**
S2 = **S1** + **2**
S3 = **S1** + **3**
S4 = **S1** + **4'**
S5 = **S1** + **E'**

Es könnte schwer sein, schlagende Argumente dafür zu finden, warum man die strikte Implikation ausgerechnet in einem der Systeme **S1** bis **S5** implementieren soll. Hilfreich ist dabei mit Sicherheit die modelltheoretische Interpretation. Es wäre also günstig, auch für die nicht-normalen Logiken **S1** bis **S3** eine solche zu haben.

Klar ist jedoch, dass wir in diesem Fall Notwendigkeit nicht in der üblichen Weise, anhand von modalen Strukturen definieren können. Die Definition

$$\mathfrak{A} \models \Box\phi \quad \text{gdw} \quad \text{für jedes } \mathfrak{A}' \in \mathcal{W} \text{ mit } R(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') \text{ gilt } \mathfrak{A}' \models \phi.$$

impliziert nämlich, dass, egal wie die Relation R definiert wird, eine Aussage, die in allen Strukturen erfüllt ist, auch notwendig ist, es muss also jedenfalls die für die normalen Logiken konstitutive Regel (R4) gelten. Folglich müssen wir für nicht-normale Modallogiken einen ganz anderen semantischen Formalismus finden. Wir präsentieren ein Beispiel, das zumindest die semantische Spezifikation der Kalküle **S2** und **S3** ermöglicht.[5]

*4.3.5 *Nicht-normale Welten*

S2 und **S3** sind Logiken, die mit dem Axiom

M $\quad \Diamond\Diamond\phi$

kompatibel sind. Wenn dieses Axiom gilt (in einer möglichen Erweiterung von **S2** oder **S3**), so bedeutet das, semantisch gesehen, dass jede Formel in irgendeiner möglichen Welt möglich sein muss, selbst solche Formeln wie $p \wedge \neg p$ etc. Eine Möglichkeit, dies sicher zu stellen, ohne dass man mögliche Welten einführen muss, in denen kontradiktorische Formeln wahr sind, liegt in den sogenannten *nicht-normalen Welten*. Wir bezeichnen eine Struktur $\mathfrak{A}$ als nicht-normale Welt, wenn in ihr die modalen Formeln so semantisch interpretiert sind, dass für alle ϕ gilt:

$\Diamond\phi$ ist wahr.
$\Box\phi$ ist falsch.

In einer nicht-normalen Welt ist also alles möglich und nichts notwendig. Dieses Konzept wird folgendermaßen in eine modale Semantik integriert:

Eine *nicht-normale modale Struktur* oder N-M-Struktur $(\mathcal{W}, R, N)$ basiert auf einer Menge von Strukturen $\mathcal{W}$ und einer Relation R über $\mathcal{W}$. $N \subseteq W$ ist die Menge der normalen Welten aus $\mathcal{W}$. Außerdem gilt:

(1) $\quad R$ ist reflexiv in N, das heißt es gilt $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}$, für alle $\mathfrak{A} \in N$.

[5] Zu **S1** vgl. die Hinweise in (Hughes & Cresswell, 1996, S. 230, Fn 13).

(2) Für jedes $\mathfrak{A} \in \mathcal{W}$ existiert ein $\mathfrak{A}' \in N$ mit $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}'$.

Nun muss die Definition für $\Box\phi$ entsprechend modifiziert werden:

$$\mathfrak{A} \vDash \Box\phi \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A} \in N \text{ und für jedes } \mathfrak{A}' \in \mathcal{W} \text{ mit } R(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') \text{ gilt } \mathfrak{A}' \vDash \phi.$$

Wenn $\mathfrak{A}$ nicht-normal ist, so ist $\Box\phi$, gemäß dieser Definition, stets falsch und folglich $\Diamond\phi$ wahr.

Eine $L_{A\Box}$-Formel ist **L**-gültig, wenn sie in allen N-M-Strukturen der Klasse **L** gültig ist. **S2** erhalten wir, indem wir **L** als die Klasse aller N-M-Strukturen ansetzen in denen $\mathcal{W} \cup N \neq \emptyset$ gilt, die also mindestens eine nicht-normale Welt beinhalten. **S3** resultiert aus der Klasse aller transitiven nicht-normalen modalen Strukturen mit dieser Grundeigenschaft. (Vollständigkeitsbeweise für beide Logiken existieren.)

Nicht-normale Welten sind *eine* mögliche Strategie, wie man Logiken definieren kann, die schwächer sind als **K**. Was alle derartigen semantischen Spezifikationen gemein haben müssen ist aber, dass sie den Fall vorsehen müssen wo Formeln, die in dem spezifizierten Kalkül Theoreme darstellen, dennoch nicht notwendig sind. Dadurch, dass in nicht-normalen Welten *keine* Formel notwendig wahr ist, bieten sie offensichtlich einen sehr flexiblen Formalismus dieser Art. Man könnte hier also insbesondere auch solche Formalismen ausarbeiten, die epistemische Situationen implementieren, in denen selbst logische Tautologien (L_A-Tautologien) nicht notwendig wahr sind.

Wichtig ist auch, zu sehen, dass nicht-normale modale Strukturen eine direkte *Verallgemeinerung* des Konzepts der modalen Struktur darstellen. Eine N-M-Struktur $(\mathcal{W}, R, N)$, wo $N = \mathcal{W}$ gilt, ist eine ganz gewöhnliche modale Struktur und die Klasse aller solcher Strukturen liefert nichts anderes als **K**.

4.4 Parakonsistente Logik I

Eines der wichtigsten (aber auch umstrittensten) Motive für nichtklassische Logik ist *Parakonsistenz*, also die Idee dass

(E) $\quad \bot \,/\, \phi$

in einer Logik für einige Aussagen *nicht* gelten könnte. Eine Logik, in der (E) gilt nennt man *explosiv*, weil in ihr inkonsistente Prämissensysteme zur „Explosion“ der Logik führen: sie implizieren alles. In einer Logik wie der klassischen Logik, die (E) erfüllt, kann somit eine inkonsistente Axiomatisierung niemals nichttriviale Folgerungen haben.

Ein Motiv für nicht-explosive und also parakonsistente Logiken könnte damit sein, dass „schlampige“ Prämissenmengen auch nicht-triviale Folgerung ermöglichen sollten. Ein weiteres Motiv ist die Annahme, dass es widersprüchliche

Aussagen der Form

$$\phi \wedge \neg\phi$$

gibt, die unter bestimmten Umständen wahr sein können. Beispielsweise treten solche Situationen bei „ambivalenten“ Gefühlen auf oder auch im Fall der *bedeutungsvollen Widersprüche*, die im Zentrum von Hegels „Logik“ stehen.

Bei der Implementierung von Parakonsistenz gibt es unterschiedliche Strategien. Man kann eine mehrwertige Logik in diesem Sinn interpretieren (siehe Abschnitt 5.2.2) oder man sucht eine modale Herangehensweise. Wir präsentieren hier zunächst eine solche modale Konzeption für Parakonsistenz. Die Grundidee ist folgende: Zu jeder möglichen Welt $\mathfrak{A}$, die einen Kontext für Wahrheit von Formeln liefert, muss eine zweite mögliche Welt $\mathfrak{A}^*$ existieren, die Falschheit definiert (diese Funktion * bezeichnet man auch als „Routley-Stern“). Das heißt, man definiert *die Negation* $\sim$ nicht anhand von $\mathfrak{A}$, sondern anhand der „Falschheitswelt“ $\mathfrak{A}^*$:

$$\mathfrak{A} \models \sim\phi \quad \text{gdw} \quad \text{nicht } \mathfrak{A}^* \models \phi.$$

Gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$, so konvergiert diese Definition mit der der klassischen Negation. Ansonsten erhalten wir einige Formeln ϕ, für die sowohl ϕ als auch $\sim\phi$ gelten und damit

$$\phi \wedge \sim\phi.$$

Außerdem soll stets $\mathfrak{A}^{**} = \mathfrak{A}$ gelten. Wir erhalten so das Axiom

$$\textbf{(NE)} \quad \phi \leftrightarrow \sim\sim\phi.$$

Augenscheinlich weist in diesem Setting die mögliche Welt $\mathfrak{A}$ *die positiven Wahrheitsbedingungen* zu, die Welt $\mathfrak{A}^*$ hingegen *die negativen*. So kann man die Junktoren $\wedge$ und $\vee$ problemlos klassisch via $\mathfrak{A}$ definieren, die Negation wird anhand von $\mathfrak{A}^*$ redefiniert. Wie aber sieht es in diesem Umfeld mit der Implikation aus? Einer der Gründe für die formale Kompliziertheit der Implikation ist ja augenfällig der, dass es sich hier um eine Mischung aus positiven und negativen Wahrheitsbedingungen handelt. Wir haben

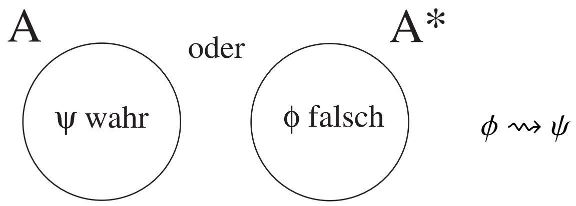
$$\phi \rightarrow \psi \quad \text{gdw} \quad \neg(\phi \wedge \neg\psi) \quad \text{gdw} \quad \neg\phi \vee \psi.$$

Glücklicher Weise konvergieren diese Spezifikationen auch im Fall der parakonsistenten Negation (wegen $\mathfrak{A}^{**} = \mathfrak{A}$). Wir haben:

$$\sim(\phi \wedge \sim\psi) \quad \text{gdw} \quad \sim\phi \vee \psi \quad \text{usw.}$$

Somit können wir eine parakonsistente Implikation definieren:

$$\phi \rightsquigarrow \psi := \sim(\phi \wedge \sim\psi).$$



Es spricht manches dafür, diesen Ansatz der parakonsistenten Logik mit obigem Ansatz der Relevanzlogik zu verknüpfen. Im Fall von $\sim$ wird *Falschheit* im Rahmen einer diese spezifizierenden eigenen Welt definiert. Zwar erhalten wir so in natürlicher Weise die Implikation $\rightsquigarrow$, aber man kann parallel dazu die Auffassung vertreten, dass auch die Implikation (sozusagen als zweiter „nicht positiver" Junktor) im Rahmen eines Settings von eigenen möglichen Welten spezifiziert werden sollte und also als Relevanzimplikation, die auf möglichen Welten basiert, die die Voraussetzungs- und die Folgerungsbedingungen festlegen. $\sim$ und $\Rightarrow$ werden, aufgrund dieses Zusammenhangs, oft miteinander kombiniert.

Wir führen hier keinen Kalkül für die parakonsistente Logik ein sondern weisen auf folgende Möglichkeit hin, die modale parakonsistente Logik mit Routley-Stern *als normale Modallogik* aufzufassen:

$\sim\phi$ bedeutet, wie oben ausgeführt, nichts anderes als dass die Formel ϕ in der durch $*$ bestimmten möglichen Welt falsch ist. Wir können daher $\sim$ auch explizit definieren, anhand des Operators $\Box$ einer normalen Modallogik:

$$\sim\phi := \Box\neg\phi.$$

Den Fall des Routley-Sterns erhalten wir als den Sonderfall von $\Box$, wo die Vergleichbarkeitsrelation R als Funktion definiert ist.[6] Das Axiom, das diesen Spezialfall der Vergleichbarkeitsrelation als Funktion generiert, ist:

$$(\mathbf{FU}) \quad \Diamond\phi \leftrightarrow \Box\phi.$$

Ein Kalkül der parakonsistenten Logik **P** setzt sich also aus den Regeln und Axiomen der normalen Modallogik plus die Axiome **FU** und **NE** zusammen.

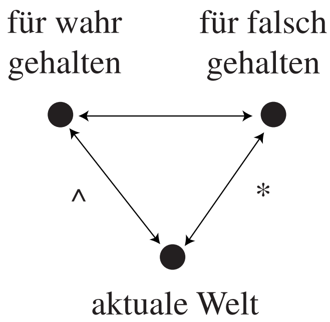
Parakonsistente epistemische Logik Ist $\sim$ „nur" ein modaler Operator? – Die Antwort ist im Grunde: ja. – Wir hatten von Vornherein ja $\sim$ nicht als Alternative zum Junktor $\neg$ eingeführt sondern bloß als modallogische Ergänzung. Den Fall einer parakonsistenten Logik, die tatsächlich die klassische Logik uminterpretiert und die Negation $\neg$ so definiert, dass sie Explosion vermeidet, werden wir unten, in Abschnitt 5.2.2, diskutieren. Eine solche Logik wäre maßgeschneidert für den Fall wo bestimmte Aussagen tatsächlich wahr und falsch gleichzeitig *sind*. Im Unterschied dazu scheint die parakonsistente Logik mit Routley-Stern

[6] Funktionen sind Spezialfälle von Relationen! – Siehe oben, S. 13.

aber eigentlich nur eine zusätzliche Situation zur der *aktualen Welt* $\mathfrak{A}$ zu konstruieren, in der jede Formel ganz klassisch entweder wahr oder falsch ist (und nicht beides). Dies benützend skizzieren wir die folgende *parakonsistente epistemische Logik*.

Diese epistemische Logik enthält zwei unterschiedliche *Glaubensoperatoren* W und F, einen für das *Für-wahr-Halten* und einen für das *Für-falsch-Halten* (Sprache: $L_{A_{WF}}$ mit zwei modalen Operatoren W und F). Diese beiden Operatoren sind als zwei voneinander unabhängige Operatoren der normalen Modallogik definiert. Diese Logik könnte **S5** sein oder die Logik mit dem Axiom (FU) oder eine andere normale Modallogik. Wir legen uns hier aber auf den Spezialfall fest, wo die beiden Vergleichbarkeitsrelationen von W und F Funktionen $\hat{}$ und * sind, für die gilt:

$\mathfrak{A}^{\hat{}\hat{}} = \mathfrak{A}$
$\mathfrak{A}^{**} = \mathfrak{A}$
$\mathfrak{A}^{\hat{}*} = \mathfrak{A}^*$
$\mathfrak{A}^{*\hat{}} = \mathfrak{A}^{\hat{}}$



Die Definitionen für W und F lauten:

$\mathfrak{A} \models W\phi$ gdw $\mathfrak{A}^{\hat{}} \models \phi$
$\mathfrak{A} \models F\phi$ gdw $\mathfrak{A}^* \models \neg\phi$

In dieser Logik gilt es dann zu unterscheiden zwischen dem Für-wahr-Halten der Falschheit einer Aussage

$W\neg\phi$

und dem Für-falsch-Halten einer Aussage

$F\phi$.

