Listenfärbung von Graphen

Martin Matković

WS 2011/2012

Abstract

Martin Matković
14. April 2012

In dieser Arbeit werden Definitionen und grundlegende Eigenschaften von Graphenfärbungen und speziell von Listenfärbungen erarbeitet. Wir interessieren uns vor allem für planare und bipartite Graphen. Planare Graphen sind mit vier Farben färbbar (4-Farben-Satz), listenfärbbar sind sie mit fünf Farben (Satz von Thomassen). Wir diskutieren den kleinsten derzeit bekannten planaren Graphen, der nicht mit vier Farben litenfärbbar ist. Außerdem zeigen wir einen Satz von Erdős, Rubin und Taylor über die Listenfärbbarkeit vollständig bipartiten Graphen.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Begriffe und Eigenschaften

1.1 Graphenfärbung

In der Graphentheorie versteht man unter dem Begriff „Graphenfärbung“ die Zuordnung einer Farbe zu jedem Knoten (oder Kante) eines ungerichteten Graphen. In dieser Arbeit wird nur die Knotenfärbung von Graphen besprochen. Eine Knotenfärbung wird als richtig bezeichnet, falls je zwei beliebige benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen. Ziel ist es nun bei einer solchen Graphenfärbung mit möglichst wenig Farben auszukommen. Formal wird der Begriff folgendermaßen definiert:

Definition Sei $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ ein ungerichteter Graph. Eine Knotenfärbung mit k Farben ist eine Abbildung $c : V \to [k]$, wobei $[k] = \{1, ..., k\}$.

Definition Die chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen definiert man als das minimale k, für das eine Knotenfärbung für G existiert.

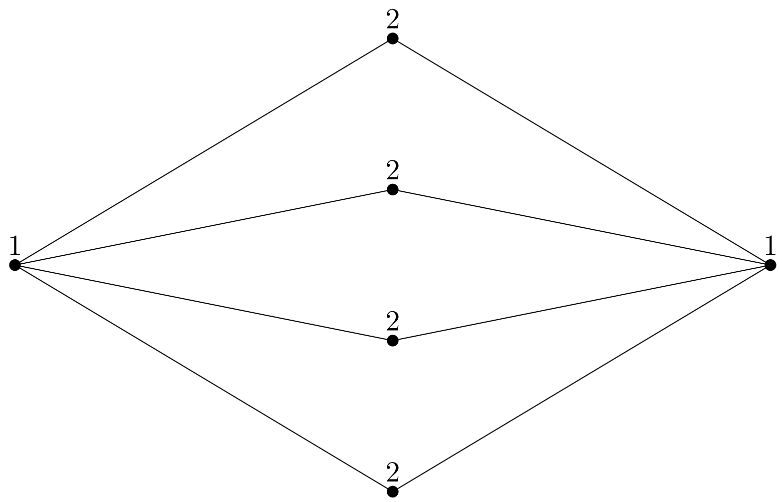


Abbildung 1: $\chi(K_2, 4) = 2$

In dem Beispiel sehen wir, dass der Graph $K_{2,4}$ 2-färbbar ist, dh. $\chi(G) = 2$.

1.2 Listenfärbung von Graphen

Listenfärbung ist einer Art der Graphenfärbung, wobei sich jeder Knoten des Graphen auf eine Liste der erlaubten Farben beschranken lässt.

Definition Sei $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ ein Graph und $C(v) \subset \mathbb{N}$ eine angegebene Menge von Farben. Dann definiert man eine **Listenfärbung** von G als eine Abbildung $c : V \to \bigcup_{v \in V} C(v)$, wobei $c(v) \in C(v) \quad \forall v \in V$.

Ein Graph heißt **k-listenfärbbar**, falls (mit der Notation aus obiger Definition) zu jeder beliebigen Farbzuordnung mit k Farben ($|C(v)| = k$ $\forall v \in V$) eine Listenfärbung exisitiert.

Definition Die listenchromatische Zahl $ch(G)$ eines Graphen definiert man als das kleinste $k \in \mathbb{N}$, für das G k-listenfärbbar ist.

