Übungsbeispiele zum VK Risikomanagement

1 Grundlagen

1.1. Ausgehend von einem Anfangsvermögen von 500 Euro ist Investor 1 mit folgender Lotterie $\tilde{x}_1$ konfrontiert:

x_1	$p(x_1)$
0	0.80
-100	0.20

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $\tilde{x}_1$.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Endvermögens $\tilde{w}_1$ und berechnen Sie dessen Erwartungswert und Varianz.

1.2. Neben Investor 1 betrachten wir nun Investor 2. Investor 2 hat ein Anfangsvermögen von 500 Euro und ist mit Lotterie $\tilde{x}_2$ konfrontiert, die ident zu Lotterie $\tilde{x}_1$ ist (d.h. $\tilde{x}_2$ hat die selben Ausprägungen mit den gleichen Eintrittswahrscheinlichkeiten). Die Lotterien $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ sind voneinander unabhängig.

Investor 1 und 2 treffen die Abmachung, ihr Risiko auf einer "50-50"- Basis zu teilen, d.h. jeder trägt die Hälfte von $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$.

(a) Bestimmen Sie die möglichen Ausprägungen und deren Wahrscheinlichkeiten, die die Zufallsvariable $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ annehmen kann.

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $\tilde{p} = (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)/2$.

(c) Die Nutzenfunktion von Investor i sei

$$V_i(\tilde{w}_{f,i}) = E(\tilde{w}_{f,i}) - k_i\sigma^2(\tilde{w}_{f,i}), \quad k_i > 0$$

(wobei $\tilde{w}_{f,i}$ das End-Vermögen von Investor i bezeichnet, und $i = 1, 2$ ist.) Zeigen Sie, dass der Nutzen nach dem "Risk-sharing" Abkommen (i.e. mit $\tilde{p}$) größer ist, als davor (i.e. mit $\tilde{x}_i$).

1.3. Nehmen Sie nun an, dass die Investoren das totale Risiko ($\tilde{x}_1+\tilde{x}_2$) im Verhältnis $\alpha : (1-\alpha)$ aufteilen.

(a) Drücken Sie V_1 und V_2 als Funktion von α aus.

(b) Gegeben der Gesamtnutzen setzt sich als Summe der Einzelnutzen zusammen, i.e. $V = V_1 + V_2$. Für welchen Wert von α wird dieser Gesamtnutzen maximiert? (Hinweis: das optimale α ist $k_2/(k_1 + k_2)$)

1.4. Herr Pospischil hat sich ein Gemälde von Picasso im Wert von 100 000 Euro gekauft. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Bild gestohlen oder durch ein Feuer vernichtet wird, schätzt Herr Pospischil auf 1 %. Eine Versicherung bietet ihm für eine Prämie von 1 000 Euro Versicherungsschutz an. Herr Pospischil gilt als risikoscheu. Wird er die Versicherung abschließen?

1.5. Ein Entscheidungsträger besitzt ein Anfangsvermögen von $w_0 = 2000$ und legt seinen Entscheidungen eine lineare Nutzenfunktion zugrunde. Bei einem Lotteriespiel kann er 5000 Euro mit Wahrscheinlichkeit p und 1000 Euro mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ gewinnen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p wenn das Sicherheitsäquivalent 4000 Euro beträgt?

1.6. Gegeben sind zwei Lotterien $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$. $\tilde{x}$ ist gleichverteilt auf dem Intervall $[-12, 20]$, $\tilde{y}$ ist gleichverteilt auf dem Intervall $[-11, 4]$. Angenommen der Entscheidungsträger hat ein Anfangsvermögen von $w_0 = 40$.

(a) Berechnen Sie für jede der beiden Lotterien $\mathrm{E}(\tilde{w}_f), \sigma^2(\tilde{w}_f)$ sowie die Semi-Varianz bei einer Schranke von $t = 35$.

(b) Bei einer Schranke von $t = 29$, welche der Lotterien ist riskanter hinsichtlich des "safety-first" Kriteriums?

1.7. Ein Entscheidungsträger hat ein Anfangsvermögen $w_0 = 2000$ Euro. Seine Nutzenfunktion sei von der Form (a) $u(x) = \log x$, (b) $u(x) = \sqrt{x}$. Von diesem Entscheidungsträger wissen wir, dass er die beiden Lotterien A und B gleichwertig findet.

Lotterie A		Lotterie B	
Wahrscheinlichkeit	Gewinn	Wahrscheinlichkeit	Gewinn
60%	1800 Euro	p	1500 Euro
40%	200 Euro	$1-p$	600 Euro

Wie groß ist p?