Motiv: wir vergeben durch W und F die Etiketten „wahr“ und „falsch“, für beliebige Aussagen. Inkonsistenz und Unentschiedenheit sind dann bloß die Resultate dieser Etikettenvergabe (manche Aussagen erhalten beide Etiketten, manche gar keines).

Die beiden Aussagen $W\neg\phi$ und $F\phi$ haben genau dann die selben Wahrheitswerte, wenn ϕ sowohl in der durch $\hat{}$ als auch in der durch * spezifizierten möglichen Welt falsch ist. Eine klassische Glaubenslogik resultiert also genau dann wenn $\hat{}$ und * identisch sind. Es kann aber hier Fälle geben, wo mit der klassischen Glaubenslogik unvereinbare Situationen entstehen, indem der logische Agent eine Aussage gleichzeitig für wahr und falsch hält, wo also

$$W\phi \wedge F\phi$$

gilt. Außerdem kann es (ebenso mit der klassischen epistemischen Logik unvereinbare) Fälle geben, wo der logische Agent eine Aussage weder für wahr noch für falsch hält:

$$\neg(W\phi \vee F\phi)$$

Die Logik integriert also Ausdruckselemente einer partiellen Logik (im Sinne von Abschnitt 5.2.1) und einer parakonsistenten Logik, auf der Ebene einer epistemischen Logik, die, außerhalb der modalen Kontexte, ganz und gar klassisch funktioniert.

Natürlich können wir, in dieser Logik, auch alle anderen klassischen Junktoren redefinieren. W ist hier ja so etwas wie ein epistemischer positiver Behauptungsjunktor, vergleichbar des von Gottlob Frege eingeführten Behauptungsstriches.[7] F dagegen ist das epistemische Gegenstück zur Negation. Die Konjunktion definieren wir einfach explizit als $W\phi \wedge W\psi$, die Disjunktion als $W\phi \vee W\psi$. Für die Implikation redefinieren wir den Operator $\rightsquigarrow$, ganz im Stil von obiger Spezifikation:

$$\phi \rightsquigarrow \psi := W\psi \vee F\phi.$$

Wegen der axiomatischen Festsetzungen für die Funktionen $\hat{}$ und * erhalten wir auch hier die elementare Äquivalenzbeziehung der Aussagenlogik

$$(\phi \rightsquigarrow \psi) \leftrightarrow F(W\phi \wedge F\psi).$$

Ein Kalkül für die parakonsistente epistemische Logik **PE** enthält die Regeln und Axiome der normalen Modallogik (diese Regeln müssen im Fall von F entsprechend modifiziert werden) plus die folgenden Axiome:

$$\neg W\neg\phi \leftrightarrow W\phi$$
$$\neg F\neg\phi \leftrightarrow F\phi$$

[7] Vgl. Frege (1988 [1879]).

$FF\phi \leftrightarrow \phi$
$WW\phi \leftrightarrow \phi$
$FW\phi \leftrightarrow \neg W\phi$
$WF\phi \leftrightarrow F\phi$

Aufgabe: Überlege die Korrektheit dieser Axiome, anhand des Diagramms auf S. 100.

Die parakonsistente epistemische Logik **PE** wird standardmäßig auf das Konzept des Glaubens (mit der Möglichkeit inkonsistenter und lückenhafter Annahmen) bezogen. Eine Erweiterung zu einer Wissenslogik **PET** ist grundsätzlich zwar möglich, indem man die folgenden Axiome hinzufügt:

$W\phi \rightarrow \phi$
$F\phi \rightarrow \neg\phi$

Allerdings würden diese Axiome semantisch bedeuten, dass die Relationen $\hat{}$ und * reflexiv sein müssen, was in diesem Fall aber eine Trivialisierung bedeuten würde, da es sich, gemäß unserer Annahme, um *Funktionen* handelt, die nur dann reflexiv sind, wenn $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\hat{} = \mathfrak{A}$ gilt. Eine nichttriviale Wissenslogik müsste demnach so konzipiert werden, dass sie $\hat{}$ und * nicht auf Funktionen restringiert. Diesen Fall wollen wir hier aber nicht weiter diskutieren.

4.5 Quantifizierte Modallogik

Bislang haben wir modale Logiken ausschließlich im Bereich der Aussagenlogik als Grundsprache diskutiert. In diesem Abschnitt setzen wir als Grundsprache statt der Aussagenlogik eine „quantifizierten" Logik an, also eine Prädikatenlogik. Es tut dabei grundsätzlich wenig zur Sache, ob es sich um die Prädikatenlogik erster Stufe handelt oder eine Sprache höherer Stufe (allerdings erweisen sich Sprachen, die λ-Abstraktionen und ι-Operatoren beinhalten, gerade im Kontext der Modallogik als ausgesprochen nützlich). Wenn wir behutsam genug vorgehen, dann sollten sich alle diese Sprachen in ganz analoger Weise in ein modales Umfeld integrieren lassen. Insbesondere sollten die spezifischen Probleme, die sich im Rahmen der quantifizierten Modallogik stellen, bei all diesen Varianten die selben sein.

Eine Grunddomäne für alle möglichen Welten Das erste Problem, das wir zu klären haben, wenn wir eine Modallogik auf einer quantifizierten Grundsprache aufbauen wollen, ist die Frage, aus welchem Vorrat von Objekten jeweils die Domäne einer „möglichen Welt" stammt. Rein formal sind hier ein paar sehr unterschiedliche Varianten denkbar:

(1) Die brutale Variante. Man betrachtet als mögliche Welt einfach eine beliebige Struktur einer Prädikatenlogik, sodass jede mögliche Welt eine eigene Domäne besitzt. Quantifizieren ist dann natürlich jeweils nur über diese Domäne möglich.

(2) Die restriktive Variante. Man fixiert in einer modalen Struktur eine Domäne, die allen in ihr enthaltenen Strukturen zugrunde liegen muss. Damit quantifiziert man in allen möglichen Welten über die selbe Domäne.

(3) Die flexible Variante. Man fixiert in einer modalen Struktur eine Grunddomäne und weist dann jeder in ihr enthaltenen Struktur eine Teilmenge dieser Grunddomäne als Domäne zu. Damit kann man sowohl über die Grunddomäne (also über alle in irgendeiner möglichen Welt enthaltenen Objekte) quantifizieren als auch über die jeweilige Domäne einer möglichen Welt.

Gegen die brutale Variante spricht eindeutig, dass sie zwar insofern nominell die ausdrucksstärkste ist, als die Domänen von beliebigen Mengen gebildet werden können (kann die Gesamtheit der möglichen Welten einer modalen Struktur auch „klassenartig" sein, dann können wir eine solche geradezu über allen Strukturen einer Prädikatenlogik aufbauen!). Diesen metamathematischen Vorteil bezahlt man aber durch den extremen Nachteil, dass man niemals in der Lage ist, über die ontologische Hutkrempe einer möglichen Welt hinaus zu blicken. Man kann keine Aussagen machen, über Objekte, die nicht in dieser Welt enthalten sind und beraubt sich damit einer für modale Formalismen geradezu fundamentalen Ausdrucksmöglichkeit.

Die flexible Variante ist genau aus diesem Grund die bessere Wahl. Sie restringiert zwar eine modale Struktur auf alle Strukturen der Grundsprache, deren Domäne eine Teilmenge der in der modalen Struktur festgesetzten Grunddomäne ist – die modale Struktur kann also nicht alle Strukturen der Grundsprache erfassen. Aber man gewinnt dafür die Möglichkeit stets *über alle möglichen Objekte* einer Menge von möglichen Welten zu quantifizieren. Da außerdem die restriktive Variante nichts weiter ist als ein Spezialfall der flexiblen Variante wählen wir diese Option.

Um die flexible bzw. die restriktive Variante einer Modallogik realisieren zu können müssen wir eine modale Struktur immer so definieren, dass sie zusätzlich eine Grunddomäne D festsetzt und wir müssen sicher stellen, dass die Domäne jeder möglichen Welt der Struktur eine Teilmenge von D bildet. Diese Strategie gilt für normale Modallogiken, genauso wie für alle anderen oben diskutierten modalen Varianten.

Sei M das Merkmal „ist der derzeitige österreichische Fußballmeister" und s die (starre) Individuenkonstante, die den FC Red Bull Salzburg bezeichnet. Dann betrachten wir folgende Formel:

$$\forall x.M(x) \to \Box x = \downarrow s.$$

Ist diese Formel wahr oder falsch? In einer klassisch-extensionalen Interpretation muss sie wahr sein, weil hier M immer dasjenige Objekt herauspickt, das heuer österreichischer Fußballmeister ist, also der FC Red Bull Salzburg, daher gilt $\Box x = \downarrow s$. Verwenden wir aber anstelle einer extensionalen Variable x die intensionale Variable i, dann erhalten wir die falsche Formel

$$\forall i.M(\downarrow i) \rightarrow \Box(\downarrow i = \downarrow s).$$

Hier erhalten wir mit $M(\downarrow i)$ zwar erneut der FC Red-Bull-Salzburg, aber wir erhalten auch alle anderen österreichischen Fußballmeister, die (mit Ausnahme von Austria Salzburg?) in keiner möglichen Welt identisch mit Red Bull Salzburg sind.

Syntax und Semantik Gegeben eine Menge D nennen wir eine D-Struktur eine Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}(0) \subseteq D$. Bei der Definition der Semantik einer D-Struktur $\mathfrak{A}$ erweitern wir die Menge der Konstanten des Typs 0 jeweils nicht bloß um $\mathfrak{A}(0)$, sondern um die gesamte Menge D wobei wir für jedes c, das in D enthalten ist, nicht aber in $\mathfrak{A}(0)$, stets $\mathfrak{A}(c) := \mathtt{NULL}$ setzen. So erreichen wir, dass wir mit $\forall$ stets über die gesamte Menge D quantifizieren, mit $\forall^{\mathsf{E}}$ hingegen nur über die Menge $\mathfrak{A}(0)$.

Auf dieser Grundlage ist eine *modale Struktur* $(\mathcal{W}, D, R)$ definiert als eine Menge D plus eine Menge $\mathcal{W}$ von D-Strukturen und eine Vergleichbarkeitsrelation R über $\mathcal{W}$.

Die Definitionen der Semantik setzen sich zusammen aus den aus $L_{P_t\mathfrak{I}}$ bekannten Spezifikationen plus der üblichen Definition von $\Box\phi$.

Gültigkeit und Deduktion Wie im Fall der modalen Aussagenlogik definieren wir auch hier den Begriff der **L**-Gültigkeit einer Formel als Gültigkeit in einer Klasse **L** von modalen Strukturen.

Ein Kalkül für die Klasse aller modalen P-Strukturen **P** wird natürlich die eine normale modale Aussagenlogik konstituierenden Regeln (R1) bis (R4) sowie die Axiome (A1) bis (A3) und **K** beinhalten. Die Frage ist aber, wie man hier mit den hinzu kommenden logischen Bestandteilen – Quantoren, Identität etc. – umgeht. Und diese Frage ist alles andere als einfach zu beantworten. Beispielsweise kann

$$\text{(A4)} \quad \forall x\phi \rightarrow \phi[t/x]$$

hier kein Axiom sein: die Logik ist nicht substitutiv. Wir zeigen dies anhand der Formel

$$\forall x.\mathsf{E}(x) \rightarrow \exists y\Box x = y,$$

die offensichtlich ein Theorem ist: x und y müssen nur in der aktualen Welt auf das selbe Ding referieren, dann referieren sie in jeder möglichen Welt entweder auf dieses Ding oder auf `NULL`, also gilt die Identität in jeder möglichen Welt. Aus (A4) erhalten wir dann aber, für eine beliebige Konstante c, die Formel

$$\mathsf{E}(\downarrow c) \to \exists y \Box \downarrow c = y,$$

die offensichtlich nicht gilt, da c ja in einigen möglichen Welten, gemäß unserer Definition, etwas ganz anderes bezeichnen kann als in der aktualen. – Natürlich kann man nun versuchen, das Fragment von $L_{P_\iota \lambda\iota\Box}$ zu finden, in dem auch die klassischen Regeln der Prädikatenlogik gelten bzw. neue Regeln zu finden, die in ganz $L_{P_\iota \lambda\iota\Box}$ korrekt sind, aber wir führen dies hier nicht im Detail aus. Stattdessen verweisen auf die einschlägige Literatur und illustrieren die prinzipiellen Zusammenhänge der quantifizierten Modallogik auf einer informellen Ebene:

4.5.1 Notwendigkeit de re *und* de dicto

Eine wichtige Klasse von modalen Strukturen ist die Klasse **Cons** der Strukturen mit konstanter Domäne, d. h.: in all diesen Strukturen gilt stets $\mathfrak{A}(\Delta) = D$, für jedes $\mathfrak{A} \in \mathcal{W}$. Haben wir eine konstante Domäne, dann existieren in allen möglichen Welten die selben Dinge (im extensionalen Sinn von E). Man kann dies so ausdrücken, dass die sogenannte Barcan-Formel

BF $\quad \forall^{\mathsf{E}} x.\Box\phi \to \Box\forall^{\mathsf{E}} x.\phi$

und auch ihre Umkehrung

CBF $\quad \Box\forall^{\mathsf{E}} x.\phi \to \forall^{\mathsf{E}} x.\Box\phi$

hier gelten.

Umgekehrt ist klar, dass weder die Barcan-Formel noch ihre Umkehrung gelten, sobald wir die Beschränkung auf modale Strukturen mit konstanter Domäne aufheben. (Achtung: wenn wir den Quantor $\forall$ statt $\forall^{\mathsf{E}}$ verwenden gelten beide Formeln auch hier!)

Beweis der Ungültigkeit der Barcan-Formel außerhalb von **Cons**: es sei eine modale Struktur gegeben, die zwei mögliche Welten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ enthält, von denen die erste nur ein Ding c enthält, das in beiden Welten die Eigenschaft P aufweist. Die zweite Welt enthält c und zusätzlich ein Ding d und es gilt, dass c in $\mathfrak{A}'$ die Eigenschaft P aufweist, nicht aber d. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \forall^{\mathsf{E}} x.\Box P(x)$ nicht aber $\mathfrak{A} \models \Box\forall^{\mathsf{E}} x.P(x)$. (Analoge Überlegungen für **CBF**.) Dass umgekehrt die Barcan-Formel und ihre Umkehrung in **Cons** gelten sieht man daran, dass dort Quantifikation in allen möglichen Welten immer die selben Dinge heranzieht.