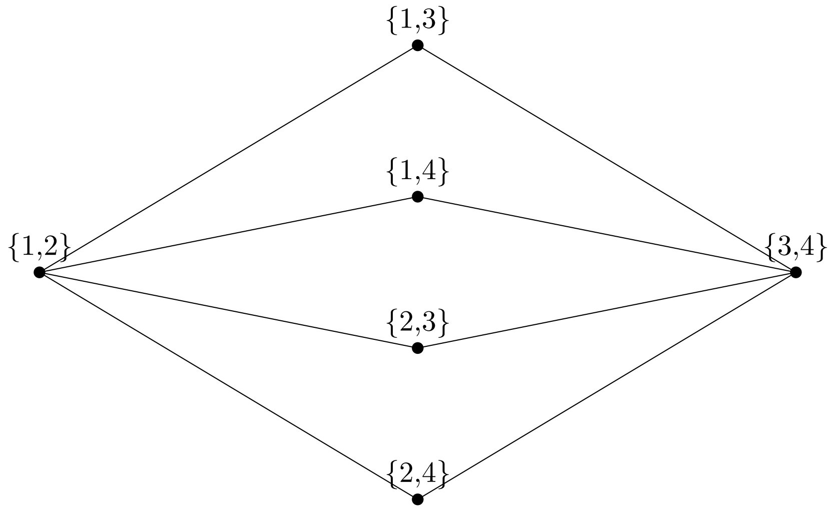


Abbildung 2: $ch(K_{2,4}) = 3$

Aber $K_{2,4}$ ist nicht 2-listenfärbbar, dh. $ch(K_{2,4}) \neq 2$. Und es ist leicht nachzuweisen, dass $ch(K_{2,4}) = 3$ gilt.

1.3 $\chi(G) \leq ch(G)$

Nach den obigen Beispielüberlegungen folgt der nächste Satz:

Satz 1.1. *Sei G ein Graph, dann gilt*
$\chi(G) \leq ch(G)$.

Beweis. Ist $ch(G) = k$, so existiert zu jeder Farbliste $C(v)$ mit $|C(v)| = k$ eine Färbung c. Mit $C(v) := \{0, ..., k-1\}$ $\forall v \in V$ folgt
{G ist k-färbbar} $\supseteq$ {G ist k-listenfärbbar}
und damit die Behauptung. $\square$

2 Planare Graphen

2.1 Der Vier-Farben-Satz

Das Vier-Farben Problem ist einfach beschrieben und hat etwas mit der Kartenfärbung zu tun. Natürlich, wenn wir Kartenfärbung meinen, heißt das, dass die Staatennachbarn verschieden gefärbt sind und dass sich die Staaten voneinander unterscheiden lassen. Zu Anfang scheint es, dass man bei hohem Komplexitätsgrad der Karte relativ viele Farben benötigt. Überraschenderweise ist das nicht so. Denn man bemerkt bald, dass man für jede Karte nur vier Farben braucht. Die Problemstellung, also der Nachweis, dass sich jede beliebiege Karte mit nur vier Farben einfärben lässt, geht auf Augustus De Morgan zurück. Dieser formulierte besagte Aufgabenstellung im Jahr 1852, nachdem sich einer seiner Studenten diesbezüglich an ihn wandte.

