

3 Partialordnungen

3.1 Grundbegriffe Posets

Definition 3.1.1. Es sei \leq eine Relation auf einer Menge P . Dann heißt (P, \leq) eine *Partialordnung* oder *partiell-* oder *teilweise geordnet* oder kurz *Poset*, wenn folgende drei Eigenschaften für alle $x, y, z \in P$ erfüllt sind:

1. $x \leq x$ (Reflexivität).
2. Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$ dann ist $x = y$ (Antisymmetrie).
3. Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$ dann ist $x \leq z$ (Transitivität).

Zwei Punkte x, y in P heißen *vergleichbar*, wenn $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Sind alle Elemente von P paarweise vergleichbar, so heißt P *total geordnet*.

Wenn $x \leq y$ und $x \neq y$, dann schreiben wir $x < y$. Wir sagen ‘ y bedeckt x ’ (Notation: $x \triangleleft y$), wenn

$$x < y \quad \text{und} \quad x \leq z \leq y \Rightarrow z \in \{x, y\}.$$

Definition 3.1.2. Ein *Hassediagramm* eines Posets (P, \leq) ist ein gerichteter Graph $X = (VX, EX)$ mit $VX = P$ und

$$EX = \{(x, y) : x, y \in P, x \triangleleft y\}.$$

Die Orientierung der Kanten im Hassediagramm wird wie im folgenden Beispiel zumeist nicht durch Pfeile angezeigt, sondern die Kanten werden immer als nach oben gerichtet angenommen.

Beispiel 3.1.3. Siehe Abbildung 30.

1. $P = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ mit $a \triangleleft b, a \triangleleft c, b \triangleleft d, c \triangleleft e, d \triangleleft f, e \triangleleft f, c \triangleleft g$.
2. $([n], \leq)$ wobei \leq die natürliche Ordnung ist.
3. Teilmengenposet $([n], \subset)$
4. Permutationen (S_n, \leq)
 - (a) \leq ist die lexikografische Ordnung (lineare Ordnung).
 - (b) \leq ist definiert durch $\pi \triangleleft \sigma$ genau dann, wenn

$$\exists i \in [n-1] : \pi(i) < \sigma(i) \quad \text{und} \quad \forall j \in [n] \setminus \{i, i+1\} : \pi(j) = \sigma(j).$$

5. Teilerposet $T_n = \{m : m|n\}, (T_n, |)$

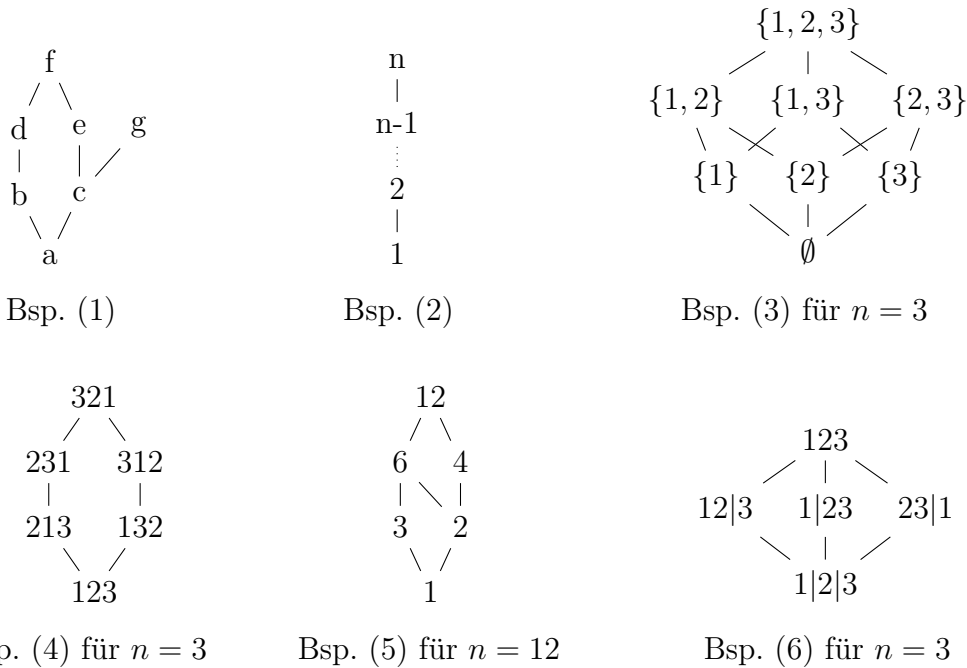


Abbildung 30: Hassediagramme

6. Partitionen von $[n]$ mit der Relation ‘feiner als’

Definition 3.1.4. Zwei Posets (P, \leq_P) und (Q, \leq_Q) heißen *isomorph*, wenn es eine Bijektion $\varphi : P \rightarrow Q$ gibt, sodass

$$x \leq_P y \iff \varphi(x) \leq_Q \varphi(y).$$

Wir nennen $Q \subset P$ (*induziertes*) *Teilposet*, wenn

$$\forall x, y \in Q : x \leq_Q y \iff x \leq_P y.$$

Das *Intervall* $[x, y]$ ist definiert als $\{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Wenn $x \not\leq y$, dann ist folglich $[x, y] = \emptyset$.

Ein $x \in P$ heißt *maximales* bzw. *minimales Element*, wenn $x \leq y$ bzw. $y \leq x$ implizieren, dass $x = y$ ist. Wir nennen x *Maximum* bzw. *Minimum* (Notation: $\hat{1}$ bzw. $\hat{0}$), wenn $y \leq x$ bzw. $x \leq y$ für alle $y \in P$. Aus der Antisymmetrie folgt, dass Maximum und Minimum eindeutig sind, sofern sie existieren. Ein Poset kann jedoch mehrere maximale oder minimale Elemente haben.

Eine *Kette* der Länge n von x nach y ist eine Folge (z_i) mit

$$x = z_0 < z_1 < \dots < z_n = y.$$

Gelegentlich betrachten wir Ketten auch als Mengen und nicht als Folgen. Die Kette heißt *saturiert* oder *gesättigt*, wenn

$$x = z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_n = y.$$

Ein Poset hat die *Jordan-Dedekind-Eigenschaft* (JDE), wenn gesättigte Ketten mit gleichem Anfangs- und Endpunkt endlich und gleich lang sind.

Für Posets mit Minimum $\hat{0}$ und (JDE) definieren wir den *Rang* $\text{rg}(x)$ eines Elements x als die Länge einer saturierten Kette von $\hat{0}$ nach x .

Definition 3.1.5. Eine Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{Z}$ heißt *Rangfunktion*, wenn

$$\forall x, y \in P : x \leq y \iff f(x) + 1 = f(y).$$

Ein Poset, für das eine Rangfunktion existiert, heißt *graduirt*.

Der Rang in einem Poset mit $\hat{0}$ und (JDE) ist eine Rangfunktion.

Beispiel 3.1.6.

1. Das Poset in Abbildung 31 links erfüllt die (JDE) nicht, hat keine Rangfunktion und ist daher nicht graduirt.
2. Das Poset in Abbildung 31 rechts hat kein Minimum, daher ist der Rang nicht im obigen Sinn definiert. Allerdings gibt es eine Rangfunktion.

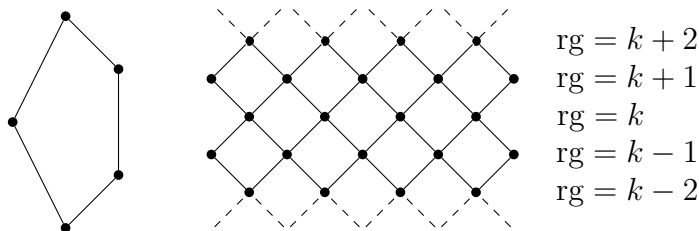


Abbildung 31: Graduierte und nicht graduierte Posets

Ein Poset heißt *total* oder *linear* geordnet, wenn jedes Punktepaar in Relation zu einander steht. Formal, für alle $x, y \in P$ ist $x \leq y$ oder $y \leq x$. Das Hasse Diagramm eines linear geordneten endlichen Posets ist ein Weg (eine Linie) wie in Beispiel 3.1.3(2). Eine Kette in einem Poset ist also nichts anderes als ein linear geordnetes Teilposet.

Definition 3.1.7. Eine *Antikette* ist eine Menge paarweise nicht vergleichbarer Elemente.

Beispiel 3.1.8. Abbildung 32 zeigt links eine Kette und rechts eine Antikette (beide weiß gezeichnet) im selben Poset.

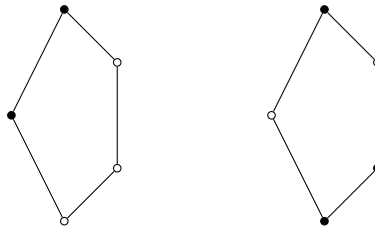


Abbildung 32: Kette und Antikette

3.2 Grundbegriffe Verbände

Definition 3.2.1. Es sei (P, \leq) ein Poset und $M \subset P$.

1. Ein $z \in P$ heißt *Infimum* von M (Notation: $\inf M$), wenn es die größte untere Schranke von M ist, das heißt:
 - (a) Für alle $x \in M$ ist $z \leq x$, (z ist untere Schranke).
 - (b) Wenn $w \leq x$ für alle $x \in M$, dann ist $w \leq z$, (andere untere Schranken sind kleiner oder gleich z).
2. Ein $z \in P$ heißt *Supremum* von M (Notation: $\sup M$), wenn es die kleinste obere Schranke von M ist, das heißt:
 - (a) Für alle $x \in M$ ist $x \leq z$, (z ist obere Schranke).
 - (b) Wenn $x \leq w$ für alle $x \in M$, dann ist $z \leq w$, (andere obere Schranken sind größer oder gleich z).

Lemma 3.2.2. Eine Menge hat höchstens ein Infimum (bzw. ein Supremum).

Beweis. Angenommen x und y sind zwei Infima von M . Aus Teil (1.b) der Definition 3.2.1 folgen dann $x \leq y$ und $y \leq x$. Wegen 3.1.1 (2) (Antisymmetrie) ist $x = y$. Für das Supremum läuft der Beweis analog. \square

Notation 3.2.3.

$$x \wedge y := \inf\{x, y\}$$

$$x \vee y := \sup\{x, y\}$$

Sprich *meet* (\wedge) und *join* (\vee).

Definition 3.2.4. Ein Poset (P, \leq) heißt *Verband* (engl. *lattice*), wenn alle Punktpaare ein Infimum und ein Supremum besitzen.

Lemma 3.2.5. Für einen Verband P sind \wedge und \vee assoziativ. Das heißt, für alle $x, y, z \in P$ gelten:

1. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

$$2. (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

Beweis. Wir setzen $w_1 := (x \wedge y) \wedge z$ und $w_2 := x \wedge (y \wedge z)$ und erhalten

$$w_1 \leq x, y, z \quad \Rightarrow \quad w_1 \leq x, w_1 \leq y \wedge z \quad \Rightarrow \quad w_1 \leq w_2$$

und

$$w_2 \leq x, y, z \quad \Rightarrow \quad w_2 \leq z, w_2 \leq x \wedge y \quad \Rightarrow \quad w_2 \leq w_1$$

also $w_1 = w_2$. Die Gleichheit von $(x \vee y) \vee z$ und $x \vee (y \vee z)$ folgt analog.

$$w_1 \geq x, y, z \quad \Rightarrow \quad w_1 \geq x, w_1 \geq y \vee z \quad \Rightarrow \quad w_1 \geq w_2$$

und

$$w_2 \geq x, y, z \quad \Rightarrow \quad w_2 \geq z, w_2 \geq x \vee y \quad \Rightarrow \quad w_2 \geq w_1$$

also $w_1 = w_2$. □

Bemerkung 3.2.6. Nach den Lemmata 3.2.2 und 3.2.5 sind das Infimum $\bigwedge M$ und das Supremum $\bigvee M$ einer endlichen Teilmenge $M \subset P$ eines Verbands P wohldefiniert.

Korollar 3.2.7. Jeder endliche Verband P hat genau ein Infimum und genau ein Supremum. Notation: $\hat{0} = \bigwedge P$, $\hat{1} = \bigvee P$.

3.3 Der Satz von Sperner

Im Teilmengenverband $(\mathcal{P}([n]), \subset)$ ist $\hat{0} = \emptyset$ und $\hat{1} = [n]$, siehe Beispiel 3.1.3 (3).