Die Barcan-Formel weist auf einen fundamentalen Unterschied hin, der so nur in der quantifizierten Modallogik zu finden ist, nämlich dass es bei der Quantifikation darauf ankommt, ob man ein Individuum im aktualen oder im modalen Kontext herauspickt. Betrachten wir das berühmte Beispiel

(AP) Die Anzahl der Planeten ist notwendiger Weise ungerade.

Dieser Satz ist offensichtlich *wahr*, wenn in einer möglichen Welt die Anzahl der Planeten ungerade ist und wir den Satz *so interpretieren*, dass er meint, dass diese Zahl notwendiger Weise ungerade ist. Ist P ein Prädikat, das die Anzahl der Planeten bezeichnet und U das Prädikat „ist ungerade“, so können wir diese Interpretation von (AP) formalisieren als:

(DR) $[\lambda x.\Box U(x)](\iota x.P(x))$.

Im Unterschied dazu erhalten wir aber den Satz

(DD) $\Box[\lambda x.U(x)](\iota x.P(x))$

der offensichtlich *falsch* ist, weil er besagt, dass in jeder möglichen Welt die dortige Anzahl der Planeten ungerade ist. Sobald es eine mögliche Welt gibt, wo die Anzahl der Planeten gerade ist, ist der zweite Satz falsch, während für den ersten, um wahr zu sein, nur in der aktualen Welt die Anzahl der Planeten ungerade sein muss – notwendig ist in dem ersten Fall nur die Ungeradheit dieser Zahl (und die ist eine mathematische Tatsache).

Man kann diese beiden Sätze etwas formaler auch so lesen:

(DR) hat die Form „dasjenige x, für das notwendiger Weise ϕ gilt“, drückt also eine Notwendigkeit *de re* aus.
(DD) hat die Form „es gilt notwendiger Weise, dass ϕ“, drückt also eine Notwendigkeit *de dicto* aus.

Notwendigkeit *de re* ist eine Notwendigkeitsaussage, die wir einem Ding zuschreiben, Notwendigkeit *de dicto* ist Notwendigkeit schlechthin, nicht auf ein bestimmtes Ding oder eine Klasse von Dingen bezogen.

Aufgabe: versuche die Aussage „Alle Menschen sind notwendiger Weise vor 2011 geboren“ zu formalisieren. Wie äußert sich hier die Unterscheidung zwischen *de re* und *de dicto*? Welche der möglichen Formalisierungen ist wahr, welche falsch?

4.5.2 Identität, Referenz und Existenz

Da wir Identität extensional definieren erhalten wir folgendes Theorem:

$$\forall^{\mathsf{E}} x, y : x = y \rightarrow \Box x = y.$$

Zwar kann das von x und y bezeichnete Objekt in einigen möglichen Welten kein Teil der Domäne dieser Welt sein (also: $\neg\mathsf{E}(x)$), aber dann gilt ebenfalls die Identität wegen `NULL` = `NULL`. Quantifiziert man hingegen über alle möglichen Objekte, so ist die Situation eine andere:

$$\forall x, y : x = y \rightarrow \Box x = y$$

ist *kein* Theorem, da im Fall von $\neg\mathsf{E}(x)$ und $\neg\mathsf{E}(y)$ automatisch $x = y$ gilt, was nicht bedeutet, dass sich x und y auf das selbe Element aus D beziehen. Ebenso gilt die Formel

$$\downarrow c = \downarrow d \rightarrow \Box\downarrow c = \downarrow d$$

im Allgemeinen nicht, da ja c und d in unterschiedlichen möglichen Welten unterschiedliche Dinge bezeichnen können! Analog ist die Formel

$$\iota x.M(x) = \iota y.A(y) \rightarrow \Box\iota x.M(x) = \iota y.A(y)$$

kein Theorem. – Wenn wir annehmen, dass M die Eigenschaft „ist der Morgenstern" ausdrückt und A die Eigenschaft „ist der Abendstern", dann können wir aus der Identität $\iota x.M(x) = \iota y.A(y)$ nicht folgern, dass diese Identität in allen möglichen Welten gilt, da rein formal gesehen diese Terme in unterschiedlichen Strukturen natürlich ganz unterschiedliche Dinge bezeichnen können. Notwendige Identität konvergiert also nicht mit kontingenter Identität.

Für diese Konstellation spricht, dass es in natürlichen Sprachen Namen gibt, die kontextabhängige Referenz besitzen. Beispiele: der gegenwärtige König von Frankreich, der Dirigent des Neujahrskonzertes. Allerdings sollte es auch möglich sein, mit solchen Namen zu hantieren, die diese Kontextabhängigkeit nicht aufweisen. Solche Namen hat Saul Kripke *starre Designatoren* genannt, weil sie in allen möglichen Welten das selbe Ding bezeichnen (gewöhnliche Eigennamen sollten normaler Weise diese Eigenschaft besitzen). Ist n irgendein intensionaler Term der ersten Stufe, der keine freie Variable enthält (also entweder eine Individuenkonstante oder eine definite Deskription), dann definieren wir *Starrheit* σ als

$$\sigma(n) := \exists x : \Box x = \downarrow n.$$

Mit **Rig** bezeichnen wir insbesondere die Klasse der modalen Strukturen in denen alle Individuenkonstanten der ersten Stufe starr sind. In **Rig** gilt somit, für alle Individuenkonstanten c, d:

$$\textbf{R} \quad \downarrow c = \downarrow d \rightarrow \Box\downarrow c = \downarrow d.$$

In dieser Konstellation haben wir zwar immer noch nicht-starre Designatoren, in der Gestalt von definiten Deskriptionen $\iota x.\phi$, aber wir können auch auf dieser allgemeineren Ebene Starrheit gewährleisten, indem wir den starren ι-Operator $\mathring{\iota}$ definieren als:

$$\mathring{\iota}x.\phi := \iota y.(\Box y = \iota x.\phi).$$

Man beachte auch, dass nicht-referierende Namen starr sein können, wenn sie nämlich *nie* referieren. Ist K das Prädikat „die runde viereckige Kuppel der

Karls-Kirche“, dann erhält man mit $\iota x.K(x)$ einen solchen Namen. Weiters resultiert aus jedem nie referierenden n der starre Name $\mathring{\iota}x.x = {\downarrow}n$ (der starr ist, weil er nie referiert). All diese Namen referieren dann eben, so die sicher nicht ganz sinnlose Interpretation, „starr auf nichts“. (Natürlich kann man jederzeit feststellen, ob ein starr referierender Name n in diesem Sinn *trivial* ist, indem man $\mathsf{E}({\downarrow}n)$ überprüft.)

*4.6 *Dynamische Logik*

Dynamische Logik ist eine spezielle Form von Zeitlogik, die versucht die Vorgänge in einem Computerprogramm zu beschreiben und die auch als eine *Logik des Handelns* interpretiert werden kann. Das *nichtlogische Vokabular* dieser Logik besteht aus zwei Dingen:

eine Menge A von atomaren Formeln $p, p', \ldots$
eine Menge Π von atomaren Programmen $\pi, \pi', \ldots$

Atomare Programme (wir denken dabei an einzelne Programmier*befehle*, die im Rahmen der Logik nicht näher erläutert werden) können zu komplexen Programmen zusammengesetzt werden, genau so wie atomare Formeln zu komplexen Formeln kombiniert werden. Die beiden Bestandteile der Logik hängen insbesondere in Formeln der Form

$$[\alpha]\phi$$

zusammen, die ausdrücken, dass ϕ *nach dem Ende des Programms* α *gilt*. Die Syntax der Logik L_D ist also zweigeteilt. Wir definieren zunächst die *Formeln*:

$$\phi ::= \; p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid [\alpha]\phi.$$

Hier steht p für atomare Formeln und α für *Programme*, die wiederum auf folgende Weise definiert sind:

$$\alpha ::= \; \pi \mid \alpha;\alpha \mid \alpha \cup \alpha \mid \alpha^* \mid \phi?.$$

Hier steht π für atomare Programme und ϕ für Formeln. Die intendierten Bedeutungen dieser Programmkonstruktionen sind:

$\alpha;\alpha'$	Führe die Programme α und α' hintereinander aus.
$\alpha \cup \alpha'$	Führe α und α' unabhängig voneinander aus.
α^*	Wiederhole α endlich oft.
$\phi?$	Teste ϕ. Falls ϕ gilt, setze fort, sonst Absturz.

Daraus ergibt sich die Möglichkeit unter anderem folgende übliche Konstruktionen in Programmen zu definieren:

if ϕ then α else β $(\phi?;\alpha) \cup (\neg\phi?;\beta)$
while ϕ do α $(\phi?;\alpha)^*;\neg\phi?$

Eine *modale D-Struktur* $(\mathcal{W}, \{R_\alpha \mid \alpha \text{ ist ein Programm}\})$ besteht aus einer Menge $\mathcal{W}$ von L_A-Strukturen plus einer Menge von Relationen über $\mathcal{W}$, wobei für jedes Programm α genau eine solche Relation R_α definiert ist. Diese Funktion soll anschaulich den Zustand des Systems am Ende von α bestimmen. Es soll daher stets gelten:

$$R_{\alpha;\alpha'} = \{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') \mid \exists\mathfrak{A}'' : \mathfrak{A}R_\alpha\mathfrak{A}'' \wedge \mathfrak{A}''R_{\alpha'}\mathfrak{A}'\}$$
$$R_{\alpha\cup\alpha'} = R_\alpha \cup R_{\alpha'}$$
$$R_{\alpha^*} = R_X,\ \text{mit } X = (\alpha;\alpha;\ldots;\alpha) \text{ in passender Länge}$$
$$R_{\phi?} = \{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \vDash \phi\}$$

Wir definieren die Semantik für Aussagenkonstanten, $\neg$ und $\wedge$ in der üblichen Weise. Außerdem definieren wir:

$$\mathfrak{A} \vDash [\alpha]\phi \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A}' \vDash \phi, \ \text{für alle } \mathfrak{A}' \text{ mit } \mathfrak{A}R_\alpha\mathfrak{A}'.$$

Philosophisch interessant ist diese Logik vor allem deshalb, weil die in ihr vorkommenden „Programme" als *Aktionen* eines beliebigen „Agenten" interpretiert werden können. Dynamische Logik ist also eine mögliche Spielart einer „Logik des Handelns". Eine Handlung α führt jeweils dazu, dass eine andere Situation geschaffen wird. Diese Situation wird durch $[\alpha]$ repräsentiert. $[\alpha]\phi$ bedeutet dann, dass ϕ in der durch α geschaffenen Situation der Fall ist.

*4.7 *Hybride Logik*

Hybride Modallogiken sind Logiken, die die metasprachliche Maschinerie eines Quantifizierens über semantische Interpretationen auf die Ebene der Objektsprache verlagern, indem sie in dieser selbst bereits ein Quantifizieren über semantische Interpretationen ermöglichen.

Rein formal betrachtet ist die modelltheoretische Modallogik ja eine Spielart von Prädikatenlogik erster Stufe! Denn: wir quantifizieren hier über die semantischen Interpretationen einer Grundsprache und definieren Modaloperatoren anhand von Eigenschaften, die wir mittels eines solchen Quantifizierens auf der Meta-Ebene beschreiben können, im Stil von: „ϕ ist notwendiger Weise wahr, wenn ϕ in allen mit der aktualen semantischen Interpretation in einer Relation R vergleichbaren semantischen Interpretationen erfüllt ist."

Anders als in der Prädikatenlogik erster Stufe kommen aber die Sprachelemente der Quantifikation, also die Vergleichbarkeitsrelationen, die an semantische Interpretationen gebundenen Variablen und Quantoren, in der klassischen

Herangehensweise an die Modallogik, nicht *in der Objektsprache* vor. Die Objektsprache selbst enthält nur die *modalen Operatoren*, die gewissermaßen die in der Metasprache vorgenommenen Spezifikationen des Quantifizierens über semantische Interpretationen „kapseln“.

Diese Strategie des „Versteckens“ modaler Spezifikationen in der Metasprache hat sicher zunächst einmal historische Gründe: die Idee modaler Operatoren existierte bereits Jahrzehnte vor der Entwicklung der modelltheoretischen Interpretation dieser Operatoren. Ein gewisser Vorteil besteht vielleicht auch darin, dass die Spezifikation der Grundsprache nur wenig geändert werden muss, um eine modale Sprache zu erhalten. Umgekehrt aber führt gerade diese Einfachheit auf der Ebene der Sprachspezifikation zu einer tendenziell unangenehmen Kompliziertheit auf der Ebene der Metasprache. Während im Fall der klassischen Logik die Metasprache stets nur sehr elementare Intuitionen illustriert, die in irgendeiner Form bereits in der syntaktischen Spezifikation einer Sprache mit gedacht werden – Junktoren werden anhand von Wahrheitstafeln „normiert“, atomare Formeln werden in einer semantischen Interpretation als wahr oder falsch „interpretiert“ – steckt im Fall der Modallogik eine ganze Masse von Festsetzungen in der Metasprache, die auf der Objektsprachenebene alles andere als vorgezeichnet sind.

Kurz gesagt: warum soll man nicht bereits *in der Objektsprache* Aussagen über mögliche Welten und deren Vergleichbarkeit machen können? Warum soll eine Modallogik nicht so verstanden werden können, dass man eine Grundsprache durch eine Maschinerie anreichert, die in der Objektsprache das Quantifizieren über die semantischen Interpretationen dieser Grundsprache ermöglicht? – Warum nicht! Logiken, die diese Strategie verfolgen, nennt man *hybride Modallogiken*.

Ein wichtiges Motiv für hybride Modallogiken besteht darin, dass man in ihnen direkt die Merkmale bestimmter „möglicher Welten“ abfragen kann. Arthur Prior hat diese Möglichkeit als erster in der modalen Logik diskutiert und zwar am Beispiel der Zeitlogik. Wenn „mögliche Welten“ zeitliche Zustände eines Systems charakterisieren, dann erscheinen Aussagen der Form

„ϕ ist wahr zum Zeitpunkt $\mathfrak{A}$“,

sehr sinnvoll. Der diesen Sachverhalt implementierende modale Operator $@_{\mathfrak{A}}\phi$ drückt dementsprechend nichts anderes aus als dass die Formel ϕ in der möglichen Welt $\mathfrak{A}$ erfüllt ist (lies: „in $\mathfrak{A}$ gilt ϕ“).