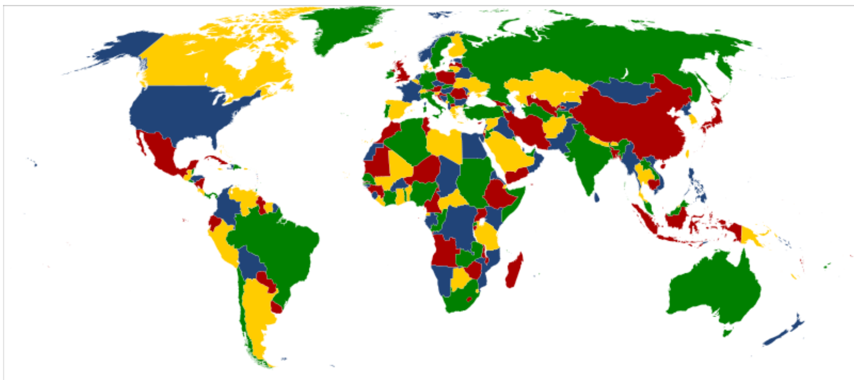


Abbildung 3: Weltkarte mit nur 4 Farben gefärbt

Dieses Problem kann man leicht mit Methoden der Graphentheorie umschreiben. Stellen wir uns die Karte, die gefärbt werden soll, als planaren Graphen so vor, dass die Knoten des Graphen jetzt in den Kartenflächen liegen und dass die Kanten des Graphen nur diejeniege Knoten, deren Kartenflächen benachbart sind, verbinden.
Somit können wir die Problemstellung umformulieren, indem wir die Kartenflächenfarbe mit der Farbe des ihr zugeordneten Knoten identifizieren. Somit lautet die Problemstellung nun folgendermaßen:

Satz 2.1. *Sei G ein planarer Graph. Dann gilt:* $\chi(G) \leq 4$.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr komplex und wurde erst im Jahr 1976 mittels Rechnertechnologie von Kenneth Appel und Wolfgang Haken erbracht. Dieser Beweis wurde von Neil Robertson im Jahr 1996 vereinfacht.

2.2 Listenfärbungssatz für planare Graphen

Das Problem, dass die listenchromatische Zahl von jedem planaren Graph höchstens 5 ist, haben als Erstes Paul Erdős, Arthur L. Rubin und Herbert Taylor in einer Arbeit im Jahr 1979 vermutet. Die Vermutung lautete also:

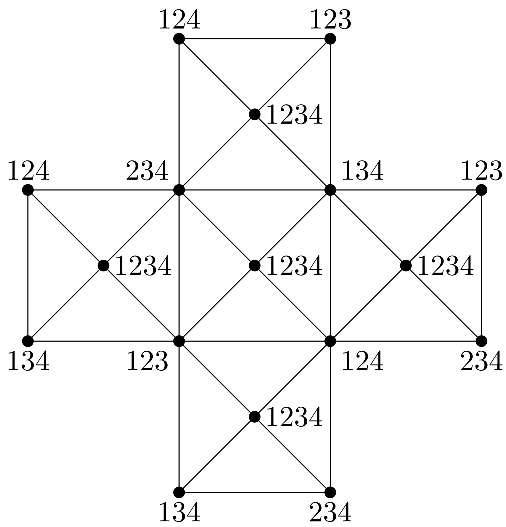
Satz 2.2. *Sei G ein planarer Graph. Dann gilt: $ch(G) \leq 5$.*

Der Satz wurde im Jahr 1994 von Carsten Thomassen bewiesen. Er hat mittels Induktion gezeigt, dass für jeden triangulierten planaren Graphen eine solche Vermutung gilt.

2.3 Das kleinste $ch(G) = 5$ Beispiel

Das erste Beispiel eines planaren Graphen G mit $ch(G) = 5$ geht auf Margit Voigt zurück. Der Graph in diesem Beispiel hat 238 Knoten. Aber es existiert noch ein Beispiel eines Graphen mit $ch(G) = 5$, das mit nur 63 Knoten auskommt. Dieses Beispiel geht auf Maryam Mirzakhani zurück.

Proposition 2.3. *Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph wie in Abbildung 4 gegeben. Dann vermuten wir, dass zu diesem Graph keine Listenfärbung mit schon gegebener Liste von Farben existiert.*



.

Abbildung 4: planarer Graph mit 17 Knoten.