1.8. Ein Entscheidungsträger mit einem anfänglichen Vermögen von $w_0 = 100$ ist mit folgender Lotterie $\tilde{x}$ konfrontiert:

x	$p(x)$
-10	0.25
+10	0.75

Seine Nutzenfunktion sei

$$U(w) = \begin{cases} 2w & \text{für} \quad w \leq 100 \\ 100 + w & \text{für} \quad w > 100 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie das Sicherheitsäquivalent, den Angebotspreis und die Risikoprämie.

(b) Berechnen Sie nun diese Größen für folgende Nutzenfunktion V:

$$V(w) = \begin{cases} 2w & \text{für} \quad w \leq 100 \\ 150 + 0.5w & \text{für} \quad w > 100 \end{cases}$$

Geben Sie eine intuitive Erklärung für die festgestellten Änderungen des Sicherheitsäquivalents, des Angebotspreises und der Risikoprämie. (Hinweis: Welche der beiden Nutzenfunktionen entspreicht stärkerer Risikoaversion?)

1.9. Ein Entscheidungsträger mit einem anfänglichen Vermögen von $w_0 = 100$ ist mit folgender Lotterie $\tilde{y}$ konfrontiert:

y	$p(y)$
-16	0.25
+12	0.75

Seine Nutzenfunktion sei die Funktion U aus Beispiel 1.8.

Berechnen Sie das Sicherheitsäquivalent, den Angebotspreis und die Risikoprämie. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Beispiel 1.8.

(Sicherheitsäquivalent und Angebotspreis fallen, während die Risikoprämie stiegt. $\tilde{y}$ ist riskanter als $\tilde{x}$.)

1.10. Berechnen Sie für Beispiel 1.8 und 1.9 den Bietpreis p_b der Lotterie.

Hinweis: Dieser ist gegeben durch: $U(w_0) = \mathrm{E}[U(w_0 - p_b + \tilde{x})]$

1.11. Betrachten Sie die Nutzenfunktion

$$U(w_f) = -e^{-2w_f}$$

sowie die Lotterie $\tilde{x}$ die gleichverteilt auf dem Intervall $[-0.4, +0.6]$ ist und ein Anfangsvermögen von $w_0 = 1$.

(a) Berechnen Sie das Sicherheitsäquivalent, den Angebotspreis sowie die Risikoprämie.
(b) Vergleichen Sie den exakten Wert der Risikoprämie mit der aus der Arrow-Pratt Formel berechneten Approximation.
(c) Berechnen Sie den Bietpreis p_b (Nachfragepreis) der Lotterie.

1.12. Betrachten Sie bei einem Anfangsvermögen von $w_0 = 1$ die Nutzenfunktion

$$U(w_f) = -e^{-2w_f}$$

sowie die Lotterie $\tilde{y}$ die normalverteilt mit Erwartungswert $\mathrm{E}(\tilde{y}) = 1$ und Varianz $\sigma_{\tilde{y}}^2 = 25/3$ ist.

(a) Berechnen Sie das Sicherheitsäquivalent, den Angebotspreis sowie die Risikoprämie.
(b) Vergleichen Sie den exakten Wert der Risikoprämie mit der aus der Arrow-Pratt Formel berechneten Approximation.
(c) Berechnen Sie den Bietpreis p_b der Lotterie.

Hinweis: Für die Dichtefunktion $\phi(y)$ der Normalverteilung gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} -e^{-ay}\phi(y)dy = -exp[-a\mathrm{E}(\tilde{y}) + 0.5a^2\sigma_{\tilde{y}}^2]$$

1.13. Betrachten Sie die Nutzenfunktion von D. Bell:

$$U(w_f) = aw_f - be^{-cw_f}, \qquad \text{wobei } a \geq 0, \quad b, c, > 0$$

(a) Zeigen Sie, dass das Maß der absoluten Risikoaversion mit zunehmenden Vermögen fällt.

(b) Gehört diese Nutzenfunktion zur Klasse der Nutzenfunktionen mit hyperbolischer absoluter Risikoaversion?

Hinweis: Diese Klasse ist dadurch charakterisiert, dass das Maß der absoluten Risikoaversion von folgender Gestalt ist (a, b, γ geeignet gewählte Parameter)

$$\frac{a}{\left\{\frac{aw_f}{1-\gamma} + b\right\}}$$

(c) Zeigen Sie, dass für die Nutzenfunktion

$$U(w_f) = -ae^{-bw_f} - ce^{-dw_f}, \quad a, b, c, d > 0$$

das Maß der absoluten Risikoaversion fällt.