Die hybride Logik L_h, die wir im folgenden diskutieren, ist eine propositionale Logik, die zusätzlich zu den Aussagenkonstanten entsprechend Variablen und Konstanten, die sich auf mögliche Welten beziehen können. Ist w eine solche Konstante, dann bedeutet $@_w$ Wahrheit in der möglichen Welt w. Die atomare Aussage w bedeutet die Behauptung, dass w die aktuale Welt ist. $\langle R\rangle w$ bedeutet somit, dass w mit der aktualen Welt vergleichbar ist, $[R]w$, dass die aktuale Welt nur mit sich selbst vergleichbar ist.

Neben dem Erfülltheits-Operator @ enthält L_h auch eine direkte Möglichkeit, über mögliche Welten zu quantifizieren. Natürlich könnte man das in der üblichen Weise mit Quantoren wie $\forall$ und $\exists$ realisieren, sodass $\forall x.\phi$ bedeutet: „in jeder möglichen Welt x gilt ϕ“ (im folgenden Abschnitt werden wir im Kontext endlicher Logiken darauf zurück kommen). Leider hat eine so konzipierte hybride Logik ungünstige metalogische Eigenschaften (Unentscheidbarkeit, Unvollständigkeit), sodass wir auf eine vereinfachte Variante des *direkten* Quantifizierens über mögliche Welten zurückgreifen (indirekt quantifiziert man ja mit allen modalen Operatoren stets über mögliche Welten!). Dies ist der Quantor $\aleph x$, der die jeweils *aktuale* mögliche Welt an die Variable x bindet. Beispielsweise kann man so den oben (S. 84) besprochenen Until-Operator $\mathcal{U}$ wie folgt definieren:

$$\phi\mathcal{U}\psi := \aleph x.\langle R\rangle\aleph y.(\phi \wedge @_x[R](\langle R\rangle y \rightarrow \psi)).$$

Mit $\aleph x$ wird hier die aktuale Welt für die weitere Behandlung in der Formel fixiert (man könnte sich das so denken, dass der aktuale Zeitpunkt in der Variable x gespeichert wird). Dann wird mit $\langle R\rangle$ über die R-vergleichbaren möglichen Welten existenzquantifiziert, $\aleph y$ pickt die jeweilige R-vergleichbare mögliche Welt heraus und der Rest der Formel besagt: „es gilt ϕ (in y) und in jeder von x aus R-erreichbaren möglichen Welt gilt außerdem, dass, falls y von dieser Welt aus R-erreichbar ist, dort ψ gilt“. Man vergleiche diese Definition mit der auf S. 84!

Im Detail sieht das nicht-logische Vokabular von Ł$_h$ so aus:

(1) A: Propositionskonstanten $p, p', \ldots$
(2) Relationssymbole $R, R' \ldots$
(3) Mögliche-Welten-Konstanten $w, w', \ldots$
(4) Mögliche-Welten-Variablen $x, x', \ldots$

Dazu kommen noch die logischen Elemente: die üblichen Junktoren $\wedge$ und $\neg$ sowie der Erfülltheitsoperator @ und der Aktuale-Welt-Quantor $\aleph$. Die Formelmenge L_h ist dann definiert als:

$$\phi ::= p \mid s \mid \langle R\rangle\phi \mid @_s\phi \mid \aleph x.\phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi.$$

Hier steht p für Propositionskonstanten, s für Mögliche-Welten-Konstanten und -Variablen, x für Mögliche-Welten-Variablen und R für Relationssymbole.

Eine *hybride Struktur* $(\mathcal{W}, \xi)$ besteht aus einer Menge $\mathcal{W}$ von L_A-Strukturen (also von Elementen von $\wp(A)$) plus einer Funktion ξ, die jedem Relationensymbol eine zweistellige Relation über $\mathcal{W}$ (also eine Teilmenge von $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$) zuordnet und jeder Mögliche-Welten-Konstante ein Element von $\mathcal{W}$. Auf dieser Grundlage definieren wir die Erfülltheit einer Formel in einem $\mathfrak{A} \in \mathcal{W}$. Neben den üblichen Definitionen für Aussagenkonstanten, $\wedge$ und $\neg$ haben wir, für Mögliche-Welten-Konstanten w sowie Formeln $\langle R\rangle\phi$, $@_w\phi$ und $\aleph x.\phi$:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \vDash w & \text{gdw} & \xi(w) = \mathfrak{A} \\
\mathfrak{A} \vDash \langle R \rangle \phi & \text{gdw} & \text{es gibt ein } \mathfrak{A}' \in \mathcal{W} \text{ mit } \mathfrak{A}\xi(R)\mathfrak{A}' \text{ und } \mathfrak{A}' \vDash \phi \\
\mathfrak{A} \vDash @_w \phi & \text{gdw} & \xi(w) \vDash \phi \\
\mathfrak{A} \vDash \aleph x.\phi & \text{gdw} & \mathfrak{A} \vDash \phi[\mathfrak{A}/x].
\end{array}$$

Für Kalküle, Vollständigkeitsbeweise etc. siehe die am Ende dieses Kapitels angeführte Literatur.

*4.8 *Starre hybride Logik*

Zwar gibt es für hybride Logiken, die mit klassischen Quantoren wie $\forall$ und $\exists$ uneingeschränkt über die Strukturen einer Grundsprache quantifizieren, im Allgemeinen keine vollständigen Kalküle, aber diese Limitierungen fallen flach sobald wir uns im Bereich von Logiken wie der starren Logik aus Abschnitt 3.4 bewegen, die auf starken Restriktionen klassischer Modelle basieren. Sobald eine Logik nur endlich viele semantische Interpretationen besitzt lässt sich das Quantifizieren über Strukturen im Rahmen von endlichen Entscheidungsaufgaben (Wahrheitstafeln) realisieren. Diese Eigenschaft, nur endlich viele semantische Interpretationen aufzuweisen hat (als Standardfall) die Aussagenlogik mit endlich vielen Aussagenvariablen, aber auch die oben spezifizierte starre Logik $L_s(\mathcal{S}, \mathcal{R})$. Wir zeigen hier, wie man über $L_s(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ eine endliche hybride Logik spezifizieren kann, in der unbeschränktes Quantifizieren über Strukturen möglich ist.

Die starre hybride Logik $L_{s-h}(\mathcal{S}, \mathcal{R}, P_h)$ basiert auf dem Paar (S, R) einer starren Logik $L_s(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ plus einer endlichen Menge $P_h \subseteq P_{1h}$ von Relationen- und Funktionenkonstanten, wobei P_{1h} eine Menge von Relationen- und Funktionenkonstanten ist, die für jede Stellenzahl $n > 0$ eine abzählbare Menge solcher Konstanten enthält. Der Einfachheit halber führen wir alle $L_s(\mathcal{S}, \mathcal{R})$-Strukturen als (starre!) Mögliche-Welten-Konstanten ein. Zusätzlich haben wir eine abzählbare Menge von Mögliche-Welten-Variablen sowie die Mögliche-Welten-Konstante `SELF`, die jeweils die aktuale Welt bezeichnen soll und die Mögliche-Welten-Konstante `NULL`, die, als Instanz der leeren Menge, eine „unmögliche Welt“ bezeichnet.

Man beachte, dass wir hier, anders als in L_h, nicht nur zweistellige Relationenkonstanten einführen, sondern Relationenkonstanten beliebiger Stellenzahl (beispielsweise benötigt man in der Relevanzlogik dreistellige Vergleichbarkeitsrelationen!). Entsprechend führen wir hier Relationen nicht bloß als Operatoren $\langle R \rangle$ ein sondern wir spezifizieren diese syntaktisch im Rahmen von atomaren Formeln erster Stufe:

Jede Mögliche-Welten-Variable und jede Mögliche-Welten-Konstante ist ein *modaler Term*. Ist f eine n-stellige Funktionenkonstante aus P_h und sind $t_1, \ldots, t_n$ modale Terme, dann ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein modaler Term.

Ist R eine n-stellige Relationenkonstante aus P_h und sind $t_1, \ldots, t_n$ modale Terme, so ist $R(t_1, \ldots, t_n)$ eine *atomare Formel*. Außerdem ist jeder modale Term und jede Aussagenkonstante eine atomare Formel. Die Formeln sind dann so definiert:

$$\phi ::= a \mid @_t\phi \mid \mathsf{E}(t) \mid \forall x.\phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi.$$

Hier bezieht sich a auf $L_s(\mathcal{S}, \mathcal{R})$-Formeln, t auf modale Terme und x auf Mögliche-Welten-Variablen.

Eine modale Struktur $(\mathcal{W}, \xi)$ besteht aus einer Menge $\mathcal{W}$ von $L_s(\mathcal{S}, \mathcal{R})$-Strukturen plus einer Funktion ξ, die jeder n-stelligen Relationenkonstante $R \in P_h$ eine n-stellige Relation über $\mathcal{W}$ zuweist und jeder n-stelligen Funktionenkonstante $f \in P_h$ eine n-stellige Funktion von $\mathcal{W}^n$ nach $\mathcal{W}$.

Für alle $L_s(\mathcal{S}, \mathcal{R})$-Strukturen $\mathfrak{A}$, alle Mögliche-Welten-Konstanten w, alle konstantenbelegten Funktionenterme $f(w_1, \ldots, w_n)$ sowie für die Konstanten $\mathtt{SELF}$ und $\mathtt{NULL}$ definieren wir dann einen eindeutige Werte $\mathfrak{A}(x)$, anhand der Regeln:

$$\mathfrak{A}(w) := \begin{cases} w & \text{falls } w \in \mathcal{W} \text{ gilt,} \\ \mathtt{NULL} & \text{sonst.} \end{cases}$$
$$\mathfrak{A}(\mathtt{SELF}) := \mathfrak{A}$$
$$\mathtt{NULL}(w) := \mathtt{NULL}$$
$$\mathfrak{A}(f(w_1, \ldots, w_n)) := \xi(f)(\mathfrak{A}(c_1), \ldots, \mathfrak{A}(c_n))$$

Die semantischen Regeln für beliebige Formeln ϕ, für atomare Formeln p, $R(t_1, \ldots, t_n)$, $@_t\phi$, $\forall x.\phi$, in denen alle Terme variablenfrei sind, und für Strukturen $\mathfrak{A} \in \wp(A)$ lauten:

$\mathtt{NULL} \models \phi$		ist immer falsch
$\mathfrak{A} \models p$	gdw	$p \in \mathfrak{A}$
$\mathfrak{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)$	gdw	$(\mathfrak{A}(t_1), \ldots, \mathfrak{A}(t_n)) \in \xi(R)$
$\mathfrak{A} \models @_t\phi$	gdw	$\mathfrak{A}(t) \models \phi$
$\mathfrak{A} \models \forall w.\phi$	gdw	für alle $\mathfrak{A}' \in \mathcal{W}$ gilt $\mathfrak{A} \models \phi[\mathfrak{A}'/w]$

Wir können nun beliebige modale Operatoren ganz einfach als explizite Definitionen einführen. Beispiele:

$$\Box\phi := \forall w.R(\mathtt{SELF}, w) \to @_w\phi.$$
$$\phi\mathcal{U}\psi := \exists w.(R(\mathtt{SELF}, w) \wedge @_w\psi) \wedge (\forall w'.(R(self, w') \wedge R(w', w)) \to @_{w'}\phi).$$

Ein Beispiel für modales Quantifizieren, das sich in klassischen modalen Kontexten, inklusive der hybriden Logik L_h nicht ohne weiteres realisieren lässt, ist die *Dynamisierung* der Logik, anhand von Funktionen über möglichen Welten. Die Idee ist, dass eine *Aktion* (vgl. die dynamische Logik aus Abschnitt 4.6) nichts anderes ist als eine Funktion α, die einer möglichen Welt, in der die Aktion gesetzt wird, die mögliche Welt zuordnet, die aus der Aktion resultiert. (Kann die

Aktion nicht gesetzt werden, ist der zugeordnete Wert `NULL`.) Die starre hybride Logik L_{s-h} beinhaltet also auch die Ausdrucksmöglichkeiten einer dynamischen Logik des Handelns.

4.9 Literaturhinweise

Die Modallogik ist bis heute das mit Abstand wichtigste Gebiet der philosophischen Logik und daher entsprechend unüberschaubar. Eine hervorragende und schnörkellose Einführung in Grundideen der modalen Aussagenlogik und der quantifizierten Modallogik ist Fitting & Mendelsohn (1998). Ein klassisches Lehrbuch für Philosophen, das viel mehr Material enthält als das Buch von Fitting und Mendelsohn (und gerade in seiner Umfassendheit unverzichtbar ist) ist Hughes & Cresswell (1996). Aus diesem Buch wurde insbesondere die Darstellung von nicht-normalen Logiken und Logiken, die stärker sind als **S5**, herangezogen (Kapitel 3 und 11). Ein Handbuch, das so gut wie alle Aspekte der Modallogik abdeckt (zumindest sofern diese mathematisch signifikant sind) ist Blackburn et al. (2006), hier wurde insbesondere die Darstellung der hybriden Logik (Kapitel 14) verwendet. Ein weiteres Standardwerk zur „mathematischen Modallogik“ ist Blackburn et al. (2001). Im Handbook of Philosophical Logic Gabbay & Guenthner (2001ff) sind zahlreiche Artikel enthalten, die sich in der einen oder anderen Form mit Modallogik befassen. Siehe vor allem die Bände 3 bis 8.

Die Liste von Axiomen und Systemen der Modallogik wurde erstellt nach (Bull & Segerberg, 2001, S. 19). Die grafische Darstellung des Verbands der Modallogiken ist eine bearbeitet Fassung der Grafik aus dem Stanford-Enzyklopädie-Eintrag `.../logic-modal/` von James Garson. Viele Beispiele für normale und nicht-normale Axiomatisierungen der Modallogik findet man in (Hughes & Cresswell, 1996, S. 359-368) sowie auf der „Logic System Interrelationships“ Seite von John Halleck `http://home.utah.edu/~nahaj/logic/structures/index.html`.

Sehr viel Material ist in dem ausgezeichneten Lehrbuch Priest (2008 [2001]) zu finden, dessen Schwäche vielleicht in einer gewissen Unübersichtlichkeit liegt (und, für jemanden der nicht mit diesen vertraut ist, darin, dass Priest semantische Tableaus verwendet). Hier wurden vor allem die Abschnitte zur nicht-normalen Modallogik, zur konditionalen Logik, zur intuitionistischen Logik, zur Relevanzlogik, zur *free logic* und zur parakonsistenten Logik aus Priests Buch herangezogen.