Beweis. Man merkt zuerst, dass die Anzahl von Knoten $|V(G)| = 17$ ist und dass die inneren Knoten eine Liste mit vier und die äußeren Knoten eine Liste mit drei Farben besitzen. Da sind auch fünf Quadraten in diesem Graph. Wir nennen sie O, R, U, L und Z, für oberes, rechtes, unteres, linkes und zentrales

Quadrat. Weil die Farbe vom inneren Knoten in jedem Quadrat 1, 2, 3 oder 4 ist, folgt dass mindestens zwei gegenüberliegende äussere Knoten dieselbe Farbe besitzen. Wir bezeichnen diese Eigenschaft mit P. Wir behaupten, dass in einer beliebigen Listenfärbungen von G, im Quadrat Z, entweder die Farbe vom oberen rechten Knoten (ORKZ) 1 ist oder die Farbe vom oberen linken Knoten (OLKZ) 2 ist. Indirekt angenommen, die Farbe von (ORKZ) ist nicht 1 und die Farbe von (OLKZ) ist nicht 2. Dann haben wir zwei Fälle:
Fall 1: Die Farbe von (ORKZ) ist 3. Dann folgt wegen der Eigenschaft P in O, dass die Farbe von (OLKZ) 3 ist, was unmöglich ist.
Fall 2: Die Farbe von (ORKZ) ist 4. Dann folgt wegen der Eigenschaft P in Z, dass die Farbe von (OLKZ) 4 ist, was auch unmöglich ist.
Wenn die Farbe von (ORKZ) 1 ist, folgt wegen der Eigenschaft P im Quadrat R, dass der untere rechte Knoten in Z 2 sein muss. Weiters folgt wegen Eigenschaft P in U, dass die untere linke Knoten in Z 3 sein muss. Daraus folgt wegen Eigenschaft P in L, dass der obere linke Knoten in Z 4 sein muss. Und das ist ein Widerspruch zur Eigenschaft P in Z. Und für den Fall, dass die Farbe von (OLKZ) 2 ist, kann man analog schließen. □

Nun sagen wir, dass G_1, G_2, G_3 und G_4 vier disjunkte Kopien des Graphen G sind, sodass die Farbe $4 + i$ (wobei $i = 1, 2, 3, 4$) zur Farbenliste der äußeren Knoten in G_i (die bis jetzt nur drei Farben hatten) hinzufügt wird. Dann fügen wir einen neuen Knoten mit der Farbenliste {5, 6, 7, 8} zu unserem Graph hinzu und verbinden ihn mit den äußeren Knoten von allen G_i. Folgender Graph ist offensichtlich planar aber nicht 4-listenfärbbar und hat 69 Knoten.