Satz 3.3.1 (Sperner 1928). Für eine Antikette \mathcal{A} in $(\mathcal{P}([n]), \subseteq)$ ist

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Bemerkung 3.3.2. Diese obere Schranke ist ‘scharf’ (d.h. es gibt ein Beispiel, für das Gleichheit gilt), denn für die Antikette $\mathcal{A} = \{M \subset [n] : |M| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ ist $|\mathcal{A}| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Beweis. Wir sagen, dass eine Permutation π von $[n]$ mit $M \subset [n]$ *beginnt*, wenn

$$\{\pi(1), \dots, \pi(|M|)\} = M.$$

Beispielweise beginnt die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ mit $M_1 = \{2\}$, $M_2 = \{2, 4\}$, $M_3 = \{2, 4, 1\}$, etc.

Es beginnen $|M|! \cdot (n - |M|)!$ Permutationen von $[n]$ mit M , denn es gibt $|M|!$ Möglichkeiten die ersten $|M|$ Elemente anzuordnen und $(n - |M|)!$ Möglichkeiten

die übrigen Elemente anzuordnen. Eine Permutation kann nicht mit zwei verschiedenen Elementen von \mathcal{A} beginnen, da \mathcal{A} eine Antikette ist. Es sei

$$A_k := |\{A \in \mathcal{A} : |A| = k\}|.$$

Dann ist

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} A_k k! (n - k)! = \sum_{A \in \mathcal{A}} |A|! (n - |A|)! \leq n!,$$

weil der mittlere Ausdruck keine Permutation von $[n]$ doppelt zählen kann. Division durch $n!$ ergibt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Es ist

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

und somit

$$|\mathcal{A}| = \sum_{k \in \mathbb{N}} A_k = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A_k}{\binom{n}{k}} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

□

Bemerkung 3.3.3. In $(\mathcal{P}([n]), \subset)$ gilt

$$|\{x \in P : \text{rg}(x) = k\}| = \binom{n}{k}.$$

In dem obigen Beweis von Satz 3.3.1 bedeutet

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A_k}{\binom{n}{k}} \leq 1,$$

dass die Summe der relativen Anteile aus den Rangebenen in \mathcal{A} kleiner 1 ist.

Definition 3.3.4. Der *Rang* eines endlichen Verbandes (P, \leq) ist $\text{rg}(P) := \text{rg}(\hat{1})$. Eine Kette $x_1 \leq \dots \leq x_k$ heißt *symmetrisch*, wenn sie saturiert ist und

$$\text{rg}(x_1) + \text{rg}(x_k) = \text{rg}(P)$$

ist.

Beispiel 3.3.5.

1. Im Teilmengenverband $(\mathcal{P}([n]), \subset)$ ist die Kette $x_1 \subset \dots \subset x_k$ genau dann symmetrisch, wenn $|x_1| + |x_k| = n$ und $|x_{i+1}| = |x_i| + 1$ für alle i ist.

In $(\mathcal{P}([4]), \subset)$ sind etwa $(\{1, 2\})$ oder $(\{1\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\})$ symmetrische Ketten. In $(\mathcal{P}([5]), \subset)$ ist $(\{1, 2\}, \{1, 2, 5\})$ eine symmetrische Kette.

2. Im Teilverband $(T_n, |)$ entspricht der Rang der Anzahl der Primfaktoren. In $(T_{60}, |)$ ist etwa $\text{rg}(30) = \text{rg}(2 \cdot 3 \cdot 5) = 3$. Beispiele symmetrischer Ketten sind (2^2) , $(3, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3)$ oder $(3, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 5)$. Beispiele von Antiketten sind $\{2^2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2^2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5\}$.

Bemerkung 3.3.6. Jeder Teilmengenverband ist isomorph zu einem Teilverband. Teilverbände sind daher allgemeiner als Teilmengenverbände. Jeder Satz über Teilverbände gilt auch für Teilmengenverbände.

Beweis. Es sei $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_m$ das Produkt von paarweise verschiedenen Primzahlen. Dann ist $(T_n, |) \cong ([m], \subset)$, denn

$$\varphi : (T_n, |) \rightarrow ([m], \subset), \quad p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_k} \mapsto \{i_1, \dots, i_k\}$$

mit $1 \mapsto \emptyset$ ist ein Isomorphismus. □

Definition 3.3.7. Eine *Kettenzerlegung* \mathcal{K} eines Posets (P, \leq) ist eine Menge paarweiser disjunkter Ketten, deren Vereinigung ganz P ist. Die Zerlegung \mathcal{K} heißt *symmetrisch*, wenn alle Ketten in \mathcal{K} symmetrisch sind.

Satz 3.3.8 (de Bruijn 1951). Für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt der Teilverband $(T_n, |)$ eine symmetrische Kettenzerlegung.

Beweis. Wir betrachten eine natürliche Zahl

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$$

mit paarweise verschiedenen Primfaktoren p_i und induzieren nach m . Für $m = 1$ ist $n = p_1^{\alpha_1}$ und der ganze Verband $T_n = \{1, p, p^2, \dots, p^{\alpha_1}\}$ ist eine einzige symmetrischen Kette. Nehmen wir nun an, der Satz sei für alle $M \leq m$ bereits gezeigt. Es sei

$$n = n' p^\alpha$$

wobei n' nicht von der Primzahl p geteilt wird und m verschiedene Primteiler hat. Also ist n eine Zahl mit $m + 1$ verschiedenen Primteilern. Nach Induktion ist $T_{n'}$ eine disjunkte Vereinigung von symmetrischen disjunkten Ketten. Es sei (x_1, \dots, x_k) eine solche Kette in $T_{n'}$, dann sind

$$\begin{array}{cccccccc} x_1, & x_2, & \dots & x_{k-1}, & x_k, & x_k p, & x_k p^2, & \dots & x_k p^\alpha \\ x_1 p, & x_2 p, & \dots & x_{k-2} p, & x_{k-1} p, & x_{k-1} p^2, & x_{k-1} p^3, & \dots & x_{k-1} p^\alpha \\ x_1 p^2, & x_2 p^2, & \dots & x_{k-3} p^2, & x_{k-2} p^2, & x_{k-2} p^3, & x_{k-2} p^4, & \dots & x_{k-2} p^\alpha \\ \vdots & & & & & & & & \end{array}$$

symmetrische Ketten in T_n . Die Ketten lassen sich auch in folgendem Schema ‘L-förmig’ ablesen:

$$\begin{array}{cccccc}
 x_1, & x_1p, & x_1p^2, & \dots & x_1p^{\alpha-1}, & x_1p^\alpha, \\
 x_2, & x_2p, & x_2p^2, & \dots & x_2p^{\alpha-1}, & x_2p^\alpha \\
 x_3, & x_3p, & x_3p^2, & \dots & x_3p^{\alpha-1}, & x_3p^\alpha \\
 \vdots & & & & & \vdots \\
 x_{k-1}, & x_{k-1}p, & x_{k-1}p^2, & \dots & x_{k-1}p^{\alpha-1}, & x_{k-1}p^\alpha \\
 x_k, & x_kp, & x_kp^2, & \dots & x_kp^{\alpha-1}, & x_kp^\alpha
 \end{array}$$

Dies sind tatsächlich Ketten, denn erstens sind sie saturiert und zweitens sind sie symmetrisch, denn

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg}(x_1p^i) + \operatorname{rg}(x_{k-i}p^\alpha) &= \operatorname{rg}(x_1) + i + \operatorname{rg}(x_{k-i}) + \alpha = \\
 \operatorname{rg}(x_1) + i + \operatorname{rg}(x_k) - i + \alpha &= \operatorname{rg}(x_1) + \operatorname{rg}(x_k) + \alpha = \operatorname{rg}(T'_n) + \alpha = \operatorname{rg}(T_n).
 \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.3.9. Nach Bemerkung 3.3.6 gilt Satz 3.3.8 auch für Teilmengenverbände. Wir suchen eine symmetrische Kettenzerlegung von $(\mathcal{P}([5]), \subset)$. Dabei gehen wir von einer symmetrischen Kettenzerlegung von $(\mathcal{P}([4]), \subset)$ aus (siehe Abb 33) und erzeugen daraus nach dem Schema aus dem Beweis von Satz 3.3.8 neue Ketten in $(\mathcal{P}([5]), \subset)$ die ganz $\mathcal{P}([5])$ überdecken (siehe Abb 34).

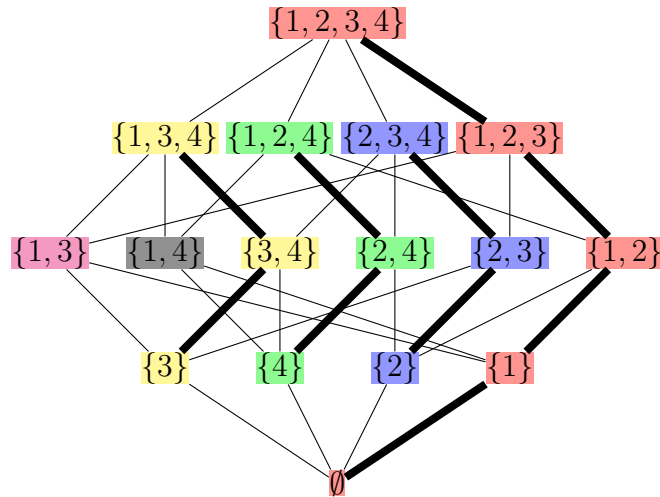


Abbildung 33: symmetrische Kettenzerlegung von $(\mathcal{P}([4]), \subset)$

Bemerkung 3.3.10. Wir können den Satz von Sperner alternativ aus dem Satz von de Bruijn beweisen. Letzterer impliziert, dass $(\mathcal{P}([n]), \subset)$ eine symmetrische

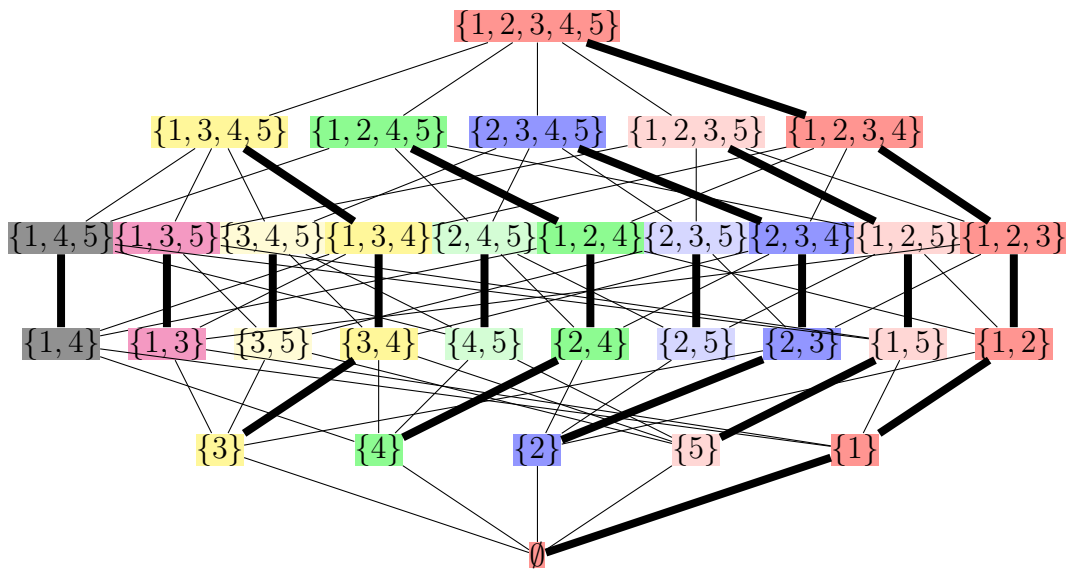


Abbildung 34: symmetrische Kettenzerlegung von $(\mathcal{P}([5]), \subset)$

Kettenzerlegung \mathcal{K} besitzt. Jede Kette $K \in \mathcal{K}$ muss ein Element $M \subset [n]$ mit $\text{rg}(M) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ enthalten. Weil es nur $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ solche Mengen M gibt, gilt

$$|\mathcal{K}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Eine Antikette \mathcal{A} kann höchstens ein Element jeder Kette aus einer Kettenzerlegung enthalten, daher folgt

$$|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{K}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

□

3.4 Der Satz von Dilworth

Satz 3.4.1 (Dilworth 1950). In jedem endlichen Poset P ist die Kardinalität einer maximalen Antikette \mathcal{A} gleich der Kardinalität einer minimalen Kettenzerlegung \mathcal{K} .

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{K}|$$

Der folgende Beweis stammt von Perles (1960).