In Goble (2001) sind sehr übersichtliche Artikel zur Zeitlogik, zur epistemischen Logik, zur deontischen Logik sowie zur Relevanzlogik enthalten.

Zur Zeitlogik und zur dynamischen Logik siehe das sehr kompakte Buch Goldblatt (1992). Ein hervorragendes Buch zur epistemischen Logik ist Lenzen

(1980). Zur parakonsistenten Logik vgl., neben Priest (2008 [2001]), auch Priest (2002) sowie Priest et al. (2004). Die hier präsentierte parakonsistente epistemische Logik ist eine, wie mir scheint, natürliche Kombination aus epistemischer und parakonistenter Logik, die aber in der hier herangezogenen Literatur offenbar nicht diskutiert wird.

Zur quantifizierten Modallogik siehe vor allem Fitting & Mendelsohn (1998) und Fitting (2002). In letzterem wird Kurt Gödels Gottesbeweis als ebenso bizarres wie interessantes Beispiel zur Illustration der Möglichkeiten intensionaler Logik herangezogen.

Die starre hybride Logik L_{s-h} geht auf Ideen aus Damböck (2005) und Damböck (2009) zurück.

5 Mehrwertige Logik

5.1 Grundbegriffe der mehrwertigen Logik

Wahrheitswerte Mehrwertige Logiken haben nicht bloß zwei sondern mehrere Wahrheitswerte. Die Menge $\mathcal{V}$ dieser Wahrheitswerte kann endlich sein oder unendlich. Im Fall einer endlichen Anzahl $n > 1$ von Wahrheitswerten nimmt man meist an, dass $\mathcal{V}$ in der Gestalt der Menge $\{k \mid \frac{n-i}{n-1}, 1 \leq i \leq n\}$ gegeben ist. Wir erhalten so die Wahrheitswertmengen $\{0, 1\}, \{0, 1/2, 1\}, \{0, 1/3, 2/3, 1\}, \ldots$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$ Gegebenenfalls geben wir den so definierten Wahrheitswerten auch eine zusätzliche (nicht-zahlenmäßige) Interpretation.

An unendlichen Wahrheitswertemengen diskutieren wir nur den Standardfall wo es sich bei $\mathcal{V}$ um das probabilistische Intervall $[0, 1]$ handelt, also um das Kontinuum aller reeller Zahlen zwischen 0 und 1.

Designierte Wahrheitswerte Neben der Wahrheitswertemenge muss eine mehrwertige Logik eine Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}$ von *designierten Wahrheitswerten* festsetzen. Das sind diejenigen Wahrheitswerte, anhand derer logische Folgerung definiert wird. Diese Definition lautet dann:

Eine Formel ϕ ist *logische Folgerung* einer Menge von Prämissen, wenn gilt, dass in keinem Fall wo alle Prämissen in einer Struktur einen designierten Wahrheitswert besitzen die Formel ϕ keinen designierten Wahrheitswert besitzt.

Dies ist eine ganz natürliche Verallgemeinerung des klassischen logischen Folgerungsbegriffs. Die klassische Logik hat nur einen designierten Wahrheitswert (nämlich 1). Dieser ist auch bei den meisten mehrwertigen Logiken der einzige designierte Wahrheitswert, aber es gibt wichtige Ausnahmen wie die parakonsistente Logik II (Abschnitt 5.2.2) und die *fuzzy logic* (Abschnitt 5.3).

Wahrheitsfunktionalität Mehrwertige Logiken sind *wahrheitsfunktional*. Das heißt, sie basieren auf einer Formelmenge L_x, für die die Logik eine Funktion $f : L_x \mapsto \mathcal{V}$ definiert, die jeder Formel einen eindeutigen Wahrheitswert zuweist.

Mehrwertige Strukturen Jede Logik, die wir hier diskutieren, basiert auf einem bestimmten nicht-logischen Vokabular, wie wir es in den Kapiteln 2 und 3 kennen gelernt haben. Eine *Struktur* $\mathfrak{A}$ einer mehrwertigen Logik muss dann diese nicht-logischen Bestandteile in geeigneter Weise interpretieren. Insbesondere ist dabei zu beachten:

(1) Aussagenkonstanten erhalten durch $\mathfrak{A}$ einfach einen Wahrheitswert aus $\mathcal{V}$ zugewiesen, anhand einer Funktion $\mathfrak{A} : A \mapsto \mathcal{V}$, wobei A die Menge der Aussagenkonstanten der Logik ist.

(2) Im Fall einer Prädikatenlogik erhält die Struktur ganz in der klassischen Weise eine Domäne $\mathfrak{A}(\Delta)$ bzw. $\mathfrak{A}(0)$ zugeordnet. Alle anderen Typen dieser Logik werden so in der üblichen Weise konstruiert.

(3) Funktionenterme werden ebenfalls völlig klassisch interpretiert, also jede Funktionsbelegung erhält entweder ein Objekt aus der Domäne zugeordnet oder einen Dummy-Wert `NULL`.

(4) Relationen werden mehrwertig interpretiert. Das heißt, eine n-stellige Relation P über den Domänenmengen $M_1, \ldots, M_n$ ist hier nicht *als Teilmenge* von $M_1 \times \ldots \times M_n$ definiert, sondern *als Funktion* $\mathfrak{A}(P) : M_1 \times \ldots \times M_n \mapsto \mathcal{V}$.

Wie man leicht sieht, interpretieren so definierte Strukturen die Terme und atomaren Formeln aller hier infrage kommenden Logiken in ganz unproblematischer Weise: die entsprechenden Spezifikationen der Semantik für *Terme* können hier einfach übernommen werden. Für Aussagenkonstanten p liefert die Struktur automatisch einen Wahrheitswert $\mathfrak{A}(p)$. Atomare Formeln $P(c_1, \ldots, c_n)$, in denen die c_i Konstanten sind, werden so semantisch interpretiert:

$$\mathfrak{A}(P(c_1, \ldots, c_n)) := \mathfrak{A}(P)(c_1, \ldots, c_n).$$

Junktoren und Wahrheitstafeln Die Menge $\mathcal{J}$ ist eine endliche Menge von Junktoren beliebiger endlicher Stellenzahl, anhand derer in der üblichen Weise aus atomaren Formeln zusammengesetzte Formeln gebastelt werden: Ist j ein einstelliger Junktor, dann resultiert aus jeder Formel ϕ die Formel $j\phi$, ist j zweistellig, so erhalten wir aus ϕ und ψ die Formel $\phi j \psi$, ist j schließlich n-stellig (mit $n > 2$), so erhalten wir zu jeder Folge von Formeln $\phi_1, \ldots, \phi_n$ die Formel $j(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

Die mehrwertige Logik muss dann, hinsichtlich der Junktoren, nichts anderes definieren, als zu jedem n-stelligen Junktor j eine Funktion

$$f_j : \mathcal{V} \times \ldots \times \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V},$$

also eine Funktion, die jeder möglichen Belegung des Junktors mit Wahrheitswerten wiederum einen Wahrheitswert zuordnet. (Im Fall einer endlichen Menge $\mathcal{V}$ ist die Spezifikation einer solchen Funktion identisch mit der Angabe einer *Wahrheitstafel*.)

Gegeben diese Definition ergibt sich dann automatisch die rekursive Definition von Wahrheitswerten für alle zusammengesetzen Formeln.

Klassische (Aussagen-)Logik als Sonderfall In der klassischen Aussagenlogik können wir die Definition der Junktoren als Wahrheitsfunktionen auch so beschreiben (man stelle sicher, dass diese Definitionen zu den Spezifikationen auf S. 18 äquivalent sind!):

$$
\begin{array}{ll}
(\neg 1) & f_\neg(i) := 1 - i \\
(\wedge 1) & f_\wedge(i, j) := \min\{i, j\} \\
(\vee 1) & f_\vee(i, j) := \max\{i, j\} \\
(\rightarrow 1) & f_\rightarrow(i, j) := \min\{1, 1 - i + j\}.
\end{array}
$$

Man kann diese Definitionen nun in einer beliebigen mehrwertigen Logik einfach übernehmen. Wie man sofort sieht, liefern diese Definitionen für alle oben definierten Varianten von Wahrheitswertemengen stets korrekte Definitionen der Wahrheitsfunktionen.

Dennoch kann man nicht sagen, dass diese Definitionen die einzig sinnvolle Herangehensweise an mehrwertige Logik darstellen.

Wahrheitsfunktionen für die Negation $(\neg 1)$ ist eine sehr sinnvolle und intuitive Beschreibung mehrwertiger Negation. Die Wahrheitswerte, die sich im vierwertigen Fall ergeben sind:

	$(\neg 1)$
0	1
1/3	2/3
2/3	1/3
1	0

Eine Alternative dazu ist die von Post eingeführte Definition für eine n-wertige Logik (mit endlichem n):

$$
(\neg 2) \quad f_\neg(i) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ i - \frac{1}{n-1} & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Für den vierwertigen Fall resultiert somit die Wahrheitstafel:

	$(\neg 2)$
0	1
1/3	0
2/3	1/3
1	2/3

Der Wahrheitswert wird anschaulich um einen Schritt „verschoben“.

Wahrheitsfunktionen für die Konjunktion Definiert man die Konjunktion im Stil von ($\wedge$1) als Minimum der Wahrheitswerte so erhält man folgende vierwertige Wahrheitstafel:

($\wedge$1)	0	1/3	2/3	1
0	0	0	0	0
1/3	0	1/3	1/3	1/3
2/3	0	1/3	2/3	2/3
1	0	1/3	2/3	1

Eine Alternative dazu ist die oft so genannte *schwache Konjunktion*:

($\wedge$2) $f_\wedge(i, j) := \max\{0, i + j - 1\}$

mit der vierwertigen Wahrheitstafel:

($\wedge$1)	0	1/3	2/3	1
0	0	0	0	0
1/3	0	0	0	1/3
2/3	0	0	1/3	2/3
1	0	1/3	2/3	1

Eine dritte Variante ist die Konjunktion als Produkt

($\wedge$3) $f_\wedge(i, j) := ij.$

Allerdings ist diese Funktion nur im zweiwertigen und im unendlichwertigen Fall wohldefiniert.

Wahrheitsfunktionen für die Disjunktion Analog definieren wir die zwei zusätzlichen Disjunktionsvarianten:

($\vee$2) $f_\vee(i, j) := \min\{1, x + y\}$
($\vee$3) $f_\vee(i, j) := i + j - ij$

($\vee$3) ist erneut nur im zweiwertigen und im unendlichen Fall wohldefiniert. Die vierwertigen Wahrheitstafeln für ($\vee$1) und ($\vee$2) sind:

($\vee$1)	0	1/3	2/3	1	($\vee$2)	0	1/3	2/3	1
0	0	1/3	2/3	1	0	0	1/3	2/3	1
1/3	1/3	1/3	2/3	1	1/3	1/3	2/3	1	1
2/3	2/3	2/3	2/3	1	2/3	2/3	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Wahrheitsfunktionen für die Implikation Bei der Implikation betrachten wir folgende alternativen Definitionen:

$$(\to 2) \quad f_{\to}(i,j) := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \leq j \\ j & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$(\to 3) \quad f_{\to}(i,j) := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \leq j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die vierwertigen Wahrheitstafeln für (→1) und (→2) sind:

(→1)	0	1/3	2/3	1	(→2)	0	1/3	2/3	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1/3	2/3	1	1	1	1/3	0	1	1	1
2/3	1/3	2/3	1	1	2/3	0	1/3	1	1
1	0	1/3	2/3	1	1	0	1/3	2/3	1

Die Interpretation der Quantoren Im Fall einer Prädikatenlogik müssen wir zusätzlich zu den Strukturen und den Wahrheitsfunktionen für die Junktoren auch noch Wahrheitsfunktionen für Quantoren definieren. Die Menge der Quantoren Q liefert für jeden Quantor q, jede Variable x und jede Formel ϕ die neue Formel $qx\phi$. Bei den Fällen, die wir hier diskutieren, sind nur die Quantoren $\forall$ und $\exists$ relevant.

Im Fall der klassischen Logik ergibt sich eine wahrheitsfunktionale Beschreibung von $\forall$ und $\exists$ in folgender Weise:

$$(\forall 1) \quad \mathfrak{A}(\forall x.\phi) := \min\{\mathfrak{A}(\phi[c/x]) \mid c \text{ ist eine Konstante in } L_{P_1}(\mathfrak{A})\}$$
$$(\exists 1) \quad \mathfrak{A}(\exists x.\phi) := \max\{\mathfrak{A}(\phi[c/x]) \mid c \text{ ist eine Konstante in } L_{P_1}(\mathfrak{A})\}$$

Hier soll $L_{P_1}(\mathfrak{A})$ für jede Struktur ganz im oben beschriebenen Stil bestimmt sein.

Anschaulich ist weiters klar, dass Allquantifizieren als (unendliche) Konjunktion über allen Formeln der Sprache definiert ist und Existenzquantifizieren als (unendliche) Disjunktion. Das heißt, wenn man Konjunktion und Disjunktion im Stil von (∧1) und (∨1) definiert, dann sind diese Definitionen die richtige Wahl, aber es sind durchaus auch andere Varianten denkbar, auf die wir jedoch nicht näher eingehen.

Die Wertestruktur einer mehrwertigen Logik Obige Überlegungen zusammenfassend definieren wir die *Wertestruktur* $(\mathcal{V}, \mathcal{D}, \{f_j \mid j \in \mathcal{J}\})$ einer mehrwertigen Logik als bestehend aus einer Menge von Wahrheitswerten $\mathcal{V}$, einer Menge von designierten Wahrheitswerten $\mathcal{D}$ und einer Menge von Wahrheitsfunktionen für alle in der Logik definierten Junktoren. Im Folgenden diskutieren wir eine Reihe von Beispielen solcher Wertestrukturen für mehrwertige Logiken.

5.2 Wichtige endlichwertige Aussagenlogiken

Man kann Logiken mit mehr als zwei Wahrheitswerten ganz generell auf zwei Arten und Weisen interpretieren:

(1) Die zusätzlichen Wahrheitswerte liefern eine zusätzliche Ausdifferenzierung für Aussagen, die *graduell* zwischen vollständig wahr und vollständig falsch angesiedelt sind.