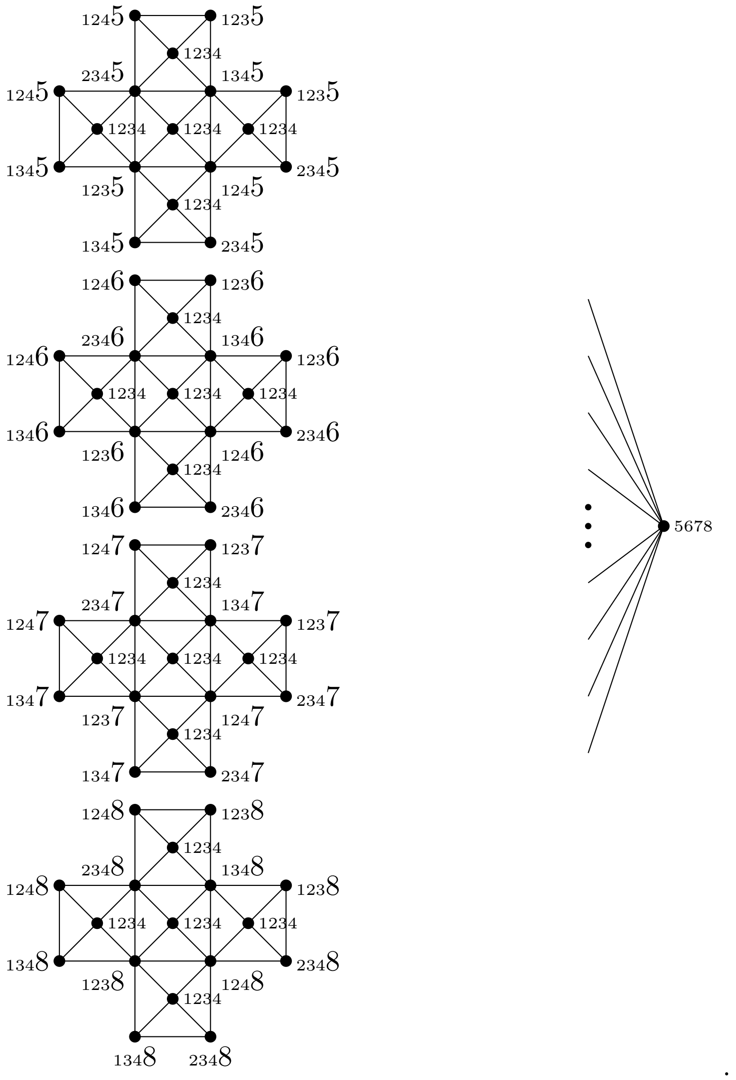


Abbildung 5: planarer Graph mit 69 Knoten.

Dieser Graph ist nicht 4-listenfärbbar, weil wenn wir z.B. unserem alleinstehenden Knoten die Farbe 5 zuordnen, dann können wir für den obersten ($i = 1$) Teilgraph keine Listenfärbung findnen. Und analog für die anderen Knotenfarben.

Das Beispiel können wir noch kleiner machen, indem wir die einzelnen G_i „zusammenkleben“.

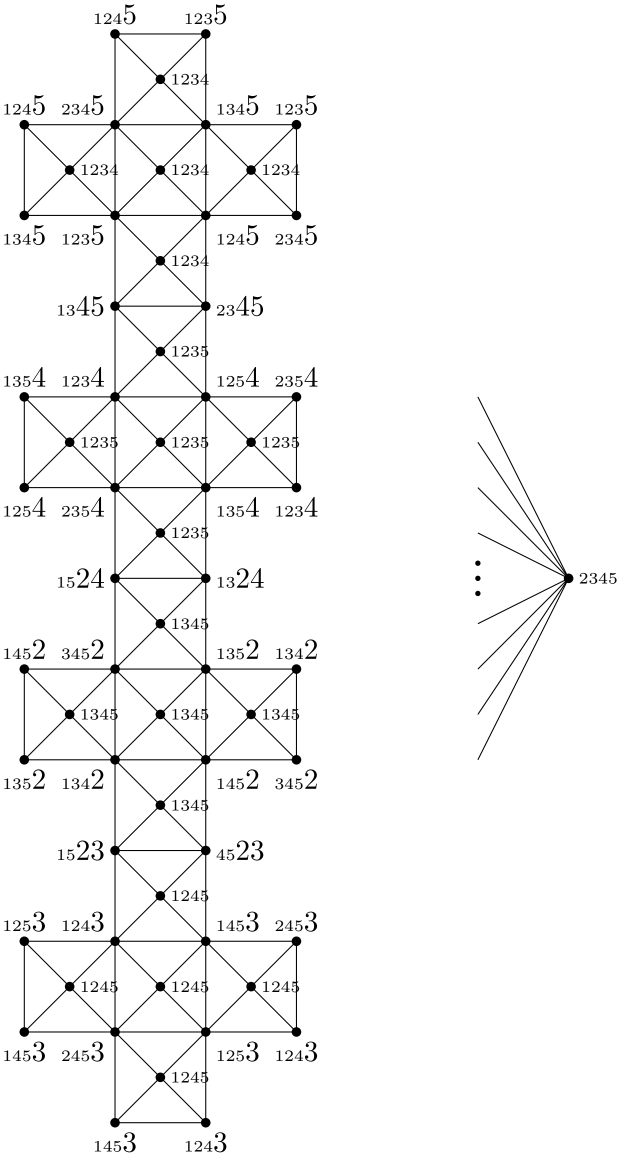


Abbildung 6: planarer Graph mit 63 Knoten.