Beweis. Die Menge der maximalen Elemente von P bezeichnen wir mit $\text{Max}(P)$, die Menge der minimalen Elemente mit $\text{Min}(P)$. Beachte, dass $\text{Max}(P)$ und $\text{Min}(P)$ Antiketten sind.

Wie schon in 3.3.10 erklärt, wissen wir dass $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{K}|$ ist.

Um zu zeigen, dass $|\mathcal{K}| \leq |\mathcal{A}|$ ist, führen wir einen Induktionsbeweis nach $|P|$. Der Induktionsanfang für $|P| = 1$ ist klar. Nehmen wir nun an, der Satz gilt für alle Posets Q mit $|Q| < |P|$. Wir unterscheiden:

Fall 1. Es gibt eine maximale Antikette \mathcal{A} mit $\mathcal{A} \neq \text{Max}(P)$ und $\mathcal{A} \neq \text{Min}(P)$. Eine solche teilt das Poset dann in ein nicht leeres ‘Oben’

$$P^+ := \{x \in P : \exists y \in \mathcal{A} : x \geq y\}$$

und ein nicht leeres ‘Unten’

$$P^- := \{x \in P : \exists y \in \mathcal{A} \text{ mit } x \leq y\}.$$

Das heißt $|P^+|, |P^-| < |P|$ und $P^+ \cup P^- = P$ und $\mathcal{A} = P^+ \cap P^-$.

Die Menge \mathcal{A} ist auch in den Posets P^+ und P^- jeweils eine maximale Antikette. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung gibt es Kettenzerlegungen \mathcal{K}^+ von P^+ und \mathcal{K}^- von P^- mit $|\mathcal{K}^+| \leq |\mathcal{A}|$ und $|\mathcal{K}^-| \leq |\mathcal{A}|$. Jedes $x_i \in \mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_m\}$ muss sowohl in genau einer Kette $C_i^+ \in \mathcal{K}^+$ als auch in genau einer Kette $C_i^- \in \mathcal{K}^-$ enthalten sein. Wir setzen die entsprechenden Ketten zu Ketten in P zusammen und erhalten die gesuchte Kettenzerlegung

$$\mathcal{K} = \{C_1^+ \cup C_1^-, \dots, C_m^+ \cup C_m^-\}$$

von P .

Fall 2. Die einzigen maximalen Antiketten sind $\text{Max}(P)$ und/oder $\text{Min}(P)$.

Es gibt $a \in \text{Min}(P)$ und $b \in \text{Max}(P)$ mit $a \leq b$. Die größte Antikette in $P \setminus \{a, b\}$ hat dann $|\mathcal{A}| - 1$ Elemente. Nach Induktion gibt es eine Kettenzerlegung \mathcal{K}' von $P \setminus \{a, b\}$ mit genau $|\mathcal{A}| - 1$ Elementen. Wir wählen $\{a, b\}$ als $|\mathcal{A}|$ -te Kette und erhalten die gesuchte Zerlegung \mathcal{K} von P . Beachte, dass $a = b$ sein kann. \square

Bemerkung 3.4.2. In Fall 2 des obigen Beweises ist es nicht möglich, dass sich a oder b einer Kette in \mathcal{K}' hinzufügen lassen. Schliesslich muss jede der $m - 1$ Ketten in \mathcal{K}' ein Element aus $\text{Max}(P \setminus \{a, b\})$ und/oder eines aus $\text{Min}(P \setminus \{a, b\})$ enthalten, diese wären mit zumindest einem der Elemente a und b unvergleichbar.

3.5 Eine Anwendung: Der Heiratsatz

Es sollen n Frauen $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ und n Männer $M = \{y_1, \dots, y_n\}$ miteinander verheiratet werden. Die Menge der Männer, die von Frau x_i als Ehemann akzeptiert würden bezeichnen wir mit A_i . In welcher Situation können alle verheiratet werden? Die Antwort liefert der folgende Satz.

Satz 3.5.1 (Heiratssatz). Es können genau dann alle verheiratet werden, wenn die folgende ‘Heiratsbedingung’ erfüllt ist:

$$\text{Für } k \text{ verschiedene } i_1, \dots, i_k \text{ ist } |A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}| \geq k$$

Beweis. Wir definieren ein Poset $(M \cup F, \leq)$ durch $x_i < y_i$ wenn $y_i \in A_i$, also wenn die Frau x_i den Mann y_i heiraten würde. Das Hassediagramm ist ein bipartiter Graph. Gesucht ist ein perfektes Matching. Das ist eine Menge paarweise disjunkter Kanten, die ganz $M \cup F$ überdecken.

\Rightarrow Wenn die Verheiratung funktioniert, müssen in $A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}$ die k Ehemänner enthalten sein, daher ist die Heiratsbedingung erfüllt.

\Leftarrow Nehmen wir umgekehrt an, dass die Heiratsbedingung erfüllt ist. Es gibt Antiketten mit n Elementen, zum Beispiel F oder M . Es sei \mathcal{A} eine andere Antikette. Wir können die Elemente so umlabeln, dass

$$\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s\}$$

ist. Aufgrund der Heiratsbedingung gilt

$$|A_1 \cup \dots \cup A_r| \geq r.$$

Da \mathcal{A} eine Antikette ist, gilt

$$y_1, \dots, y_s \notin A_1 \cup \dots \cup A_r.$$

Daher ist

$$A_1 \cup \dots \cup A_r \subset \{y_{s+1}, \dots, y_n\}$$

und

$$r \leq |A_1 \cup \dots \cup A_r| \leq n - s.$$

Es folgt

$$|\mathcal{A}| = r + s \leq n.$$

Daher ist n die Kardinalität einer maximalen Antikette und aus dem Satz von Dilworth folgt, dass es eine Kettenzerlegung \mathcal{K} mit n Ketten gibt. Da

$$\text{rg}((M \cup F, \leq)) = 1,$$

kann keine Kette mehr als zwei Elemente enthalten. Da

$$|M \cup F| = 2n$$

ist, kann auch keine Kette weniger als zwei Elemente enthalten. Und weil schließlich M und F Antiketten sind, muss jede Kette genau einen Mann und eine Frau enthalten, die verheiratet werden können.

□

3.6 Die Inzidenzalgebra

Definition 3.6.1. $(V, +, \cdot, *)$ heißt *Algebra*, wenn $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K ist und $\forall x, y, z \in V$ und $\forall a, b \in K$ gilt

1. $x * (y + z) = x * y + x * z$
2. $(x + y) * z = x * z + y * z$
3. $(ax) * (by) = ab(x * y)$

Eine Algebra heißt *assoziativ*, wenn zusätzlich gilt

$$\forall x, y, z \in V : x * (y * z) = (x * y) * z$$

Bemerkung 3.6.2. Der Begriff der Algebra ist nicht mit dem Begriff der Mengenalgebra (σ -Algebra) zu verwechseln.

Definition 3.6.3. Die *Inzidenzalgebra* eines endlichen Posets P ist

$$\mathbb{A}(P) := \{A : P \times P \rightarrow \mathbb{R} : x \not\leq y \Rightarrow A(x, y) = 0\}$$

$+$ und \cdot sind koordinatenweise definiert, $*$ als Konvolution

$$A * B(x, y) := \sum_{z \in P} A(x, z) \cdot B(z, y)$$

wir schreiben auch $AB(x, y)$ statt $A * B(x, y)$.

Bemerkung 3.6.4. Es ist

$$\sum_{z \in P} A(x, z) \cdot B(z, y) = \sum_{z \in [x, y]} A(x, z) \cdot B(z, y),$$

weil alle anderen Summanden wegen der Definition von $\mathbb{A}(P)$ gleich Null sind.

Definition 3.6.5. Eine *Erweiterung* eines Posets (P, \leq) ist ein Poset (P, \leq') mit $\leq \subsetneq \leq'$, wobei \leq und \leq' als Teilmengen von $P \times P$ betrachtet werden. Mit anderen Worten: für alle x, y mit $x \leq y$ gilt $x \leq' y$ und es gibt x, y mit $x \leq' y$ und $x \not\leq y$.

Lemma 3.6.6. Jede nicht lineare Partialordnung läßt sich erweitern. Jede Partialordnung hat eine linear geordnete Erweiterung.

Beweis. Angenommen \leq ist nicht linear. Dann gibt es x, y mit $x \not\leq y$ und $y \not\leq x$. Wir definieren eine Relation \leq' durch $x \leq' y$ und bilden dann den sogenannten *transitiven Abschluss*. Das heißt, wir setzen $x \leq' z$, für alle z mit $y \leq z$ und $z \leq' y$ für alle z mit $z \leq x$. Die Relation \leq' erfüllt die Axiome einer Partialordnung.

Ein endliches Poset läßt sich schrittweises zu einer linearen Ordnung erweitern. Für unendliche Posets, die hier keine Rolle spielen, läßt sich das aus dem Lemma von Zorn folgern. \square

Beispiel 3.6.7. Wir betrachten schrittweise Erweiterung von

$$P = (\{x_0, \dots, x_5\}, x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4, x_0 \leq x_5 \leq x_4),$$

siehe Abbildung 35. Die Punkte x_2 und x_5 sind nicht vergleichbar. Als Erweiterung wählen wir $x_5 \leq x_2$ ($x_2 \leq x_5$ wäre auch möglich). Dadurch ergibt sich $x_5 < x_3$ durch den transitiven Abschluss, allerdings bleibt die Relation zwischen x_5 und x_1 ungeklärt. Wir wählen $x_1 < x_5$ und erhalten schließlich eine lineare Ordnung.

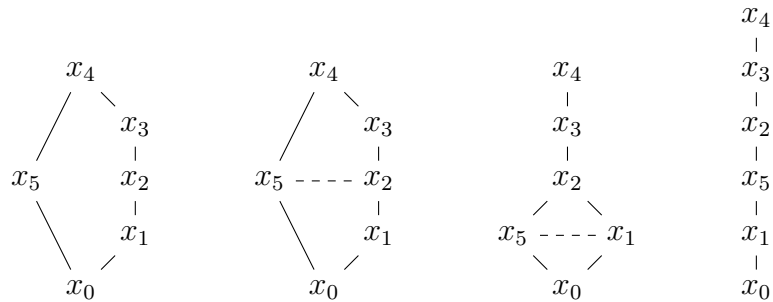


Abbildung 35: Erweiterung eines Posets zu einer linearen Ordnung

Satz 3.6.8. Die Inzidenzalgebra $\mathbb{A}(P)$ eines endlichen Posets P ist isomorph zu einer Teilalgebra der Algebra der oberen Dreiecksmatrizen.

Beweis. Es seien die $x_i \in P$ wie in 3.7.2 (2) numeriert. Dann entsprechen die Elemente der Inzidenzalgebra $|P| \times |P|$ -Matrizen. Das Matrizenprodukt stimmt mit dem Konvolutionsprodukt $*$ überein, denn

$$AB(x_i, x_j) = \sum_{k=1}^n A(x_i, x_k)B(x_k, x_j) = \sum_{z \in P} A(x_i, z)B(z, x_j) = A * B(x_i, x_j).$$

Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist eine obere Dreiecksmatrix, daher ist $\mathbb{A}(P)$ abgeschlossen bzgl. dem Konvolutionsprodukt. \square

Die Einheitsmatrix

$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

entspricht in $\mathbb{A}(P)$ dem neutralen Element bezüglich der Konvolution. Es ist $I(x, y)$ nichts anderes als das Kroneckersche $\delta_{x,y}$.

Bemerkung 3.6.9. Im Folgenden werden wir Bedingungen für Summationsvariablen unter das Summenzeichen schreiben. Die Summationsvariablen sind jene Variablen, die in der Summationsbedingung stecken, die jedoch nicht außerhalb der Summe erscheinen bzw. zuvor als konstante Größen gewählt wurden. Zum

Beispiel, wenn c zuvor als eine Größe erwähnt wurde, die keine Summationsvariable ist, dann ist

$$a \sum_{a < b < c} abc = a \sum_{\substack{b \\ a < b < c}} abc, \quad b \sum_{a < b < c} abc = b \sum_{\substack{a \\ a < b < c}} abc, \quad c \sum_{a < b < c} abc = c \sum_{\substack{a, b \\ a < b < c}} abc,$$

wobei die beim zweizeiligen Subskript in der oberen Zeile die Summationsvariablen stehen.