(2) Die zusätzlichen Wahrheitswerte werden nicht im Sinne von (1) interpretiert.

Zwar kann man natürlich für eine mehrwertige Logik im Sinne von (1) jede beliebige n-wertige Logik mit $n > 2$ heranziehen, aber es scheint insgesamt kaum sinnvoll, in einem solchen Fall ein anderes System als das der reellwertigen Fuzzy-Logik mit dem Wahrheitswerteintervall $[0, 1]$ zu verwenden, weil alle diese Systeme letztlich nur beschränkte Fragmente der vollständigen Logik über $[0, 1]$ sind. Deshalb werden wir den Gesichtspunkt (1) hier ausschließlich im Rahmen des der Fuzzy-Logik gewidmeten Abschnittes 5.3 diskutieren.

Da *sinnvolle* endlichwertige Logiken demnach nur solche sind wo die zusätzlichen Wahrheitswerte *nicht* im Sinne einer graduellen Ausdifferenzierung des Wahr- und Falschseins interpretiert werden, überrascht es wenig, dass in diesem Kontext hauptsächlich die einfachsten Fälle solcher mehrwertigen Logiken – also dreiwertige und allerhöchstens vierwertige Logiken – relevant sind.

Was also kann ein dritter oder vierter Wahrheitswert bedeuten, jenseits der Möglichkeit einer graduellen Wahrheit? – Es gibt hier zwei sehr nahe liegende Varianten. Zusätzliche Wahrheitswerte können signalisieren,

(GAP) dass eine Aussage *weder wahr noch falsch ist*.

(GLUT) dass eine Aussage *sowohl wahr als auch falsch ist*.

Im ersten Fall spricht man auch von Wahrheitswert-Lücken (*truth value gaps*), im zweiten Fall von Wahrheitswert-Ansammlungen (*truth value gluts*), eine Logik, die den ersten Fall implementiert, nennt man auch *partielle Logik*, im zweiten Fall spricht man von *parakonsistenter Logik*.

5.2.1 Partielle Logik

Als erstes Beispiel einer partiellen Logik erwähnen wir die dreiwertige Łukasiewicz-Logik $Ł_3$, die auf den Definitionen ($\neg$1), ($\wedge$1), ($\vee$1) und ($\rightarrow$1) basiert:

$f_\neg$		$f_\wedge$	0	i	1	$f_\vee$	0	i	1	$f_\to$	0	i	1
0	1	0	0	0	0	0	0	i	1	0	1	1	1
i	i	i	0	i	i	i	i	i	1	i	i	1	1
1	0	1	0	i	1	1	1	1	1	1	0	i	1

Die dreiwertige Logik von Kleene K_3 unterscheidet sich von dieser Logik nur darin, dass die Implikation so spezifiziert wird:

$(\to K)$	0	i	1
0	1	1	1
i	i	i	1
1	0	i	1

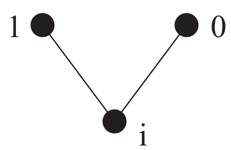
Eine wesentliche Grundidee der partiellen Logik besteht darin, dass man dadurch *begrenztes Wissen* formalisieren kann. Daher ist die Formel

$$\phi \vee \neg\phi$$

hier auch keine Tautologie. Im Fall, dass man *nicht weiß*, ob eine Formel wahr oder falsch ist, erhält sie den Wahrheitswert i.

In der Logik K_3 sticht hervor, dass in ihr nicht nur der „Satz vom ausgeschlossenen Dritten" nicht gilt, sondern dass es in ihr *überhaupt keine Tautologie gibt*. Insbesondere gilt die Formel $\phi \to \phi$ in K_3 nicht (für $\phi = \mathrm{i}$). Diese und damit zusammenhängende elementare Tautologien erhält man jedoch in der Logik Ł$_3$ (vgl. die Wahrheitstafeln).

Ansteigendes Wissen Aber zurück zur Idee der Formalisierung von *begrenztem Wissen*. Gegeben eine partiell interpretierte Struktur $\mathfrak{A}$ könnte man dann weitere Strukturen $\mathfrak{A}'$ finden, die dadurch zustande kommen, dass man einige Lücken aus $\mathfrak{A}$ auffüllt, also mit i belegte atomare Aussagen mit einem „echten" Wahrheitswert (also 0 oder 1) belegt. Die sich so in natürlicher Weise ergebende Ordnung von partiellen Strukturen kann man wie folgt beschreiben. Die partielle Ordnung $\sqsubseteq$ über den dreiwertigen Strukturen der zugrundeliegenden Logik sei definiert als:



$$x \sqsubseteq y \quad \text{gdw} \quad \text{entweder gilt } x = i \text{ oder } x = y.$$

Diese Ordnungsrelation stellt sicher, dass man Wahrheitswerte nur von i ausgehend ändern kann. Wir definieren diese Relation über der Menge von partiellen Strukturen, anhand von:

$$\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{A}' \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A}(p) \sqsubseteq \mathfrak{A}'(p), \text{ für jede atomare Formel } p.$$

Für beliebige Formeln ϕ gilt dann in der Logik K_3 die Monotoniebeziehung:

$$\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{A}' \rightarrow \mathfrak{A}(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{A}'(\phi).$$

$\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{A}'$ bedeutet anschaulich, dass $\mathfrak{A}'$ die selbe Menge an Information oder mehr Information als $\mathfrak{A}$ enthält, aber nirgends inkonsistent zu $\mathfrak{A}$ ist.

Supervaluationen und partielle Zeitlogik Eine spezifische Anwendung dieser Relation ist das Problem von Aussagen über die Zukunft. Man kann annehmen, dass selbst ein unfehlbarer Geist (also jemand, der nicht in der Lage ist etwas Falsches zu sagen) über zukünftige Ereignisse nur fragmentarische Informationen besitzt: man kann immer nur *einen Teil* der Zukunft prognostizieren. Somit hätte jede Struktur, die unser Wissen über einen zukünftigen Zustand der Welt beinhaltet – oder, besser gesagt: die all das beinhaltet, was *heute schon feststeht hinsichtlich dieses Zustandes*, ob wir es nun wissen oder nicht –, hätte jede solche Struktur einen partiellen Charakter. Die Grundidee dieses Ansatzes stammt von Aristoteles, der der Auffassung war, dass Aussagen über zukünftige Ereignisse entweder determiniert sind oder aber unentschieden.

Ist $\mathfrak{A}_{t-a}$ diese Struktur, die all das an dem zukünftigen Zeitpunkt t beschreibt, was aus Sicht der Gegenwart a sicher der Fall sein wird, dann muss die Struktur $\mathfrak{A}_t$, die das vollständige Modell dieses Zeitpunktes t abliefert eine *nicht-partielle* Struktur sein mit

$$\mathfrak{A}_{t-a} \sqsubseteq \mathfrak{A}_t.$$

Nicht-partiell bedeutet hier einfach, dass keine Formel in der Struktur den Wert i zugewiesen bekommt. Eine solche Struktur $\mathfrak{A}_t$ nennt man auch eine *Supervaluation* (englisch: *supervaluation*) von $\mathfrak{A}_{t-a}$.

Will man diesen Ansatz weiter spinnen, dann könnte man die Situation konstruieren, einer Zeitlogik, in der von einem Zeitpunkt a aus immer eine Reihe von unterschiedlichen Zeitverläufen möglich sind. Gegeben einen zukünftigen Zeitpunkt t unterscheiden sich dann die nicht-partiellen Strukturen $\mathfrak{A}_t, \mathfrak{A}'_t, \ldots$, die diesen Zeitpunkt beschreiben, in einigen Punkten, d. h. es gibt einige atomare Formeln p mit

$$\mathfrak{A}_t(p) \neq \mathfrak{A}'_t(p).$$

Auf dieser Grundlage kann man $\mathfrak{A}_{t-a}$ definieren, als jene Struktur, sodass für alle atomaren Formeln p gilt, dass sie den Wert $\mathfrak{A}_t(p)$ erhalten, wenn dieser Wert für alle anderen t-Strukturen $\mathfrak{A}'_t(p)$ der selbe ist, und ansonsten den Wert i.

Łukasiewiczs dreiwertige Modallogik Dieser Ansatz hat auch Jan Łukasiewicz als Motivation seiner dreiwertigen Logik gedient. Die (im Kern auf Aristoteles zurück gehende Idee) lautete, dass wir einige Aussagen über künftige Dinge sicher wissen, also wissen, dass diese Aussagen entweder wahr oder falsch sind, über andere Aussagen sind wir nicht informiert (Wahrheitswert i), diese sind somit bloß *möglich*, während die Aussagen der ersten Kategorie *notwendig* sind. Daraus ergibt sich der łukasiewiczsche Möglichkeitsoperator

$f_\Diamond$	
0	0
i	1
1	1

Gegeben unsere obigen Überlegungen ist dies jedoch eine sehr vorschnelle Definition des Begriffs „möglicher Weise wahr in der Zukunft“. Denn: (1) würde $\Diamond\phi$ hier auch dann gelten, wenn ϕ in keiner der Welten $\mathfrak{A}_{t-a}$ gilt, und (2) würden hier so absurde Dinge wie die Konsequenz

$$\Diamond\phi, \Diamond\psi \;/\; \Diamond(\phi \wedge \psi)$$

gelten. – Mit einem Wort: bei der Definition modaler Operatoren führt kein Weg an der (allerdings erst einige Jahrzehnte nach Łukasiewiczs Überlegungen entwickelten) modelltheoretischen Modallogik vorbei.

Kripkes Wahrheitstheorie Eine elementare Anwendung der partiellen Logik liegt im Bereich der Wahrheitstheorie. Alfred Tarskis klassischer Vorschlag im Umgang mit dem Begriff der Wahrheit lautete, dass man die Einführung eines Wahrheitsprädikates auf der Ebene der Objektsprache vermeiden muss, weil dadurch solche Aussagen wie

$\xi : \neg T(\xi)$ „Dieser Satz ist falsch“

möglich sind, die zu einem Widerspruch führen. Saul Kripke argumentierte jedoch, in einem klassischen Aufsatz, dass eine derartige Einschränkung einer Sprache viel zu restriktiv ist. Kripkes Vorschlag lautete, dass man ein Wahrheitsprädikat einführt, aber allen paradoxiegefährlichen Sätzen in einer dreiwertigen (partiellen) Logik den Wahrheitswert *i* zuweist. Dadurch erzielt man die größtmögliche Ausdrucksstärke, ohne Gefahr von Inkonsistenzen.

5.2.2 Parakonsistente Logik II

Wir gehen nun vom Studium von Wahrheitswertlöchern über zu dem Fall von Wahrheitswertansammlungen. Eine sehr einfache Möglichkeit einer Formalisierung dieser Situation ist die Logik LP, die aus K_3 dadurch resultiert, dass man die Menge designierten Wahrheitswerte zu $\mathcal{D} := \{1, \mathrm{i}\}$ ändert.

Diese Vorgangsweise ist sehr naheliegend, da im Fall von Wahrheitswertansammlungen i ja bedeuten soll, dass eine Aussage sowohl wahr als auch falsch ist. Der Wahrheitswert 1 ist in i also gewissermaßen *enthalten*.

In der Logik LP wird $p \vee \neg p$ zur Tautologie, da diese Formel in K_3 immer den Wahrheitswert 1 oder i besitzt. Die Logik ist aber tatsächlich parakonsistent, da in ihr der Satz vom Widerspruch $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$ nicht gilt. Das heißt, es gibt hier Formeln ϕ, ψ, für die

$$\phi \wedge \neg\phi \;/\; \psi$$

nicht gilt. Dies ist nämlich der Fall, sobald $\mathfrak{A}(\phi) = \mathrm{i}$ gilt und $\mathfrak{A}(\psi) = 0$.

Außerdem gilt in LP der Modus Ponens nicht. Für den Fall, dass ϕ den Wert i hat und ψ den Wert 0, ist die Ableitung

$$\phi, \phi \rightarrow \psi \;/\; \psi$$

nicht möglich (vgl. die Wahrheitstafeln). Reformuliert man jedoch die Wahrheitsfunktion der Implikation zu:

(→RM)	0	i	1
0	1	1	1
i	0	i	1
1	0	0	1

dann gilt der Modus Ponens erneut. Die so resultierende Logik nennt man RM_3.

Damit haben wir parakonsistente Logiken sowohl in einem modallogischen als auch in einem mehrwertigen Umfeld entwickelt. Der grundlegende Unterschied zwischen beiden Konzeptionen scheint, wie oben, in Abschnitt 4.4, bereits angedeutet, darin zu liegen, dass die mehrwertige Variante ganz explizit die klassische Logik verwirft und in einem dreiwertigen Umfeld neu konzipiert, sodass insbesondere die Negation (aber auch die übrigen Junktoren) eine gänzlich neue Interpretation erfahren. Aussagen können dann gleichzeitig wahr und falsch sein. Die modallogische Variante hingegen erscheint als wesentlich defensivere Form der Einführung parakonsistenter Konzepte. Die parakonsistente Negation ist dort im Grunde nur ein Modaloperator, mit dem wir das klassische Umfeld erweitern; die naheliegende Interpretation ist damit die einer parakonsistenten Glaubenslogik, in der inkonsistente und lückenhafte Annahmen der Struktur der aktualen Welt gegenübertreten, die die objektive Welt in einem klassischen zweiwertigen Umfeld charakterisiert. Mit anderen Worten: die beiden Konzeptionen parakonsistenter Logik wenden sich offenbar an ganz unterschiedliche Anwendungssituationen.

*5.2.3 *Wahrheitsrelationale Logiken*

Wir diskutieren nun einen Ansatz, der im Kern auf der Idee beruht, beide Varianten von Dreiwertigkeit – also Wahrheitswertlücken und Wahrheitswertansammlungen – miteinander zu verknüpfen. Die Idee ist sehr einfach: gegeben eine Menge von Grund-Wahrheitswerten $\mathcal{V}$ ist eine *wahrheitsrelationale* Logik definiert anhand von Wahrheitsfunktionen, die den Formeln der Sprache nicht *Wahrheitswerte* aus $\mathcal{V}$, sondern *Mengen von Wahrheitswerten* aus $\mathcal{V}$ zuordnen („relational“, weil Relationen Mengen definieren). So kann eine Formel wahlweise *einen* Wahrheitswert haben (klassischer Fall), *keinen* Wahrheitswert (Lücke) oder *mehrere* Wahrheitswerte (Ansammlung). Die Logik implementiert also klassische, partielle und parakonsistente Elemente in einem.