Der jetzige Graph hat 63 Knoten und ist planar. Er ist nicht 4-listenfärbbar, weil wenn wir z.B. beim alleinstehenden Knoten Farbe 5 wählen, dann betrachten wir den obersten Teil des Graphen und sehen, dass wir hier jetzt nicht die Farbe 5 wählen können und wegen den Überlegungen zum Graphen G ist dieser Graphteil nicht listenfärbbar und automatisch ist der ganze Graph nicht 4-listenfärbbar. Wenn wir jetzt z.B. Farbe 4 wählen, dann befinden wir uns im untersten Teilgraphen und haben hier dieselbe Situation wie bei G, nur werden die Farben umbenannt (2 kann man jetzt als 3 bezeichnen, 3 als 2, 1 als 4 und 5 als 1). Und der Graph ist nicht 4-listenfärbbar. Wenn wir weiters die Farben 2 oder 3 wählen haben wir eine analoge Situation wie bei Farbe 4, nur die Farben kann man anders umstellen und zeigen, dass der Graph nicht 4-listenfärbbar.

3 Bipartite Graphen

Definition Ein Graph heißt **bipartit**, falls man seine Knoten in zwei disjunkte Mengen aufteilen kann, sodass die Knoten innerhalb der Teilmengen nicht verbunden sind.

Ein bipartiter Graph wird **vollständig** genannt, falls jeder Knoten aus der einen Teilmenge mit jedem Knoten aus der anderen Teilmenge verbunden ist.

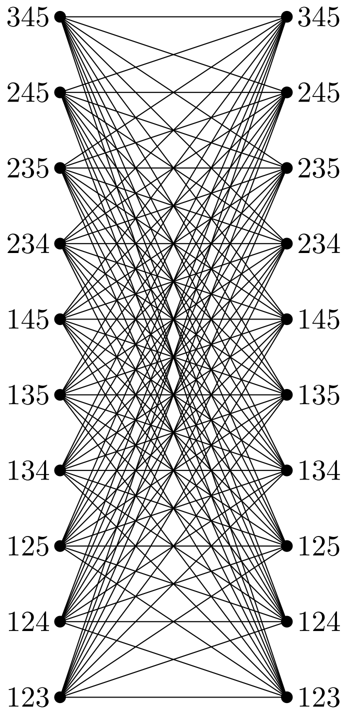


Abbildung 7: vollständiger bipartiter $K_{10,10}$ Graph.

Beim Graph $K_{10,10}$ ist leicht nachzuweisen, dass $ch(K_{10,10}) \neq 3$ ist. Zum Beispiel, nehmen wir an, dass in der rechten Knotenteilmenge nur die Farben 1 und 2 vorkommen, wo es möglich ist und, dass in der linken Knotenteilmenge nur die Farben 4 und 5 vorkommen, wo es möglich ist. Es bleibt ein Knoten auf der linken Seite, der mit $\{1, 2, 3\}$ gefärbt werden muss und einer auf der rechten Seite, der mit $\{3, 4, 5\}$ gefärbt werden muss. Für den linken kommen 1 und 2 nicht in Frage, weil diese Farben auf der rechten Seite vorkommen; und für den rechten kommen 4 und 5 nicht in Frage, weil diese Farben auf der linken Seite vorkommen. Folglich müssen beide mit 3 gefärbt werden, was ebenfalls nicht möglich ist, weil sie benachbart sind.

Folgender Satz wurde von Erdős, Rubin und Taylor im Jahr 1979 gezeigt:

Satz 3.1. *Vollständiger bipartiter Graph $K_{m,m}$ ist nicht k-listenfärbbar, wenn $m = \binom{2k-1}{k}$.*

Beweis. Den Knoten jeder Seite des $K_{m,m}$ werden unterschiedliche k-elementige Teilmengen von $\{1, ..., 2k-1\}$ zugeordnet. Für eine Färbung benötigt jeder der Seiten mindestens k Farben. Daher muss eine Farbe auf beiden Seiten vorkommen, was nicht möglich ist.

□

Literatur

[Ai/Zi] Aigner M., Ziegler G. M. (2010). *Das Buch der Beweise*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, dritte Auflage.

[Er/Ru/Ta] Erdős P., Rubin A. L., Taylor H. (1979). *Choosability in Graphs*, Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Arcata, Congressus Numerantium, 26, pp. 125−157.

[Mi] Mirzakhani M. (1996). *A small non-4-choosable planar graph*, Bull. Inst. Combin. Appl. 17, 15−18.