Satz 3.6.10. Ein A in $\mathbb{A}(P)$ hat genau dann ein Inverses $A^{-1} \in \mathbb{A}(P)$, wenn $\forall x \in P : A(x, x) \neq 0$. Die Werte $A(x, y)$ werden folgendermaßen induktiv nach der Kardinalität der Intervalle $[x, y]$ bestimmt:

1. Wenn $|[x, y]| = 0$ bzw. $x \not\leq y$ ist, dann ist $A^{-1}(x, y) = 0$.
2. Wenn $|[x, y]| = 1$ bzw. $x = y$ ist, dann ist $A^{-1}(x, x) = 1/A(x, x)$.
3. Für $|[x, y]| > 1$ bzw. $x < y$ ist

$$A^{-1}(x, y) = -\frac{1}{A(x, x)} \sum_{x < z \leq y} A(x, z)A^{-1}(z, y) \quad (3.6.1)$$

$$= -\frac{1}{A(y, y)} \sum_{x \leq z < y} A^{-1}(x, z)A(z, y). \quad (3.6.2)$$

Beweis. Es hat A als Matrix genau dann einen vollen Rang, wenn alle Diagonaleinträge ungleich Null sind. Es sei A aus $\mathbb{A}(P)$ im Folgenden eine solche Matrix mit vollem Rang. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass A^{-1} ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix mit vollem Rang ist. Dass A^{-1} in $\mathbb{A}(P)$ liegt, wird eine Konsequenz aus der folgenden Konstruktion sein.

Punkt (1) folgt daraus, dass A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist. Punkt (2) folgt aus

$$AA^{-1}(x, x) = \sum_{z \in P} A(x, z)A^{-1}(z, x) = A(x, x)A^{-1}(x, x) = 1.$$

Für $x < y$ ist

$$\begin{aligned} 0 = I(x, y) &= AA^{-1}(x, y) = \sum_{z \in [x, y]} A(x, z)A^{-1}(z, y) = \\ &A(x, x)A^{-1}(x, y) + \sum_{x < z \leq y} A(x, z)A^{-1}(z, y). \end{aligned}$$

Analog, ist

$$\begin{aligned} 0 = I(x, y) &= A^{-1}A(x, y) = \sum_{z \in [x, y]} A(x, z)^{-1}A(z, y) = \\ &A(x, y)^{-1}A(y, y) + \sum_{x \leq z < y} A(x, z)^{-1}A(z, y), \end{aligned}$$

woraus (3) folgt. □

3.7 Die Zeta-Funktion

Definition 3.7.1. Für ein Poset P definieren wir die ζ -Funktion $\zeta : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & x \leq y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 3.7.2.

1. Die ζ -Funktion einer linearen Ordnung $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$ entspricht einer Matrix der Form

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Es sei \leq' eine lineare Erweiterung von \leq . Nach Lemma 3.6.6 können die Indizes der $x_i \in P$ so wählen, dass $x_1 \leq' \dots \leq' x_n$ gilt. Die Matrix der ζ -Funktion hat dann die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{1er od. 0er} \\ & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 3.7.3. Für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist $A^0 = I$ die Einheitsmatrix. Angenommen $\sum_{k \geq 0} A^k$ konvergiert koordinatenweise absolut und $(I - A)$ ist invertierbar, dann gilt

$$\sum_{k \geq 0} A^k = I + A + A^2 + A^3 + \dots = (I - A)^{-1},$$

denn

$$(I - A) \cdot (I + A + A^2 + \dots) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \dots = I.$$

Bemerkung 3.7.4.

1. Es ist

$$\zeta^2(x, y) = \zeta \zeta(x, y) = \sum_{z \in [x, y]} \zeta(x, z) \zeta(z, y) = |[x, y]|,$$

also die Kardinalität des Intervalls $[x, y]$, und

$$\zeta^k(x, y) = \sum_{x \leq z_1 \leq \dots \leq z_{k-1} \leq y} \zeta(x, z_1) \zeta(z_1, z_2) \dots \zeta(z_{k-1}, y)$$

die Anzahl der sogenannten *Multiketten* (d.h. nicht alle z_i müssen paarweise verschieden sein) der Länge k von x nach y .

2. Wegen

$$(\zeta - I)(x, y) = \begin{cases} 1 & x < y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist

$$(\zeta - I)^k(x, y) = \sum_{x < z_1 < \dots < z_{k-1} < y} (\zeta - I)(x, z_1) \cdot (\zeta - I)(z_1, z_2) \cdots (\zeta - I)(z_{k-1}, y)$$

die Anzahl der Ketten der Länge k von x nach y .

3. Es ist

$$(2I - \zeta)(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ -1 & x < y \\ 0 & x \not\leq y \end{cases}$$

Da $(2I - \zeta)(x, x) \neq 0$ für alle $x \in P$, existiert $(2I - \zeta)^{-1}$ als Element von $\mathbb{A}(P)$ nach Satz 3.6.10. Die Anzahl der Ketten beliebiger Länge von x nach y ist die Summe der Anzahlen der Ketten bestimmter Länge, also gleich

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\zeta - I)^k = (I - (\zeta - I))^{-1} = (2I - \zeta)^{-1}.$$

Für $n = |P|$ und $k > n$ ist $(\zeta - I)^k(x, y) = 0$ für alle $x, y \in P$. Anders gesagt, die Summanden sind ab einer Stelle alle gleich Null, daher könne wir Bemerkung 3.7.3 anwenden.

3.8 Möbius Inversion

Definition 3.8.1. Die *Möbiusfunktion* μ eines Posets ist die Inverse der ζ -funktion.

Lemma 3.8.2.

1. Da $\zeta(x, x) \neq 0$ für alle $x \in P$, existiert $\mu = \zeta^{-1}$ nach Satz 3.6.10 als Element von $\mathbb{A}(P)$. Daher ist $\mu(x, y) = 0$ für alle $x, y \in P$ mit $x \not\leq y$.
2. $(\zeta * \mu)(x, y) = (\mu * \zeta)(x, y) = I(x, y)$
3. Es ist $\mu(x, x) = 1$ für alle $x \in P$, denn

$$1 = I(x, x) = \sum_{x \leq z \leq x} \zeta(x, z) \mu(z, x) = \zeta(x, x) \mu(x, x)$$

4. Für $x < y$ ist nach (3.6.1)

$$\mu(x, y) = -\frac{1}{\mu(x, x)} \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) \zeta(z, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z),$$

bzw. nach (3.6.2)

$$\mu(x, y) = -\frac{1}{\mu(y, y)} \sum_{x < z \leq y} \zeta(x, z) \mu(z, y) = - \sum_{x < z \leq y} \mu(z, y)$$

und daher

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu(z, y) = 0.$$

5. Für beliebige $x, y \in P$ ist also

$$\sum_{z \in [x, y]} \mu(x, z) = \sum_{z \in [x, y]} \mu(z, y) = I(x, y).$$

Korollar 3.8.3. Die Möbiusfunktion ist nach Lemma 3.8.2 rekursiv nach Kardinalität $|[x, y]|$ der Intervalle definiert. Für $|[x, y]| = 0$ ist $x \not\leq y$ und $\mu(x, y) = 0$, für $|[x, y]| = 1$ ist $x = y$ und $\mu(x, y) = 1$. Werte $\mu(x, y)$ mit $|[x, y]| = k$ können aus Werten $\mu(v, w)$ mit $|[v, w]| \leq k - 1$ berechnet werden:

$$\mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) = - \sum_{x < z \leq y} \mu(z, y) \quad (3.8.1)$$

Bemerkung 3.8.4. Ein Intervall als Teilposet eines Verbands ist selbst wieder ein Verband. Wenn wir mit μ_P die Möbiusfunktion eines Posets P bezeichnen und ein Intervall $M = [\hat{0}, x]$ in einem Verband C wählen, so folgt aus der rekursiven Bestimmung der Möbiusfunktion aus Korollar 3.8.3, dass $\mu_M(x, y) = \mu_C(x, y)$ ist für alle $x, y \in M$. Daher brauchen wir Subskripte für Werte $\mu(\hat{0}, x)$ nicht zu berücksichtigen.

Lemma 3.8.5. Wenn in einem endlichen Poset für $x < y < z$ das Intervall $[x, z]$ gleich der Vereinigung $[x, y] \cup [y, z]$ ist, dann ist $\mu(x, z) = 0$.

Korollar 3.8.6. Unter den Voraussetzungen des Lemmas ist $\mu(x, w) = 0$ für alle $w \in [y, z] \setminus \{y\}$, denn dann ist $x < y < w$ und $[x, w] = [x, y] \cup [y, w]$. Geometrisch bedeutet das: Wenn es im Hasse Diagramm H eines endlichen Verbandes P ein y gibt, sodass H ohne y eine ‘untere’ Komponente mit $\hat{0}$ und eine ‘obere’ Komponente mit $\hat{1}$ hat, dann ist $\mu(\hat{0}, x) = 0$ für alle x aus der oberen Komponente. Insbesondere ist dann $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = 0$. Dies ist zum Beispiel in einem graduierten Verband P der Fall, wenn es eine Zahl k mit $0 < k < \text{rg}(P)$ gibt, sodass nur ein einziges Element x mit Rang k existiert. Dann ist $\mu(\hat{0}, y) = 0$ für alle y mit größerem Rang als k .

Beweis von Lemma 3.8.5. Für $w \in [y, z]$ ist

$$\mu(x, w) = - \sum_{x \leq v < w} \mu(x, v) = - \sum_{x \leq v \leq y} \mu(x, v) - \sum_{y < v < w} \mu(x, v) = - \sum_{y < v < w} \mu(x, v).$$

Für alle w_1 mit $y \leq w_1 \leq z$ ist die letzte Summe leer und daher $\mu(x, w_1) = 0$. Wenn $y < w_1 < w_2 \leq z$ folgt analog $\mu(x, w_2) = 0$. Nach Induktion folgt $\mu(x, z) = 0$. \square

Beispiel 3.8.7. Betrachten wir $(\mathcal{P}([3]), \subset)$ (siehe Abbildung 30) mit $\hat{0} = \emptyset$ und $\hat{1} = \{1, 2, 3\}$. Wir wollen $\mu(x, \hat{1})$ für alle $x \in (\mathcal{P}([3]), \subset)$ berechnen.

1.

$$\mu(\hat{1}, \hat{1}) = 1$$

2.

$$\begin{aligned} \mu(\{1, 2\}, \hat{1}) &= \mu(\{1, 3\}, \hat{1}) = \mu(\{2, 3\}, \hat{1}) \\ &= - \sum_{\{1, 2\} < z \leq \hat{1}} \mu(z, \hat{1}) = -\mu(\hat{1}, \hat{1}) = -1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mu(\{1\}, \hat{1}) &= \mu(\{2\}, \hat{1}) = \mu(\{3\}, \hat{1}) = - \sum_{\{1\} < z \leq \hat{1}} \mu(z, \hat{1}) \\ &= -(\mu(\{1, 2\}, \hat{1}) + \mu(\{1, 3\}, \hat{1}) + \mu(\hat{1}, \hat{1})) = 1 \end{aligned}$$

4.

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = -(1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1) = -1$$

Beispiel 3.8.8. Als nächstes berechnen wir die Möbiusfunktion des Teilerposets $(T_{12}, |)$ aus Beispiel 3.1.3.5, siehe Abbildung 30.

$$\begin{aligned} \mu(n, n) &= 1 \\ \mu(4, 12) &= \mu(6, 12) = -\mu(12, 12) = -1 \\ \mu(2, 12) &= -(\mu(4, 12) + \mu(6, 12) + \mu(12, 12)) = -(-1 - 1 + 1) = 1 \\ \mu(3, 12) &= -(\mu(6, 12) + \mu(12, 12)) = -(-1 + 1) = 0 \\ \mu(1, 12) &= -(\mu(2, 12) + \mu(3, 12) + \mu(4, 12) + \mu(6, 12) + \mu(12, 12)) = \\ &= -(1 + 0 - 1 - 1 + 1) = 0 \\ \mu(2, 4) &= -\mu(4, 4) = -1 \\ \mu(1, 4) &= -(\mu(2, 4) + \mu(4, 4)) = -(-1 + 1) = 0 \\ \mu(2, 6) &= \mu(3, 6) = -\mu(6, 6) = -1 \\ \mu(1, 6) &= -(\mu(2, 6) + \mu(3, 6) + \mu(6, 6)) = -(-1 - 1 + 1) = 1 \\ \mu(1, 2) &= -\mu(2, 2) = -1 \\ \mu(1, 3) &= -\mu(3, 3) = -1 \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Matrizen

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Koordinaten den Teilern 1, 2, 3, 4, 6, 12 entsprechen. Zur Kontrolle multiplizieren wir $\zeta\mu$ oder $\mu\zeta$ und erhalten die Einheitsmatrix I .