Formaler: eine Wertestruktur $(\mathcal{V}, \mathcal{D}, \{f_j \mid j \in \mathcal{J}\})$ wird in einer wahrheitsrelationalen Logik so eingeführt, dass jede Wahrheitsfunktion definiert ist als Funktion $f_j : \wp(\mathcal{V}) \mapsto \wp(\mathcal{V})$. Außerdem muss jede Struktur den nicht-logischen Elementen der Sprache Werte aus der Potenzmenge $\wp(\mathcal{V})$ zuweisen. Derartige Werte, die Mengen von Wahrheitswerten sind, nennen wir *Pseudowahrheitswerte*.

Logische Folgerung muss dann so definiert werden, dass eine Formel aus einer Menge von Prämissen folgt, wenn ein designierter Wahrheitswert in dem Pseudowahrheitswert der Formel *enthalten* ist, wann immer in allen Prämissen ein designierter Wahrheitswert in dem jeweiligen Pseudowahrheitswert enthalten ist.

Die triviale wahrheitsrelationale Logik, mit einer *einelementigen* Menge von Wahrheitswerten (und $\mathcal{V} = \mathcal{D}$), ist, wie man leicht sieht, äquivalent zur klassischen zweiwertigen Logik, da wir den Pseudowahrheitswert der leeren Menge als „falsch“ interpretieren können.

Die wichtigste wahrheitswertrelationale Logik ist jedoch die mit einer zweielementigen Wahrheitswertmenge $\{0, 1\}$. Die so resultierende *vierwertige Logik* von Belnap und Dunn FDE (*first degree entailment*) implementiert genau die angedeutete Kombination aus partieller und parakonsistenter Logik, in den Pseudowahrheitswerten:

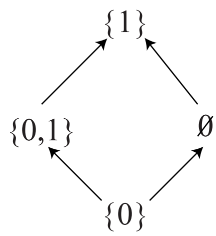
$\{1\}$	wahr
$\{0\}$	falsch
$\emptyset$	weder wahr noch falsch
$\{0, 1\}$	wahr und falsch (inkonsistent)

Die *Negation* eines Pseudowahrheitswertes ist standardmäßig definiert als:

$f_\neg$	
$\{1\}$	$\{0\}$
$\{0\}$	$\{1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}$

Die Konjunktion könnte man so beschreiben:

$f_\wedge$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0,1\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0,1\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$



Die Konjunktion ergibt sich hier als größte untere Schranke der Wahrheitswerte in der rechtsstehenden Grafik, also als der am weitesten oben liegende Wahrheitswert, von dem man aus beide Wahrheitswerte erreichen kann. Die Disjunktion lässt sich ebenfalls anhand der Grafik definieren, und zwar als kleinste obere Schranke der Wahrheitswerte.

Folgerung in einem mehrwertig-modalen Umfeld Für die Implikation gibt es keine standardmäßige Interpretation in FDE, allerdings kann man eine sehr ansprechende modale Konstruktion finden, wenn man eine mögliche Welten-Semantik über FDE aufbaut, anhand des Begriffs einer modalen Struktur $(\mathcal{W}, R)$, wo $\mathcal{W}$ eine Menge von FDE-Strukturen ist und R eine Relation darüber. Dann definieren wir:

$\mathfrak{A} \models \phi \Rrightarrow \psi$ gdw wann immer ϕ in einem $\mathfrak{A} \in \mathcal{W}$ mit $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}'$ einen designierten Wahrheitswert zugeordnet bekommt, dann erhält auch ψ dort einen solchen zugeordnet.

Einen designierten Wahrheitswert zugeordnet zu bekommen bedeutet hier, dass 1 ein Element des Pseudowahrheitswertes ist, dass also dieser entweder $\{1\}$ oder $\{0,1\}$ ist.

So legen wir den mehrwertigen Begriff der logischen Folgerung hier in eleganter Weise auf die Mögliche-Welten-Semantik um und erhalten damit das direkte mehrwertige Gegenstück zur *strikten Implikation*.

5.3 Fuzzy Logic

Wir verlagern unsere Überlegungen jetzt wieder zurück zu dem ersten Gesichtspunkt von Mehrwertigkeit: mehrere Wahrheitswerte, die eine graduelle

Wahrheit bzw. Falschheit ausdrücken. Die Standardvariante einer Logik für diesen Fall ist die reellwertige Logik mit $\mathcal{V} = [0, 1]$. Wie Junktoren in einer solchen Logik am besten definiert werden soll folgende technische Ausführung erläutern:

T-Norm basierte Logiken Eine Frage, die bei der Aufstellung von wahrheitsfunktionalen Varianten für die mehrwertige Logik zunächst ungeklärt bleibt, ist das Verhältnis der Junktoren untereinander. Natürlich kann man hier prinzipiell beliebige Definitionen miteinander kombinieren, aber die Junktoren sollten ja, wie in der klassischen Logik, auch bestimmte sinnvolle Beziehungen zueinander aufweisen, wie beispielsweise:

$$\phi \vee \psi \quad \text{gdw} \quad \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi).$$

Eine Möglichkeit, Junktoren, wie in der klassischen Logik, *aus ihren wechselseitigen Beziehungen heraus zu definieren*, liefert das Konzept der T-Norm. Eine *T-Norm* ist eine zweistellige Wahrheitsfunktion t, für die gilt:

(T1)	$t(0, i) = 0$ und $t(1, i) = 1$	Null- und Eins-Element
(T2)	$t(i, j) \leq t(k, l)$ falls $i \leq k$ und $j \leq l$	monoton wachsend
(T3)	$t(i, j) = t(j, i)$	kommutativ
(T4)	$t(t(i, j), k) = t(i, t(j, k))$	assoziativ

Ist t außerdem stetig spricht man von einer *stetigen T-Norm.*

Die Idee ist nun, in einer mehrwertigen Logik die Konjunktion so zu definieren, dass es sich um eine T-Norm handelt. Wie man leicht sieht, sind alle drei in Abschnitt 5.1 beschriebenen Wahrheitsfunktionen für die Konjunktion ($\wedge$1) bis ($\wedge$3) T-Normen, in diesem Sinn. Man verwendet folgende Bezeichnungen:

$t(i, j) := \max\{0, i + j - 1\}$	Lukasiewicz T-Norm
$t(i, j) := \min\{i, j\}$	Gödel T-Norm
$t(i, j) := ij$	Produkt T-Norm

Alle anderen Junktoren werden auf dieser Grundlage definiert! Und zwar erhält man:

$$f_{\rightarrow}(i, j) := \max\{k \mid t(i, k) \leq j\}$$
$$f_{\vee}(i, j) := 1 - t(1 - i, 1 - j)$$
$$f_{\neg}(i) := i \rightarrow 0$$

Die Sorites-Paradoxien Im Zentrum der philosophischen Diskussionen steht das Problem der *Vagheit* und die damit in engem Zusammenhang stehenden Sorites-Paradoxien. Wir erläutern diese Paradoxien anhand von zwei Beispielen:

(1) Wie viele Sandkörner ergeben einen Haufen? Eines oder zwei wohl kaum, 10^5 mit Sicherheit. Wenn wir nun einen Haufen aus n Sandkörnern haben, dann

gilt offensichtlich auch, dass, wenn wir ein Sandkorn entfernen, es sich immer noch um einen Haufen handelt. Daraus folgt aber unmittelbar, dass *jede* Menge von m Sandkörnern mit $m \leq n$ einen Haufen bildet, insbesondere ein oder zwei Sandkörner.

(2) Wann ist eine Person groß? Der Türke Sultan Kosen mit 2,47m ist zweifellos groß. Aber auch eine Person, die um einen cm kleiner ist als er ist groß. Gilt allgemein, dass, wenn eine Person groß ist, so auch eine Person, die um 1cm kleiner ist als diese, dann ist jede Person mit jeder beliebigen Größe groß.

Klassische Logik kann mit diesen Paradoxien schlecht umgehen. Die Fuzzy-Logik liefert hier zumindest mögliche Ansätze, wie wir solche vagen Begriffe wie „Haufen" oder „groß" definieren können.

Beispielsweise könnte man die Sandkörner-Anzahl n anhand einer Wahrheitsfunktion f auf das probabilistische Intervall abbilden, indem man definiert:

$$f(n) := 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Hier erhält man für die Körnerzahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ die Wahrheitswerte $0, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots$, in einer Folge die gegen 1 konvergiert. Nun wäre im Standardfall eines designierten Wahrheitswertes 1 nur ein unendlich großer Haufen als groß definiert. Aber wir können jederzeit diese Schwelle herunter setzen, indem wir als Menge der designierten Wahrheitswerte $\mathcal{D}$ ein Intervall $[x, 1]$ festsetzen, sodass eine Menge von Sandkörnern ab dem Fall $f(n) = x$ als groß gilt.

Natürlich ist auch diese Einführung eines fixen Schwellwertes alles andere als unproblematisch, aber die Frage ist, ob man auf sie verzichten kann? (Was könnten Alternativen sein?)

Analoge Lösungen und Probleme kann man sich für den Fall der Größe einer Person überlegen.

5.4 Literaturhinweise

In Priest (2008 [2001]) findet man einen Überblick über sehr viele philosophische Gesichtspunkte der mehrwertigen Logik (Partialität, Parakonsistenz, Wahrheitswertrelationalität, Kombinationen mit Modallogik). Siehe auch Priest (2002) und Blamey (2002). Zu Kripkes Wahrheitstheorie siehe Kripke (1975); Gupta & Belnap (1993).

Eine klassische technische Darstellung der mehrwertigen Logik ist Gottwald (1989). Siehe auch die (ebenfalls eher technischen) Aufsätze zur mehrwertigen Logik in (Gabbay & Guenthner, 2001ff, Band 2).

A Alternative logische Symbole

In älteren Texten werden häufig andere Symbole für Junktoren, Quantoren und modale Operatoren verwendet, als die von uns eingeführten. Hier einige häufig zu findende Beispiele:

unser Symbol	wird zu
$\neg$	$\sim$ Überstrich: $\neg(\phi \wedge \neg\psi)$ wird zu $\overline{\phi \wedge \overline{\psi}}$
$\rightarrow$	$\subset$
$\wedge$	$.$ $\&$ $\cap$ oft auch ohne Zeichen: $\phi \wedge \psi$ wird zu $\phi\psi$
$\leftrightarrow$	$\equiv$ $\subset\supset$
$\vee$	$\mid$ $\cup$
$\forall$	(x) $\bigvee$
$\exists$	$\bigwedge$ (oft auch nicht explizit eingeführt: $\neg(x)\neg$ etc.)
$\Box$	L N
$\Diamond$	M

B Liste der Logiken, Axiome und Ableitungsregeln

L_A Aussagenlogik

(R1) Jedes Axiom ist ein Theorem.
(R2) *Substitution*: Ersetzt man eine Satzvariabel in einem Theorem durch eine Formel, so ist das Resultat erneut ein Theorem.
(R3) *Modus Ponens*: Wenn $\phi \rightarrow \psi$ und ϕ Theoreme sind, so auch ψ.

(A1) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
(A2) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$
(A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$.

$L_{P_{1f}}$ Prädikatenlogik erster Stufe mit Funktionen und Identitätssymbol
L_{P_1} Prädikatenlogik erster Stufe ohne Funktionen und ohne Identitätssymbol
$L_{P_{1m}}$ Prädikatenlogik erster Stufe mit ausschließlich einstelligen Prädikaten
$L_{P_{2f}}$, L_{P_2}, L_{P_n} etc. Prädikatenlogik zweiter bzw. n-ter Stufe, mit und ohne Funktionen und Identitätssymbol etc.
L_{P_t} einfache Typenlogik

(R1) bis (R3), (A1) bis (A3) sowie:

(A4) $\forall x\phi \rightarrow \phi[t/x]$ wobei t irgendein Term (des selben Typs wie x) ist.
(A5) $\phi \rightarrow \psi \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\psi)$, falls x weder in ϕ noch in einer der vorangehenden Prämissen als freie Variable enthalten ist.

Bei Logiken mit Identität außerdem:

(A6) $x = x$
(A7) $\forall x, y : x = y \rightarrow (\phi \rightarrow \phi[y/x])$

Bei der Logik zweiter Stufe außerdem:

(A4') $\forall X\phi \rightarrow \phi[T/X]$ wobei T ein Term und X eine Variable zweiter Stufe ist.
(A5') $\phi \rightarrow \psi \rightarrow (\phi \rightarrow \forall X\psi)$, falls X weder in ϕ noch in einer der vorangehenden Prämissen als freie Variable enthalten ist.

Bei *allen* Logiken höherer Stufe außerdem das Komprehensionsschema:

(A8) $\exists x_t \forall x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}(x_t(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \leftrightarrow \phi(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}))$.

$L_{P_t\mathfrak{I}}$ Typenlogik mit λ-Abstraktionen und ι-Termen
$L_s(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ starre Logik über $\mathcal{S}$ und $\mathcal{R}$

$L_{A\Box}$ modale Aussagenlogik mit dem Operator $\Box$
$L_{A[P][F]}$ m. A. mit den Operatoren $[P]$ und $[F]$ (Zeitlogik)
$L_{A\mathcal{U}\mathcal{S}}$ m. A. mit den Operatoren $\mathcal{U}$ und $\mathcal{S}$
L_{Ax} m. A. mit den Operatoren K, B, O etc. (epistemisch, deontisch)
$L_{A\sqsubset\rightharpoondown}$ m. A. mit den Operatoren $\sqsubset$ und $\rightharpoondown$ (intuitionistische Logik)
$L_{A>}$ m. A. mit dem Operator $>$ (konditionale Logik)
$L_{A\Rightarrow}$ m. A. mit dem Operator $\Rightarrow$ (Relevanzlogik)
$L_{A_{WF}}$ m. A. mit den beiden Operatoren W und F (parak. epist. Logik)

normale Modallogiken: (R1) bis (R3), (A1) bis (A3) sowie:

(R4) Wenn ϕ ein Theorem ist, so auch $\Box\phi$.
K $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$.

weitere Axiome:

D $\Box\phi \to \Diamond\phi$
T $\Box\phi \to \phi$
4 $\Box\phi \to \Box\Box\phi$
E $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$ bzw. $\neg\Box\phi \to \Box\neg\Box\phi$
B $\phi \to \Box\Diamond\phi$
H $(\Diamond\phi \wedge \Diamond\psi) \to (\Diamond(\phi \wedge \psi) \vee \Diamond(\phi \wedge \Diamond\psi) \vee \Diamond(\psi \wedge \Diamond\phi))$
Triv $\phi \to \Box\phi$
Ver $\Box\phi$

daraus resultierende Logiken:

KT = **T**
KT4 = **S4**
KT4B = **KT4E** = **S5**
KD = **D** oder deontisches **T**
KD4 = **D4** oder deontisches **S4**
KD4E = **D4E** oder deontisches **S5**
KTB = Brouwersches System
Triv = **KD** + **Triv**
Ver = **K** + **Ver**

minimale Zeitlogik $\mathbf{K}_t$:

$\mathbf{C}_P$ $\phi \to [P]\langle F\rangle\phi$
$\mathbf{C}_F$ $\phi \to [F]\langle P\rangle\phi$
$\mathbf{4}_F$ $[F]\phi \to [F][F]\phi$
$\mathbf{4}_P$ $[P]\phi \to [P][P]\phi$

Zeitlogik mit linearer Ordnung $\mathbf{K}_t'$:

H$_F$ $(\langle F\rangle\phi \wedge \langle F\rangle\psi) \rightarrow (\langle F\rangle(\phi \wedge \psi) \vee \langle F\rangle(\phi \wedge \langle F\rangle\psi) \vee \langle F\rangle(\psi \wedge \langle F\rangle\phi)),$
H$_P$ $(\langle P\rangle\phi \wedge \langle P\rangle\psi) \rightarrow (\langle P\rangle(\phi \wedge \psi) \vee \langle P\rangle(\phi \wedge \langle P\rangle\psi) \vee \langle P\rangle(\psi \wedge \langle P\rangle\phi)).$

nicht-normale Systeme **S1** bis **S3**: (R1) bis (R3) und (A1) bis (A3) plus

(R5) ϕ / $\Box\phi$, falls ϕ eine L_A-Tautologie oder ein Axiom ist.

sowie Axiome aus:

1 $(\phi \prec \psi \wedge \psi \prec \chi) \rightarrow (\phi \prec \chi)$
2 $\Diamond(\phi \wedge \psi) \prec \Diamond\phi$
3 $(\phi \prec \psi) \prec (\neg\Diamond\phi \prec \neg\Diamond\psi)$
4’ $\Box\phi \prec \Box\Box\phi$
E’ $\Diamond\phi \prec \Box\Diamond\phi$

und zwar erhält man:

S1 = (R6) + **T** + **1**
S2 = **S1** + **2**
S3 = **S1** + **3**
S4 = **S1** + **4’**
S5 = **S1** + **E’**

konditionale Logik **C**: (R1) bis (R3) und (A1) bis (A3) plus:

(R6) $\phi \leftrightarrow \psi$ / $(\phi > \chi) \leftrightarrow (\psi > \chi)$
(R7) $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ / $((\chi > \phi_1) \wedge \ldots \wedge (\chi > \phi_n)) \rightarrow (\chi > \psi)$

parakonsistente Logik **P**: normale Modallogik mit den Axiomen:

FU $\Diamond\phi \leftrightarrow \Box\phi$
NE $\phi \leftrightarrow {\sim}{\sim}\phi$

parakonsistente epistemische Logik **PE**: normale Modallogik mit den Axiomen:

$\neg W\neg\phi \leftrightarrow W\phi$
$\neg F\neg\phi \leftrightarrow F\phi$
$FF\phi \leftrightarrow \phi$
$WW\phi \leftrightarrow \phi$
$FW\phi \leftrightarrow \neg W\phi$
$WF\phi \leftrightarrow F\phi$

bei der parakonsistenten Wissenslogik **PET** zusätzlich die Axiome:

$W\phi \rightarrow \phi$
$F\phi \rightarrow \neg\phi$

quantifizierte Modallogik (unvollständiger Kalkül): (R1) bis (R4), (A1) bis (A3).
bei konstanter Domäne **Cons** außerdem:

BF $\forall^{\mathsf{E}} x.\Box\phi \to \Box\forall^{\mathsf{E}} x.\phi$
CBF $\Box\forall^{\mathsf{E}} x.\phi \to \forall^{\mathsf{E}} x.\Box\phi$

bei starren Konstanten **Rig** außerdem:

R $\downarrow c = \downarrow d \to \Box\downarrow c = \downarrow d$

L_h hybride Aussagenlogik
$L_{s-h}(S, R, P_h)$ starre hybride Logik

Ł$_3$ dreiwertige Łukasiewicz-Logik: ($\neg$1), ($\wedge$1), ($\vee$1) und ($\to$1)
K_3 dreiwertige Kleene-Logik: ($\neg$1), ($\wedge$1), ($\vee$1) und ($\to$K)
LP parakonsistente Logik: K_3 plus $\mathcal{D} := \{1, \mathrm{i}\}$
RM_3 parakonsistente Logik: wie LP nur ($\to$RM)
FDE *first degree entailment*: vierwertige Logik (wahrheitsrelational zweiwertig)

Literaturverzeichnis

Jon Barwise (Hg.) (1977): *Handbook of mathematical logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 7. Auflage.

Jon Barwise & Solomon Feferman (Hg.) (1985): *Model-Theoretic Logics*. Springer-Verlag, New York.

Ansgar Beckermann (2003 [1997]): *Einführung in die Logik*. de Gruyter, Berlin, 2. Auflage.

Ermanno Bencivenga (2002): Free Logics. In (Gabbay & Guenthner, 2001ff, V, S. 147-196).

Patrick Blackburn, Maarten de Rijke & Yde Venema (2001): *Modal Logic*. Cambridge University Press, Cambridge.

Patrick Blackburn, Johan van Benthem & Frank Wolter (Hg.) (2006): *Handbook of Modal Logic*. Elsevier Science, Amsterdam.

Stephen Blamey (2002): Partial Logic. In Gabbay & Guenthner (2001ff, V, S. 261-353).

Joseph M. Bochenski (2002 [1956]): *Formale Logik*. Karl Alber, Freiburg, 5. Auflage.

George S. Boolos, John P. Burgess & Richard C. Jeffrey (2002): *Computability and Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 4. Auflage.

Theodor Bucher (1998 [1987]): *Einführung in die angewandte Logik*. Walter de Gruyter, Berlin, 2. Auflage.

Robert Bull & Krister Segerberg (2001): Basic Modal Logic. In Gabbay & Guenthner (2001ff, III, S. 1-82).

Rudolf Carnap (1932): Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache. *Erkenntnis* 2, S. 219-241.

— (1956 [1947]): *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*. University of Chicago Press, Chicago.

— (1968 [1934]): *Logische Syntax der Sprache*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage.

— (1972): *Bedeutung und Notwendigkeit*. Springer-Verlag, Wien, 2. Auflage.

Alonzo Church (1946): A formulation of the logic of sense and denotation. *Journal of Symbolic Logic* 11, S. 31.

Christian Damböck (2005): Semantische Strategien. Philosophische Logik vor dem Hintergrund von Endlichkeit und Starrheit. *Dissertation, Universität Wien*.

— (2009): Philosophical Logic in a Framework of Propositional Logic. *Logique et Analyse* 205, 21-37.

Donald Davidson & Gilbert Harman (Hg.) (1972): *Semantics of Natural Language*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 2. Auflage. Synthese Library / Volume 40.

Heinz-Dieter Ebbinghaus (1994): *Einführung in die Mengentheorie*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 3. Auflage.

Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum & Wolfgang Thomas (1996): *Einführung in die mathematische Logik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 4. Auflage.

Melvin Fitting (2002): *Types, Tableaus, and Gödel's God*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Melvin Fitting & Richard L. Mendelsohn (1998): *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. Synthese Library / Volume 277.

Graeme Forbes (1994): *Modern Logic. A Text in Elementary Symbolic Logic*. Oxford University Press, New York.

Torkel Franzén (2005): *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to its Use and Abuse*. A K Peters, Wellesley.

Gottlob Frege (1892a): über Begriff und Gegenstand. *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie* 16, 1892, S. 192-205.

— (1892b): über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* NF100, S. 25-50. Zitiert nach Frege (1990, S. 143-162).

— (1988 [1879]): *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Olms, Hildesheim.

— (1990): *Kleine Schriften. Herausgegeben und mit Nachbemerkungen zur Neuauflage versehen von Ignacio Angelelli*. Olms, Hildesheim, 2. Auflage.

Dov M. Gabbay & Franz Guenthner (Hg.) (2001ff): *Handbook of Philosophical Logic*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2. Auflage.

Dov M. Gabbay & John Woods (Hg.) (2004ff): *Handbook of the History of Logic*. Elsevier Science, Amsterdam.

Lou Goble (Hg.) (2001): *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Blackwell Publishing, Malden.

Kurt Gödel (1986): *Collected Works, Volume I, Publications 1929 - 1936*. Oxford University Press, New York.

Robert Goldblatt (1992): *Logics of Time and Computation*. Center for the Study of Language and Information, Stanford, 2. Auflage.

Siegfried Gottwald (1989): *Mehrwertige Logik*. Akademie Verlag, Berlin.

Anil Gupta & Nuel Belnap (1993): *The Revision Theory of Truth*. The MIT Press, Cambridge Massachusetts London England.

Susan Haack (1978): *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press, Cambridge.

Wilfrid Hodges (2001): Elementary Predicate Logic. In (Gabbay & Guenthner, 2001ff, I, S. 1-130).

Paul Hoyningen-Huene (1998): *Formale Logik. Eine philosophische Einführung*. Philipp Reclam jun., Stuttgart.

G.E. Hughes & M.J. Cresswell (1996): *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, London.

Edmund Husserl (1981 [1929]): *Formale und transzendentale Logik*. Niemeyer, Tübingen.

Dale Jacquette (Hg.) (2001): *Philosophy of Logic: An Anthology*. Blackwell Publishing, Malden.

— (2002): *A Companion to Philosophical Logic*. Blackwell Publishing, Malden.

Edward L. Keenan & Dag Westerståhl (1997): Generalized Quantifiers in Linguistics and Logic. In (van Benthem & ter Meulen, 1997, S. 837-893).

William Kneale & Martha Kneale (1962): *The Development of Logic*. Oxford University Press, New York.

Lothar Kreiser, Siegfried Gottwald & Werner Stelzner (1987): *Nichtklassische Logik*. Akademie Verlag, Berlin.

Saul A. Kripke (1975): Outline of a Theory of Truth. *The Journal of Philosophy* 6, 690-716.

— (1980): *Naming and Necessity*. Harvard University Press, Cambridge.

Franz von Kutschera (1976): *Einführung in die intensionale Semantik*. Walter de Gruyter, Berlin.

Franz von Kutschera & Alfred Breitkopf (2007 [1971]): *Einführung in die moderne Logik*. Alber, Freiburg, 8. Auflage.

Wolfgang Lenzen (1980): *Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit. Systeme der epistemischen Logik*. Springer-Verlag, Wien.

— (2004): *Calculus Universalis. Studien zur Logik von G. W. Leibniz*. Mentis, Paderborn.

David Lewis (1986): *On the Plurality of Worlds*. Blackwell Publishing, New York.

Richard Montague (1972): Pragmatics and Intensional Logic. in: (Davidson & Harman, 1972, S. 142-168).

Volker Peckhaus (1997): *Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft. Leibniz und die Wiederentdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert*. Akademie Verlag, Berlin.

Graham Priest (2002): Paraconsistent Logic. In (Gabbay & Guenthner, 2001ff, VI, S. 287-393).

— (2008 [2001]): *An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is*. Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage.

Graham Priest, C. Beall, J. & Bradley Armour-Garb (Hg.) (2004): *The Law of Non-Contradiction. New Philosophical Essays*. Clarendon Press, Oxford.

Willard Van Orman Quine (1963): Carnap and Logical Truth. In (Schilpp, 1963, S. 385-406).

— (1980): *From a Logical Point of View*. Harvard University Press, Cambridge, 2. Auflage.

— (1980 [1948]): On what there is. In Quine (1980, S. 1-19).

— (1980 [1951]): Two dogmas of empiricism. In Quine (1980, S. 20-46).

— (1986 [1970]): *Philosophy of Logic*. Harvard University Press, Cambridge, 2. Auflage.

Bertrand Russell (1905): On Denoting. *Mind* 14, S. 479-493.

Paul Arthur Schilpp (Hg.) (1963): *The Philosophy of Rudolf Carnap*. Open Court, Chicago.

Stewart Shapiro (2000): *Foundations Without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*. Oxford University Press, New York.

— (2001): Systems Between First-Order and Second-Order Logics. In Gabbay & Guenthner (2001ff, I, S. 131-187).

Stewart Shapiro (Hg.) (2005): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford University Press, New York.

Joseph R. Shoenfield (1967): *Mathematical Logic*. Association for Symbolic Logic, Natick Massachusetts.

Raymond M. Smullyan (1995): *First-Order Logic*. Dover Publications, New York.

Angelika Steger (2001): *Diskrete Strukturen. Band 1. Kombinatorik – Graphentheorie – Algebra*. Springer-Verlag, Berlin.

Wolfgang Stegmüller & Matthias Varga von Kibéd (1984): *Strukturtypen der Logik. Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie Band III*. Springer-Verlag, Berlin.

Göran Sundholm (2001): Systems of Deduction. In Gabbay & Guenthner (2001ff, II, S. 1-52).

Alfred Tarski (1983): *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*. Hackett Publishing Company, Indianapolis, 2. Auflage.

Johan van Benthem (1995): *Language in Action. Categories, Lambdas, and Dynamic Logic*. The MIT Press, Cambridge Massachusetts London England.

Johan van Benthem & Kees Doets (2001): Higher-Order Logic. In Gabbay & Guenthner (2001ff, I, S. 189-244).

Johan van Benthem & Alice ter Meulen (Hg.) (1997): *Handbook of Logic and Language*. Elsevier Science, Amsterdam.

Ludwig Wittgenstein (2001 [1922]): *Logisch-philosophische Abhandlung. Tractatus logico-philosophicus. Kritische Edition. Herausgegeben von Brian McGuinness und Joachim Schulte*. Suhrkamp, Frankfurt/Main, 2. Auflage.

Edward N. Zalta (1988): *Intensional Logic and The Metaphysics of Intentionality*. The MIT Press, Cambridge Massachusetts London England.

Thomas Zoglauer (2005): *Einführung in die formale Logik für Philosophen*. Vandenhoeck & Rupprecht, Göttingen, 3. Auflage.