Satz 3.8.9 (Möbius-Inversion). Für ein endliches Poset P und Funktionen $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

1.

$$\forall x \in P : g(x) = \sum_{z \leq x} f(z) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in P : f(x) = \sum_{z \leq x} g(z)\mu(z, x)$$

2.

$$\forall x \in P : g(x) = \sum_{x < z} f(z) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in P : f(x) = \sum_{x < z} \mu(x, z)g(z)$$

Erster Beweis. Entsprechend 3.7.2.2 ordnen wir die Elemente von P an als x_1, \dots, x_n , wobei $n = |P|$ ist. Dann entsprechen μ, ζ zwei $(n \times n)$ -Matrizen in oberer Dreiecksform. Die Funktionen f, g entsprechen $(1 \times n)$ -Matrizen. Wir können also ζ, μ als lineare Bijektionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und f, g als lineare Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen, wobei $\mu \circ \zeta$ die Identität ist. Also ist

$$\begin{aligned} \forall x \in P : g(x) = \sum_{z \leq x} f(z) &\quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in [n] : g(x_k) = \sum_{i=1}^k f(x_i) \\ &\quad \Leftrightarrow \quad g = f\zeta \quad \Leftrightarrow \quad g\mu = f\zeta\mu \quad \Leftrightarrow \quad g\mu = f \\ \Leftrightarrow \quad \forall k \in [n] : \sum_{i=1}^k g(x_i)\mu(x_i, x_k) = f(x_k) &\quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in P : f(x) = \sum_{z \leq x} g(z)\mu(z, x). \end{aligned}$$

Wenn $i < k$ ist, heißt das nicht unbedingt, dass auch $x_i < x_k$ ist, denn x_i und x_k könnten unvergleichbar sein. Die obige Äquivalenzen gelten trotzdem, denn wenn x_i und x_k unvergleichbar sind, sind die auftretenden Summanden alle gleich Null.

Für den zweiten Teil des Satzes fassen wir f und g als $(n \times 1)$ -Matrizen auf und betrachten $g = \zeta f \Leftrightarrow \mu g = f$.

Zweiter Beweis. Wenn wir die Rechnung für festes x explizit durchführen, erhalten wir die Implikation ‘ \Rightarrow ’ in Punkt 1 unter Verwendung von Lemma 3.8.2.5:

$$\begin{aligned} \sum_{z \leq x} g(z) \mu(z, x) &= \sum_{z \leq x} \left(\sum_{w \leq z} f(w) \right) \mu(z, x) = \sum_{w \leq z \leq x} f(w) \mu(z, x) \\ &= \sum_{w \leq x} f(w) \sum_{w \leq z \leq x} \mu(z, x) = \sum_{w \leq x} f(w) I(w, x) = f(x). \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise sehen wir die Implikation ‘ \Leftarrow ’:

$$\begin{aligned} \sum_{z \leq x} f(z) &= \sum_{z \leq x} \left(\sum_{w \leq z} g(w) \mu(w, z) \right) = \sum_{w \leq z \leq x} g(w) \mu(w, z) \\ &= \sum_{w \leq x} g(w) \sum_{w \leq z \leq x} \mu(w, z) = \sum_{w \leq x} g(w) I(w, x) = g(x). \end{aligned}$$

□

Satz 3.8.10 (Satz von Weisner). Es sei $a \neq \hat{0}$ in einem endlichen Verband. Dann ist

$$\sum_{x \vee a = \hat{1}} \mu(\hat{0}, x) = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{a \vee x = \hat{1}} \mu(\hat{0}, x) &= \sum_x \mu(\hat{0}, x) I(a \vee x, \hat{1}) = \sum_x \mu(\hat{0}, x) \sum_{x \vee a \leq y} \mu(y, \hat{1}) \\ &= \sum_{x \vee a \leq y} \mu(\hat{0}, x) \mu(y, \hat{1}) = \sum_{a \leq y} \mu(y, \hat{1}) \sum_{x \leq y} \mu(\hat{0}, x) = \sum_{a \leq y} \mu(y, \hat{1}) I(\hat{0}, y) = 0. \end{aligned}$$

weil $a \neq \hat{0}$ ist und somit alle $y \neq \hat{0}$ sind. Wir haben hierbei mehrmals die Konvention zu den Summationsindizes 3.6.9 sowie Lemma 3.8.2.5 verwendet. □

Definition 3.8.11. Das zu (P, \leq) duale Poset ist (P, \leq^*) mit

$$x \leq^* y \iff y \leq x.$$

Oft schreiben wir kurz ‘ P^* ’ statt ‘ (P, \leq^*) ’.

Bemerkung 3.8.12 (Dualitätsprinzip). Es ist $(P^*)^* = P$. Aussagen über P lassen sich übersetzen in Aussagen über P^* . Dabei vertauschen wir ‘ \leq ’ mit ‘ \geq ’, ‘ \wedge ’ mit ‘ \vee ’, ‘ $\hat{0}$ ’ mit ‘ $\hat{1}$ ’, ‘ $\zeta(x, y)$ ’ mit ‘ $\zeta(y, x)$ ’, ‘ $\mu(x, y)$ ’ mit ‘ $\mu(y, x)$ ’ usw. Die so gewonnenen Aussagen heißen *dual*.

Korollar 3.8.13 (Dualer Satz von Weisner). Es sei $a \neq \hat{1}$ in einem endlichen Verband. Dann ist

$$\sum_{x \wedge a = \hat{0}} \mu(x, \hat{1}) = 0.$$

3.9 Möbius Inversion und Mengen - Das Prinzip der Inklusion und Exklusion

Satz 3.9.1. Im Teilmengenverband ist

$$\mu(A, B) = \begin{cases} (-1)^{|B \setminus A|} & A \subset B, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Intervall $[A, B] = \{C : A \subset C \subset B\}$ ist als Verband isomorph zu

$$\{C \setminus A : A \subset C \subset B\} = \{D : \emptyset \subset D \subset B \setminus A\} = [\emptyset, B \setminus A]$$

und es ist

$$\mu(A, B) = \mu(\emptyset, B \setminus A).$$

Es genügt also, $\mu(\emptyset, C)$ für $C = B \setminus A$ zu berechnen.

Beweisvariante 1. Für ein beliebiges $p \in B \setminus A$ setzen wir $a = \{p\}$. Die Mengen x im Verband $\mathcal{P}(B \setminus A)$, für die $x \vee a = \hat{1}$ ist, sind $x = B \setminus A$ und $x = (B \setminus A) \setminus \{p\}$. Nach dem Satz von Weisner ist

$$\sum_{x \vee a = \hat{1}} \mu(\hat{0}, x) = \mu(\emptyset, B \setminus A) + \mu(\emptyset, (B \setminus A) \setminus \{p\}) = 0$$

und daher $\mu(A, B) = -\mu(A, B \setminus \{p\})$. Somit erhalten wir

$$\mu(\hat{0}, \hat{0}) = 1, \quad \mu(\hat{0}, \{x_1\}) = -1, \quad \mu(\hat{0}, \{x_1, x_2\}) = 1, \quad \mu(\hat{0}, \{x_1, x_2, x_3\}) = -1 \quad \text{etc.},$$

und durch Iteration $\mu(\emptyset, C) = (-1)^{|C|}$ bzw. $\mu(A, B) = \mu(\emptyset, B \setminus A) = (-1)^{|B \setminus A|}$.

Beweisvariante 2. Wir zeigen $\mu(\emptyset, C) = (-1)^{|C|}$ in $(\mathcal{P}(C), \subset)$ durch Induktion nach $n = |C|$. Es sei $C = \{x_1, \dots, x_n\}$. Nach Lemma 3.8.2.4 ist

$$\mu(\hat{0}, C) = - \sum_{M \subsetneq C} \mu(\hat{0}, M) = - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|M|=k} \mu(\hat{0}, M) = - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \mu(\hat{0}, \{x_1, \dots, x_k\}),$$

denn welche der k -elementigen Teilmengen wir im Teilmengenverband wählen, spielt für diesen μ -Wert keine Rolle. Nach Induktionsvoraussetzung ist das gleich

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k = -(1-1)^n + \binom{n}{n} (-1)^n = (-1)^n.$$

□

Satz 3.9.2. Für endliche Mengen A_1, \dots, A_n ist

$$\left| \bigcup_{i \in [n]} A_i \right| = \sum_{k \in [n]} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [n] \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

Beispiel 3.9.3. Für $n = 2$ und $n = 3$ bedeutet das

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|, \quad \text{bzw.}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Beweis. Wir setzen $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ und

$$g(I) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|, \quad f(I) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \setminus \bigcup_{j \notin I} A_j \right|.$$

Es ist $f(I)$ die Anzahl der $x \in X$, für die I genau die Menge der Indizes i ist mit $x \in A_i$. Daher gilt

$$g(I) = \sum_{I \subset J} f(J)$$

Mit Möbius-Inversion (Satz 3.8.9) erhalten wir

$$f(I) = \sum_{I \subset J} \mu(I, J) g(J)$$

und die Formel aus Satz 3.9.1 für die Möbiusfunktion des Teilmengenposets ergibt

$$f(I) = \sum_{I \subset J} (-1)^{|J \setminus I|} g(J)$$

Für $I = \emptyset$ ist

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \{x \in X : x \in A_i, \text{ wenn } i \in \emptyset\} = X$$

$$\text{und } \bigcup_{i \notin \emptyset} A_i = X.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= \left| \bigcap_{i \in \emptyset} A_i \setminus \bigcup_{j \notin \emptyset} A_j \right| = |X \setminus X| = 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{\substack{J \subset [n] \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\substack{J \subset [n] \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + |X|. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Aussage. □

3.10 Möbius Inversion in der Zahlentheorie

Definition 3.10.1. Eine natürliche Zahl heißt *quadratifrei*, wenn sie keinen Teiler der Form p^2 hat, wobei p prim ist.

Bemerkung 3.10.2. Eine quadratifreie Zahl ist also das Produkt verschiedener Primzahlen, z.B. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ oder $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$. Eine nicht quadratifreie Zahl wäre etwa $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Wir betrachten nun den Teilerverband $(T_n, |)$, $T_n = \{m \in [n] : m|n\}$.

Lemma 3.10.3. In $(T_n, |)$ ist

$$\mu(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \frac{b}{a} \text{ ein quadratifreies Produkt von } 2k \text{ Primzahlen ist.} \\ -1, & \text{wenn } \frac{b}{a} \text{ ein quadratifreies Produkt von } 2k + 1 \text{ Primzahlen ist.} \\ 0, & \text{wenn } a \nmid b \text{ oder } \frac{b}{a} \text{ nicht quadratifrei.} \end{cases}$$

Beweis. Es ist $[a, b]$ isomorph zu $[1, \frac{b}{a}]$ und

$$\mu(a, b) = \mu(1, \frac{b}{a}),$$

siehe Bemerkung 3.8.4. Es genügt also, die Werte für $\mu(1, m)$ in T_m mit $m = \frac{b}{a}$ zu bestimmen.

Fall 1. Wenn p keine Quadratzahl ist, ist p ein Produkt $p_1 \cdots p_n$ aus n verschiedenen Primzahlen. Dann ist $\mu(1, p_1) = -\mu(1, 1) = -1$ und

$$\mu(p_1 \cdots p_{n-1}, p_1 \cdots p_n) = \mu(1, p_n) = -1.$$

Daraus folgt $\mu(1, p_1 \cdots p_n) = (-1)^n$.

Fall 2. Wenn es eine Primzahl p gibt mit $p^2|m$, ist nach dem Satz von Weisner

$$\sum_{\text{kgV}(x,p)=m} \mu(1, x) = 0,$$

beziehungsweise

$$\mu(1, m) = - \sum_{\text{kgV}(x,p)=m} \mu(1, x).$$

Wenn $\text{kgV}(x, p) = m$ ist, muss p ein Teiler von x sein, also ist $\text{kgV}(x, p) = x$. Damit ist die Summe auf der rechten Seite leer und $\mu(1, m) = 0$. \square

Im Folgenden nennen wir $\mu(d) := \mu(1, d)$ die *zahlentheoretische Möbiusfunktion*. Nach obiger Überlegung bzw. nach Bemerkung 3.8.4 ist dieser Wert der Möbiusfunktion unabhängig vom betrachteten Teilerposet T_n definiert, solange m ein Teiler von n ist. Aus der Möbiusinversion folgt nun:

Satz 3.10.4 (Möbiusinversion der Zahlentheorie). Für Funktionen $f, g : [n] \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\forall n : g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(d, n) = \sum_{d|n} g(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Wie schon zuvor, bezeichne $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion, das heißt die Anzahl der Zahlen aus $[n]$, die zu n relativ prim sind.

Satz 3.10.5. Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d) \quad \text{und} \quad \varphi(n) = \sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Beweis. Die Gleichungen sind wegen der Möbiusinversion für $g(n) = n$ und $f(n) = \varphi(n)$ äquivalent. Daher genügt es eine von ihnen zu zeigen. Wir zeigen erstere.

Variante 1. Aus Kapitel 2.5 wissen wir, dass

$$Z_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Q}[n]}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) X_d^{\frac{n}{d}}$$

ist. Setzen wir $X_i = 1$ für alle i , erhalten wir nach Multiplikation mit n die Aussage.

Variante 2. Die Anzahl der Zahlen $m \in [n]$ mit $\text{ggT}(m, n) = d$ (äquivalent: Anzahl der Zahlen $\frac{m}{d}$ mit $\text{ggT}(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$) ist $\varphi(\frac{n}{d})$. Daraus folgt

$$n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Wegen

$$T_n = \left\{ \frac{n}{d} : d|n \right\} = \{d : d|n\}$$

ist dies gleich

$$\sum_{d|n} \varphi(d).$$

□

Die Riemannsche ζ -Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definieren wir für $s \in \mathbb{C}$. Sie hat in $z = -2, -4, \dots$ sogenannte triviale Nullstellen. Resultate über die anderen nicht-trivialen Nullstellen liefern interessante Ergebnisse über Primzahlen. Eines der wichtigsten offenen Probleme in der gesamten

Mathematik (wenn nicht das größte offene Problem überhaupt) ist die *Riemannsche Vermutung*. Diese besagt, dass der Realteil aller nicht-trivialen Nullstellen gleich $\frac{1}{2}$ ist. Zwischen der riemannschen ζ -Funktion in der Zahlentheorie und der Möbiusfunktion μ besteht folgender Zusammenhang.

Satz 3.10.6. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{C}$ ist

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Beweis. Es sei p_i die i -te Primzahl. dann ist

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} + \frac{1}{p_1^{3s}} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2^s} + \frac{1}{p_2^{2s}} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_3^s} + \frac{1}{p_3^{2s}} + \dots\right) \dots \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(s)} &= \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \dots \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{(2 \cdot 3)^s} + \frac{1}{(2 \cdot 5)^s} + \dots + \frac{1}{(3 \cdot 5)^s} + \frac{1}{(3 \cdot 7)^s} + \dots\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{(2 \cdot 3 \cdot 5)^s} + \frac{1}{(2 \cdot 3 \cdot 7)^s} + \dots\right) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}. \end{aligned}$$

□

3.11 Möbiusfunktion und Topologie - Eulercharakteristik

3.11.1 Eulercharakteristik von Ordnungskomplexen

Definition 3.11.1. Mit \hat{P} bezeichnen wir das Poset, das wir erhalten, wenn wir zu einem Poset P zwei zusätzliche Punkte $\hat{0}$ und $\hat{1}$ hinzufügen und festlegen, dass $\hat{0} \leq x$ und $x \leq \hat{1}$ ist für alle $x \in P$.

Lemma 3.11.2. Es sei P ein endliches Poset und c_i die Anzahl der Ketten

$$\hat{0} = x_0 < x_1 < \cdots < x_i = \hat{1}$$

der Länge i in \hat{P} von $\hat{0}$ nach $\hat{1}$, also $c_0 = 0$ und $c_1 = 1$. Dann ist

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots$$

Beweis. Bemerkung 3.7.4.2 besagt, dass in einem endlichen Poset $(\zeta - I)^k(x, y)$ die Anzahl der Ketten der Länge k von x nach y ist. Nun ist

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) &= \zeta^{-1}(\hat{0}, \hat{1}) \\ &= (1 + (\zeta - I))^{-1}(\hat{0}, \hat{1}) \\ &= (I - (\zeta - I) + (\zeta - I)^2 - (\zeta - I)^3 + \cdots)(\hat{0}, \hat{1}) \\ &= I(\hat{0}, \hat{1}) - (\zeta - I)(\hat{0}, \hat{1}) + (\zeta - I)^2(\hat{0}, \hat{1}) - (\zeta - I)^3(\hat{0}, \hat{1}) + \cdots \\ &= c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots \end{aligned}$$

□

Definition 3.11.3. Ein (*kombinatorischer*) *Simplizialkomplex* auf einer Knotenmenge V ist ein System Δ von Teilmengen von V , das zu jedem $T \in \Delta$ auch alle Teilmengen $S \subset T$ enthält und das die Menge $\{x\}$ für alle $x \in V$ enthält. Die Elemente von Δ nennen wir *Simplices*. Die *Dimension* eines Simplexes S ist definiert als $|S| - 1$. Die *Dimension eines Simplizialkomplexes* ist das Maximum der Dimensionen seiner Elemente.

Die Anzahl der Simplices mit Dimension i bezeichnen wir mit f_i . Die *reduzierte Eulercharakteristik* ist definiert durch

$$\tilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i \geq -1} (-1)^i f_i = -f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 - \cdots .$$

Es ist stets $f_{-1} = 1$, da die leere Menge nach dieser Definition Element jedes Simplizialkomplexes ist. Die klassische (also nicht reduzierte) Eulercharakteristik ist einfach $\chi(\Delta) = \tilde{\chi}(\Delta) + 1$, das heißt, die leere Menge wird nicht mitgezählt.

Bemerkung 3.11.4. Einfache (d.h. keine Schleifen, keine Mehrfachkanten) ungerichtete Graphen entsprechen genau den 1-Komplexen. Knoten sind 0-dimensionale Simplices, Kanten 1-dimensionale Simplices, die leere Menge als Element des Komplexes stört nicht weiter. Planare Graphen auf der Sphäre, deren Flächen alle Dreiecke sind (Triangulierungen), können wir als simpliziale 2-Komplexe auffassen. Die Flächen entsprechen den 2-dimensionalen Simplices. Aus der Graphentheorie kennen wir die eulersche Formel für planare Graphen. Diese besagt, dass

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

ist, wobei V die Menge der Knoten, E die Menge der Kanten und F die Menge der Flächen ist. Für eine Triangulierung der Sphäre erhalten wir dementsprechend

$$-c_{-1} + c_0 - c_1 + c_2 = 1.$$

In anderen Worten: Die reduzierte Eulercharakteristik einer Triangulierung der Sphäre ist 1, ihre Eulercharakteristik gleich 2.

Bemerkung 3.11.5. Oft werden planare Graphen in die euklidische Ebene \mathbb{E} eingebettet, weil dies einfacher auf Papier oder Tafel darstellbar ist. Mathematisch ist es meistens vorteilhaft sie auf der Sphäre \mathbb{S}^2 darzustellen, weil \mathbb{S}^2 eine kompakte Fläche ohne Rand ist und wir außerdem dann nicht zwischen den beschränkten Flächen und der unbeschränkten Außenfläche unterscheiden müssen. Die *stereographische* Projektion übersetzt eine Einbettung des Graphen in die x, y -Ebene \mathbb{E} in eine Einbettung in die Sphäre \mathbb{S}^2 mit Mittelpunkt $(0, 0, 1)$ und Radius 1. Jede Gerade durch den Nordpol $N = (0, 0, 2)$, die nicht parallel zu \mathbb{E} liegt, schneidet \mathbb{E} und $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ in jeweils genau einem Punkt. Wenn wir diese Punktepaare aufeinander abbilden erhalten wir einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ und \mathbb{E} . Wird der Graph zuerst in \mathbb{S}^2 eingebettet, so sollte dies so geschehen, dass N weder eine Ecke des Graphen ist noch auf einer Kante liegt.

Definition 3.11.6. Für ein endliches Poset P definieren wir den *Ordnungskomplex* $\Delta(P)$ als Simplicialkomplex auf P , dessen Simplices die Ketten in P sind. Die Ordnungsrelation ist durch Inklusion gegeben.

Bemerkung 3.11.7. Ketten $\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_i = \hat{1}$ der Länge i in \hat{P} von $\hat{0}$ nach $\hat{1}$ entsprechen eins zu eins zu eins den $(i - 2)$ dimensionalen Simplices in $\Delta(P)$:

$$\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_i = \hat{1} \leftrightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$$

Die kürzeste Kette von $\hat{0}$ nach $\hat{1}$ ist $\hat{0} < \hat{1}$ und hat Länge 1, weil $\hat{0} \neq \hat{1}$ ist. Ihr entspricht der leere Simplex in $\Delta(P)$ mit Dimension -1 .

Als Konsequenz aus Lemma 3.11.2 und Bemerkung 3.11.7 erhalten wir folgenden Satz.

Satz 3.11.8. Für jedes endliche Poset ist

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = \tilde{\chi}(\Delta(P)).$$

Beispiel 3.11.9. In den Beispielen 1–5 ist $\mu_{\hat{P}_i}(\hat{0}, \hat{1}) = \tilde{\chi}(\Delta(P)) = 0$.

1. Der Simplicialkomplex einer linearen Ordnung ist ein Simplex.
2. Für $P_1 = [4]$ mit den Bedeckungsrelationen $1 \triangleleft 3, 2 \triangleleft 3, 3 \triangleleft 4$, besteht $\Delta(P_1)$ aus zwei Dreiecken, die sich eine Seite teilen.

3. Für $P_2 = [4]$ wählen wir $3 \triangleleft 1, 3 \triangleleft 2, 1 \triangleleft 4, 2 \triangleleft 4$. Dann ist $\Delta(P_1) = \Delta(P_2)$ auch wenn die Posets P_1 und P_2 nicht isomorph sind. Daher wissen wir ohne weitere Rechnung, dass $\mu_{\hat{P}_2}(\hat{0}, \hat{1}) = 0$ ist.
4. Für $P_3 = [5]$ übernehmen wir die Bedeckungsrelationen von P_1 aus Punkt 2 und ergänzen $3 \triangleleft 5$. Den Komplex $\Delta(P_3)$ können wir als Quadrat darstellen, das aus vier Dreiecken besteht, die sich in der Mitte die Ecke 3 teilen. Die Ecken des Quadrats sind der Reihe nach 1, 4, 2, 5.
5. Für $P_4 = [5]$ übernehmen wir die Bedeckungsrelationen von P_1 aus Punkt 2 und ergänzen $4 \triangleleft 5$. Es ist $\Delta(P_4)$ eine Pyramide mit Spitze 5 und Grundfläche $\Delta(P_1) = \Delta(P_2)$, wobei diese Pyramide mit quadratischer Grundfläche aus zwei Tetraedern besteht.
6. Für $P_5 = \{1, 2, a, b\}$ mit $1, 2 \triangleleft a, b$, ist $\Delta(P_5)$ ein Viereck,

$$\mu_{\hat{P}_5}(\hat{0}, \hat{1}) = f_{-1} + f_0 - f_1 = -1 + 4 - 4 = \tilde{\chi}(\Delta(P_5)) = -1$$

und $\chi(\Delta(P_5)) = 0$.

7. Es sei $P_6 = \{1, 2, a, b, A, B\}$, $1, 2 \triangleleft a, b \triangleleft A, B$. Für $\Delta(P_6)$ ist

$$\mu_{\hat{P}_6}(\hat{0}, \hat{1}) = f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 = -1 + 6 - 12 + 8 = \tilde{\chi}(\Delta(P_6)) = 1$$

und $\chi(\Delta(P_6)) = 2$. Der Komplex ist ein Oktaeder.

8. Es sei $P_7 = \{x_{0,a}, x_{0,b}, x_{1,a}, x_{1,b}, \dots, x_{n,a}, x_{n,b}\}$ und $x_{k,i} \leq x_{l,j}$, für $i, j \in \{a, b\}$ genau dann, wenn $k \leq l$ ist. Die Situation ist wie in P_5 und P_6 nur mit beliebiger Dimension n . Es ist $\mu_{\hat{P}_7}(\hat{0}, \hat{1}) = \tilde{\chi}(\Delta(P_7)) = (-1)^n$ bzw.

$$\chi(\Delta(P_7)) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade ist,} \\ 2 & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Nach Korollar 3.8.6 gibt es für festes n kein graduiertes Poset P mit weniger als $2n$ Elementen und der Eigenschaft, dass $\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) \neq 0$ ist. In diesem Sinn ist P_7 also minimal. In Kapitel 3.11.3 werden wir sehen, dass $\Delta(P_7)$ der kleinstmögliche Ordnungskomplex ist, der die n -Sphäre trianguliert.

3.11.2 Eulercharakteristik von Zellkomplexen

Aus einem endlichen Poset P haben wir den Simplicialkomplex $\Delta(P)$ konstruiert. Im Folgenden wollen wir allgemeinere Komplexe betrachten.

Definition 3.11.10. Die *offene Kugel* \mathbb{B}^n , *abgeschlossene Kugel* $\overline{\mathbb{B}}^n$ und die *Sphäre* S^n sind definiert als

$$\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\},$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{B}^n} &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}, \\ \mathbb{S}^{n-1} &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.\end{aligned}$$

Für $M \subset \Gamma$ bezeichne \overline{M} den Abschluss in Γ , M° das Innere (die Menge der inneren Punkte) und $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$ den Rand von M , also die Punkte, deren Umgebungen alle ein Element aus M und aus $\Gamma \setminus M$ enthalten.

Eine *0-Zelle* ist eine Menge mit einem Element. Eine *n-Zelle*, für $n \geq 1$, ist eine Menge, die homöomorph zu \mathbb{B}^n ist.

Ein endlicher *Zellkomplex* (oder endlicher *CW-Komplex*) ist ein Paar (Γ, Δ) , wobei Γ ein nicht leerer topologischer Raum ist und Δ eine Partitionierung von Γ ist, dessen Blöcke (Elemente von Δ) Zellen sind, sodass es für jede Zelle σ eine stetige Abbildung $\varphi_\sigma : \overline{\mathbb{B}^n} \rightarrow \sigma$ gibt, die auf dem Inneren \mathbb{B}^n von $\overline{\mathbb{B}^n}$ ein Homöomorphismus ist und für die $\sigma(\partial\mathbb{B}^n)$ eine Vereinigung von Zellen ist. Wir sagen, dass Γ durch Δ als Zellkomplex *realisierbar* ist.

Bemerkung 3.11.11. Die Zellen in $\sigma(\partial\mathbb{B}^n)$ haben alle eine Dimension, die kleiner als n ist. Für einen Komplex Δ ist Γ nicht nur Vereinigung der Mengen σ_i , sondern es gilt

$$\Gamma = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \varphi_\sigma(\overline{\mathbb{B}^{n(\sigma)}}).$$

Das stetige Bild einer kompakten Menge ist kompakt, daher ist jeder Raum, der durch einen endlichen Zellkomplex realisiert werden kann, kompakt.

Wir definieren die Eulercharakteristik für Zellkomplexe genauso wie für kombinatorische Simplicialkomplexe.

Definition 3.11.12. Für einen endlichen Zellkomplex bezeichne f_n die Anzahl der n -Zellen. Dann ist seine *reduzierte Eulercharakteristik* definiert durch

$$\tilde{\chi}(\Delta) = \sum_{n \geq -1} (-1)^n f_n = -f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 - \dots$$

und seine *Eulercharakteristik* $\chi(\Delta)$ als $\tilde{\chi}(\Delta) + 1$.

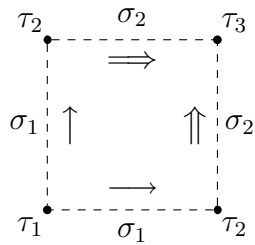
Beispiel 3.11.13.

1. Das abgeschlossene Einheitsintervall ist als Komplex mit zwei 0-Zellen und einer 1-Zelle realisierbar.
2. Der Kreis ist als Komplex mit einer 0-Zelle und einer 1-Zelle darstellbar. Die Funktion φ_σ der 1-Zelle σ bildet das offene Intervall \mathbb{B}^1 auf σ ab und beide Elemente von $\partial\mathbb{B}^1 = \mathbb{S}^0$ auf die 0-Zelle.
3. Wir setzen auf die Spitze eines Tetraeders ein Intervall wie eine Antenne auf eine Pyramide. Dieser Raum ist als Zellkomplex mit einer 3-Zelle, vier 2-Zellen, sieben 1-Zellen und fünf 0-Zellen realisierbar.

Beispiel 3.11.14. Die folgenden Flächen können wir durch einen Zellkomplex realisieren, der genau eine 2-Zelle und sonst nur 1- und 0-Zellen hat. In Abbildung 36 ist diese 2-Zelle als Quadrat abgebildet. Gegenüberliegende strichlierte Seiten werden entsprechend der Orientierung der Pfeile miteinander identifiziert. Durchgehende Linien sind 1-Zellen σ_i , die den Rand der Fläche darstellen. In den Ecken liegen 0-Zellen τ_i . Aus der Bezeichnung der 0- und 1-Zellen ist ersichtlich, welche von ihnen identifiziert werden. Es ist $\chi(\Delta) = f_0 - f_1 + f_2$.

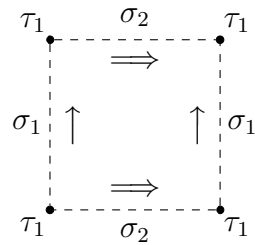
1. Eine abgeschlossene Kreisscheibe ist als Komplex mit einer 0-Zelle, einer 1-Zelle und einer 2-Zelle realisierbar. Als Nullzelle wählen wir einen beliebigen Punkt des Randes. In Abb. 36 würde die Kreisscheibe einem Quadrat mit vier durchgehenden Linien entsprechen.
2. Die Sphäre ist als Komplex mit einer 0-Zelle und einer 2-Zelle darstellbar. In Abb. 36 ist sie mit drei 0-Zellen, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle dargestellt.
3. Der Torus ist realisierbar mit einer 0-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle.
4. Die Elemente der projektiven Ebene \mathcal{P}^2 sind die 1-dimensionalen Unterräume des \mathbb{R}^3 . Betrachten wir eine Ebene H im \mathbb{R}^3 , die nicht durch den Ursprung geht, so können wir jene Elemente von \mathcal{P}^2 , die nicht parallel zu H sind, mit den Punkten Elementen von H identifizieren. Die Geraden, die parallel zu H sind, entsprechen Fernpunkten im Unendlichen von H , wobei ein Paar gegenüberliegender Fernpunkte identifiziert wird, denn sie entsprechen dem selben 1-dimensionalen Unterraum. Die Ebene H ist homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe. Die Fernpunkte von H entsprechen den Randpunkten dieser Scheibe, wobei gegenüberliegende Randpunkte identifiziert werden.
5. Wenn eine rechteckige Fläche zu einem Zylinder gerollt wird und dann die zwei Kreise am Rand nicht wie beim Torus sondern andersrum identifiziert werden, erhalten wir die kleinsche Flasche. Bekannte Bilder der kleinschen Flasche zeigen sie im \mathbb{R}^3 mit Selbstdurchdringung. Im \mathbb{R}^4 kann sie ohne Selbstdurchdringung dargestellt werden.

6. Zylinderfläche und Möbiusband sind mit jeweils zwei 0-Zellen, drei 1-Zellen und einer 2-Zelle realisierbar.



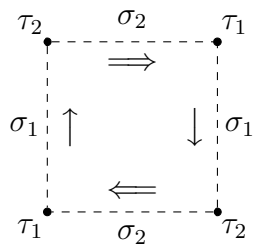
$$\chi(\Delta) = 3 - 2 + 1 = 2$$

1. Sphäre



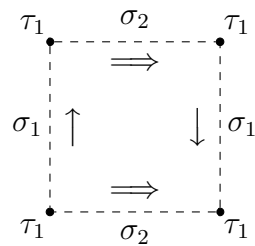
$$\chi(\Delta) = 1 - 2 + 1 = 0$$

2. Torus



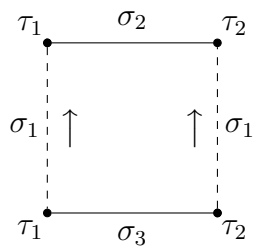
$$\chi(\Delta) = 2 - 2 + 1 = 1$$

3. Projektive Ebene



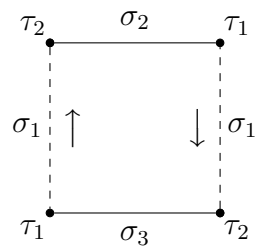
$$\chi(\Delta) = 1 - 2 + 1 = 0$$

4. Kleinsche Flasche



$$\chi(\Delta) = 2 - 3 + 1 = 0$$

5. Zylinder



$$\chi(\Delta) = 2 - 3 + 1 = 0$$

6. Möbius Band

Abbildung 36: Flächen mit und ohne Rand

3.11.3 Eulercharakteristik von topologischen Räumen

Definition 3.11.15. Eine n -Mannigfaltigkeit mit Rand ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, in dem jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des Halbraums

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

ist. Eine *Fläche mit Rand* ist eine 2-Mannigfaltigkeit mit Rand.

Satz 3.11.16. Wenn eine n -Mannigfaltigkeit mit Rand durch endliche Zellkomplexe Δ_1, Δ_2 realisierbar ist, dann ist $\chi(\Delta_1) = \chi(\Delta_2)$.

Definition 3.11.17. Zwei Zellkomplexe heißen *disjunkt*, wenn die leere Menge die einzige Zelle ist, die in ihrem Durchschnitt liegt. Ein Zellkomplex heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht die Vereinigung von zwei disjunkten Zellkomplexen ist. Maximale zusammenhängende Teilmengen eines Zellkomplexes nennen wir dessen *Komponenten*.

Bemerkung 3.11.18. Die Komponenten eines endlichen Zellkomplexes sind wiederum Zellkomplexe. Wenn Δ ein Zellkomplex mit k Komponenten $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ ist, dann ist

$$\chi(\Delta) = \chi(\Delta_1) + \dots + \chi(\Delta_k) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\chi}(\Delta) = \tilde{\chi}(\Delta_1) + \dots + \tilde{\chi}(\Delta_k) + k - 1.$$

Wenn wir im Folgenden topologische Räume betrachten, die durch endliche Zellkomplexe realisiert werden, genügt es daher, sich auf zusammenhängende Zellkomplexe zu konzentrieren.

Definition 3.11.19. Für einen Zellkomplex Δ definieren wir zwei Typen von *Reduktionen* Δ' .

1. *Verschmelzung benachbarter Zellen.* Es sei σ_0 eine $(n-1)$ -Zelle, die im Rand von zwei verschiedenen n -Zellen σ_1, σ_2 enthalten ist und die mit den Rändern aller anderen Zellen disjunkt ist. Wir definieren

$$\Delta' := (\Delta \setminus \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}) \cup \{\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2\}.$$

2. *Entfernen eines Blattes.* Es sei σ_0 eine $(n-2)$ -Zelle, σ_1 eine $(n-1)$ -Zelle und σ_2 eine n -Zelle und $\sigma_0 \subset \bar{\sigma}_1$, $\sigma_1 \subset (\bar{\sigma}_2)^\circ$ und σ_0 ist abgesehen von $\partial\sigma_1$ und $\partial\sigma_2$ mit den Rändern aller anderen Zellen disjunkt. Wir definieren

$$\Delta' := (\Delta \setminus \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}) \cup \{\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2\}.$$

Satz 3.11.20. Eine Reduktion Δ' eines Zellkomplexes Δ ist ein Zellkomplex, der denselben Raum erzeugt, und es ist $\chi(\Delta') = \chi(\Delta)$.

Beweis. Dass $\chi(\Delta') = \chi(\Delta)$ ist, folgt unmittelbar aus der Definition der Reduktionen. Zu zeigen ist noch, dass Δ' ein Zellkomplex ist. Einerseits ist durch die Definition sichergestellt, dass durch das Entfernen der Zellen σ_0 und σ_1 die Ränder unbeteiligter Zellen nach wie vor eine Vereinigung von anderen Zellen sind, weil σ_0 und σ_1 disjunkt zu ihnen sind. Der Rand der hinzugefügten Zelle $\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$ ist ebenfalls eine Vereinigung von anderen Zellen. Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$ isomorph zu \mathbb{B}^n ist.

Eine offene Kugel \mathbb{B}^n ist die disjunkte Vereinigung von zwei offenen Halbkugeln der Dimension n (beide homöomorph zu \mathbb{B}^n) mit einer offenen Kugel der Dimension $n - 1$, welche die beiden Halbkugeln in \mathbb{B}^n voneinander trennt. Das ist, was topologisch gesehen in Punkt 1 passiert.

Um Punkt 2 zu sehen, zerlegen wir \mathbb{B}^n wie in Punkt 1 zunächst in zwei offenen Halbkugeln der Dimension n und eine offene Kugel B der Dimension $n - 1$. Dann zerlegen wir B erst in zwei offene Halbkugeln B_1, B_2 der Dimension $n - 1$ und eine offene Kugel D der Dimension $n - 2$. Nun entspricht $\mathbb{B}^n \setminus (B_1 \cup D)$ der Zelle σ_2 , B_1 der Zelle σ_1 und D der Zelle σ_0 , und $\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$ entspricht \mathbb{B}^n . \square

Beweis von Satz 3.11.16 Dimension 1 und 2. Nach Bemerkung 3.11.18 genügt es sich auf zusammenhängende Zellkomplexe zu beschränken.

Es sei Γ ein Raum, der durch Zellkomplexe Δ_1 und Δ_2 der Dimension 1 realisiert wird. Topologisch sind eindimensionale Komplexe ungerichtete Graphen mit Schleifen und Mehrfachkanten. In Δ_1 löschen wir alle Knoten mit Grad 2, welche in keiner Schleife liegen, indem wir die zwei betroffenen Kanten und den Knoten Definition 3.11.19.1 entsprechend verschmelzen. Dann erhalten wir entweder einen Zellkomplex mit einer einzigen 0-Zelle und einer einzigen 1-Zelle (eine Schleife) oder einen Zellkomplex, in dem die 0-Zellen genau jene Punkte sind, deren Umgebungen alle nicht homöomorph zu einem Intervall sind. Diese Punkte in Γ sind eindeutig bestimmt, daher ist auch der entstandene 1-Komplex Δ eindeutig bestimmt. Folglich ist nach Satz 3.11.20 $\chi(\Delta_1) = \chi(\Delta)$. Analog ist auch $\chi(\Delta_2) = \chi(\Delta)$.

Es seien $\Delta_i, i \in \{1, 2\}$, Zellkomplexe, die eine Fläche Γ mit Rand realisieren. Dieser Raum ist metrisierbar und zwar durch eine intrinsische Metrik d . Das heißt, alle Punktepaare x, y lassen sich durch eine *geodätische* Kurven verbinden. Das sind Kurven von x nach y , deren Bogenlänge gleich dem Abstand $d(x, y)$ ist. Gleiches gilt für alle ihre Teilkurven. Da Γ eine Mannigfaltigkeit ist, sind diese Kurven lokal eindeutig. Das heißt, dass jeder Punkt eine Umgebung besitzt, in der diese geodätische Kurven eindeutig sind.

Wir können jede 1-Zelle σ durch eine 1-Zelle $\tilde{\sigma}$ ersetzen, welche stückweise geodätisch ist (endliche viele Stücke) und welche die anderen Zellen in derselben Reihenfolge wie σ kreuzt. Wir definieren $\tilde{\Delta}_i$, indem wir schrittweise jede 1-Zelle σ durch eine solche stückweise geodätische 1-Zelle $\tilde{\sigma}$ ersetzen. Nun überlagern wir die Zellkomplexe $\tilde{\Delta}_1$ und $\tilde{\Delta}_2$ indem wir in Punkten, in denen sich 1-Zellen überschneiden, 0-Zellen einfügen und zerlegen die betroffenen 1- und 2-Zellen

entsprechend.

Die *Überschnidungspunkte* zweier 1-Zellen $\tilde{\sigma}_a, \tilde{\sigma}_b$ sind jene Punkte, in denen sich die entsprechenden Kurven treffen oder sich wieder verlassen. Das sind also die Endpunkte der Komponenten von $\tilde{\sigma}_a \cap \tilde{\sigma}_b$. Diese Komponenten sind Intervalle. Um zu zeigen, dass $\tilde{\Delta}$ ein endlicher Zellkomplex ist, reicht es zu zeigen, dass zwei 1-Zellen $\tilde{\sigma}_a$ und $\tilde{\sigma}_b$ aus $\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2$ nur endlich viele Überschnidungspunkte haben. Wenn es unendlich viele wären, dann hätten sie einen Häufungspunkt z . Das widerspricht aber der zuvor erwähnten Tatsache, dass die geodätischen Kurven in z lokal eindeutig sind, dies gilt auch für den Fall, dass z in $\tilde{\sigma}_a$ oder $\tilde{\sigma}_b$ der Endpunkt zweier geodätischer Teilstücke ist.

Die 1-Zellen in $\tilde{\Delta}$ sind mit den 1-Zellen in $\tilde{\Delta}_1$ bzw. in $\tilde{\Delta}_2$ disjunkt, oder in ihnen enthalten. Jene 1-Zellen in $\tilde{\Delta}$, die in einer 1-Zelle aus $\tilde{\Delta}_2$ enthalten sind und die mit allen 1-Zellen in $\tilde{\Delta}_1$ disjunkt sind, können wir entsprechend den Reduktionen des Typs 1 oder 2 für $n = 2$ aus Definition 3.11.19 entfernen. Bei der Reduktion vom Typ 1 wird verwendet, dass die beiden 2-Zellen von $\tilde{\Delta}$, die verschmolzen werden, tatsächlich unterschiedlich sind, was daraus folgt, dass sie in ein und der selben 2-Zelle aus $\tilde{\Delta}_1$ enthalten sind. Nach wiederholten Reduktionen dieser Art und weiteren Reduktionen des Typs 1 für $n = 1$ erhalten wir den Zellkomplex $\tilde{\Delta}_2$. Folglich ist $\chi(\tilde{\Delta}) = \chi(\tilde{\Delta}_2)$. Analog sehen wir, dass $\chi(\tilde{\Delta}) = \chi(\tilde{\Delta}_1)$ ist. \square

Bemerkung 3.11.21. Eine *orientierbare Fläche* ist anschaulich gesprochen eine Fläche, die ein Inneres und ein Äußeres hat. Formal wird das am besten für Flächen, die in jedem Punkt einen eindeutigen Normalvektor haben, folgendermaßen definiert. Wenn sich jeder Normalvektor stetig entlang der Fläche in jeden anderen Normalvektor überführen lässt, dann ist die Fläche nicht orientierbar. Anderenfalls gibt es zwei Typen von Normalvektoren, jene, die ‘nach innen’ zeigen und jene, die ‘nach außen’ zeigen. Kreisscheibe, Torus, Sphäre und Zylinder sind orientierbare Flächen. Nicht orientierbar sind zum Beispiel Möbiusband, kleinsche Flasche und die projektive Ebene.

Die orientierbaren Flächen ohne Rand lassen sich klassifizieren als ‘Summen’ von Tori bzw. ‘vielfache Tori’. Das sind Flächen, die nicht nur ein ‘Loch’ wie der Torus haben, sondern mehrere solcher ‘Löcher’. Das Hinzufügen eines solchen ‘Lochs’ entspricht topologisch dem Hinzufügen eines ‘Henkels’. Allgemeine Flächen ohne Rand sind klassifiziert als Flächen, die wir von der Sphäre erhalten, indem wir ‘Löcher’ hinzufügen und sogenannte ‘Kreuzhauben’ einnähen. Das Einnähen einer Kreuzhaube bedeutet, aus der Fläche eine Kreisscheibe auszuschneiden und die kreisförmige Schnittlinie mit dem kreisförmigen Rand eines Möbiusbands zu identifizieren. Wenn wir auf diese Weise ein Möbiusband in eine Sphäre einsetzen, erhalten wir die projektive Ebene. Die kleinsche Flasche erhalten wir durch das Verkleben von zwei Kreuzhauben, bzw. durch das Einsetzen von zwei Kreuzhauben (Möbiusbänder) in die Sphäre. Leichter zu sehen ist, dass eine kleinsche Flasche in zwei Möbiusbänder zerfällt, wenn wir sie der Länge nach in zwei Teile schneiden. Wenn die kleinsche Flasche ‘verdreht’ aufgeschnitten wird,

zerfällt sie nicht, und wir erhalten nur ein Möbiusband.

Durch das Hinzufügen eines Torus-Lochs sinkt die Eulercharakteristik um zwei, durch das Einnähen einer Kreuzhaube sinkt die Eulercharakteristik um eins. Daher haben Torus (ein Torus-Loch) und kleinsche Flasche (zwei Kreuzhauben) die selbe Eulercharakteristik, auch wenn sie nicht homöomorph sind. Es gibt nur eine zusammenhängende Fläche ohne Rand mit Eulercharakteristik zwei, und das ist die Sphäre. Alle anderen zusammenhängenden Fläche ohne Rand haben eine niedrigere Eulercharakteristiken. Höhere Eulercharakteristiken erhalten wir bei Flächen mit mehreren Komponenten.

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|----|--|-----|
| 1 | L_n | 8 |
| 2 | der Graph X | 9 |
| 3 | Einschränkungen und Kontraktionen | 9 |
| 4 | Graphenklasse mit $\text{card}(VX _A \cap VX _{A^c}) = 2$ | 10 |
| 5 | Fälle von T mit Widerspruch | 10 |
| 6 | mögliche Fälle von T | 10 |
| 7 | Unterteilen von e | 11 |
| 8 | Spannbäume in X_{e^+} | 11 |
| 9 | die beiden Fälle von Spannbäumen in X | 12 |
| 10 | die dritten Einheitswurzeln | 14 |
| 11 | ditte Einheitswurzeln | 15 |
| 12 | $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2, \{a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a^{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\})$ | 42 |
| 13 | $\text{Cay}(F_2, \{a, b\})$ | 43 |
| 14 | $\text{Cay}(F_2, \{a, b, ab\})$ | 43 |
| 15 | $\text{Cay}(\langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^2 = abc = e \rangle, \{a, b, c\})$ | 44 |
| 16 | Symmetrien des Fliegen-Graphen | 45 |
| 17 | Cayleygraph von $\text{Aut}(X) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ | 46 |
| 18 | $\text{Cay}(\text{Aut}(X), \{a, b\})$ | 47 |
| 19 | $\text{Cay}(\text{Aut}(X), \{a, b, c\})$ | 47 |
| 20 | Umstülpfen des Petersengraphen | 49 |
| 21 | $\text{Cay}(D_n, \{a, b\}), \text{Cay}(D_n, \{a, b, c\}), \text{Cay}(D_n, \{b, c\})$ | 49 |
| 22 | Färbung $l \in B^A$ | 54 |
| 23 | Erzeugung und Cayleygraph der D_6 | 55 |
| 24 | $\text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{a\})$ und die Operation von \mathbb{Z}_n auf $[n]$ | 56 |
| 25 | die einzige nicht spiegelsymmetrische Anordnung aus Tabelle 4 | 58 |
| 26 | Erzeuger der Drehsymmetriegruppe des Würfels | 59 |
| 27 | Cayleygraph der \mathcal{S}_4 | 59 |
| 28 | verschiedenfärbige Kugeln in unterschiedlichen Schachteln | 71 |
| 29 | kombinierter Zyklus | 73 |
| 30 | Hassediagramme | 79 |
| 31 | Graduierte und nicht graduierte Posets | 80 |
| 32 | Kette und Antikette | 81 |
| 33 | symmetrische Kettenzerlegung von $(\mathcal{P}([4]), \subset)$ | 85 |
| 34 | symmetrische Kettenzerlegung von $(\mathcal{P}([5]), \subset)$ | 86 |
| 35 | Erweiterung eines Posets zu einer linearen Ordnung | 90 |
| 36 | Flächen mit und ohne Rand | 108 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|----|---|----|
| 1 | m-Ausdünnung | 14 |
| 2 | Automorphismengruppe des Fliegen-Graphen | 45 |
| 3 | Automorphismengruppe des Vierecks | 47 |
| 4 | Perlenketten der Länge 6 mit roten und schwarzen Perlen | 52 |
| 5 | Einige gelabelte und gefärbte Perlenketten | 52 |
| 6 | Operation der D_6 auf A | 55 |
| 7 | Färben des Würfels mit 2 Farben | 60 |
| 8 | Färben des Würfels mit 3 Farben | 60 |
| 9 | Zyklentypen der $\mathcal{S}_4 < \mathcal{S}_6$ | 61 |
| 10 | Anzahl der Färbungen des Würfels mit b Farben | 61 |
| 11 | Zyklentypen von $D_n \triangleleft [n]$ mit geradem n | 62 |
| 12 | Zyklentypen von $D_n \triangleleft [n]$ mit ungeradem n | 63 |
| 13 | $\mathcal{S}_4 \triangleleft VK_4$ und $\mathcal{S}_4 \triangleleft EK_4$ | 65 |
| 14 | die Graphen mit 4 Knoten | 65 |
| 15 | Perlenketten mit 4 schwarzen und 4 roten Perlen | 67 |
| 16 | Perlenketten mit 4 schwarzen 2 grünen und 2 roten Perlen | 70 |
| 17 | verschiedenfärbige Kugeln in unterschiedlichen Schachteln | 71 |