1.14. Zeigen Sie, dass das Arrow-Pratt-Maß der absoluten Risikoaversion invariant gegenüber positiv affin linearen Transformationen der Nutzenfunktion ist.

Ist das Arrow-Pratt-Maß der (i) absoluten bzw. (ii) relativen Risikoaversion invariant bezüglich der Währung, in der Sie das Vermögen messen?

1.15. Frau Huber besitzt Schmuck im Wert von 5000 Euro. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schmuck während einer Reise gestohlen wird, schätzt Frau Huber auf 1%. Frau Hubers sonstiges Vermögen beträgt 100000 Euro, ihre Nutzenfunktion lautet: $u_H(x) = \log(x/100)$.

(a) Wie hoch ist die maximale Prämie, die Frau Huber bereit ist zu zahlen, um ihren Schmuck versichern zu lassen?

(b) Frau Meier besitzt dasselbe Vermögen wie Frau Huber. Ihre Nutzenfunktion lautet: $u_M(x) = 1 - exp(-x/10000)$. Welche der beiden Damen ist bereit, eine höhere Prämie zu zahlen?

(c) Sind die beiden Damen bereit, eine höhere Prämie zu bezahlen, wenn ihr Vermögen steigt?

1.16. Katharina, Sebastian und Johannes besitzen je ein Los für eine Tombola, bei der sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% einen Gewinn von 100 Euro erzielen, und mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% 10 Euro gewinnen können. Ihre Nutzenfunktionen über den Gewinnen x lauten wie folgt:

Katharina:	$u(x) = 0.002x^2 + x$
Sebastian:	$u(x) = \log x$
Johannes:	$u(x) = 0.4x + 100$

Jemand möchte den dreien das Los abkaufen und bietet dafür 25 Euro. Wer würde sich auf den Handel einlassen? Bestimmen Sie für jede Person die Risikoprämie.

1.17. Herr Karl ist Leiter eines Softwarebüros und hat eine Nutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion $A_a(x) = 1/2000$. Er muss sich für das kommende Jahr zwischen zwei Projekten entscheiden. Das erste ist ein Kundenbetreuungssystem für eine große Bank, die ihm dafür 100.000 Euro angeboten hat. Das zweite Projekt ist die Entwicklung eines Schachprogramms. Falls dieses ein Erfolg wird, so würde es Herrn Karls Firma einen Ertrag von 250.000 Euro bringen, falls es jedoch ein Flop wird, so wäre der Ertrag 0. Die Entwicklungskosten betragen für beide Projekte 50000 Euro. Herr Karl ist zwischen den beiden Projekten indifferent.

(a) Wie hoch schätzt er die Erfolgschance für das Schachprogramm ein?

(b) Hängt diese geschätzte Erfolgschance vom Anfangsvermögen der Firma ab?

(c) Würde er eines der beiden Projekte strikt vorziehen, wenn sich die Entwicklungskosten bei beiden Projekten um 30 % erhöhen würden?

1.18. Vergleichen Sie die folgenden Lotterien

$\tilde{x}:$	-10	30
p_i	0.75	0.25

$\tilde{y}:$	-13	-10	-9	0
p_i	0.25	0.25	0.25	0.25

auf stochastische Dominanz 1. und 2. Ordnung.

1.19. In folgender Tabelle sind die möglichen Renditen zweier riskanter Anlagemöglichkeiten A und B angegeben, wobei jede Ausprägung als gleichwahrscheinlich anzusehen ist. Für welche Anlage entscheidet sich ein Investor aufgrund des Prinzips der stochastischen Dominanz zweiten Grades?

p_i	20%	20%	20%	20%	20%
r_A	0.5	0.5	0.7	0.7	0.7
r_B	0.9	0.8	0.4	0.3	0.7

1.20. Die folgende Tabelle gibt die Renditen zweier risikobehafteter Wertpapiere A und B an, wobei wieder alle Ausprägungen gleichwahrscheinlich sind.

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
r_A	0.	0.3	0.8	0.6	0.3
r_B	0.2	0.2	0.8	0.4	0.4

Welches dieser beiden Wertpapiere ist riskanter?

2 Anwendung Portfoliowahl

2.1. Bei einem Anfangsvermögen $w_0 > 0$ wird ein Teil m risikolos zu einem festen Zinssatz i angelegt, der verbleibende Teil $a = w_0 - m$ wird risikobehaftet angelegt, wobei die Ertragsrate $\tilde{x}$ mit Wahrscheinlichkeit p den Wert x_1 und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ den Wert x_2 annehmen kann. Es gelte $x_1 < i < x_2$.

Die optimale Wahl des Portfolios erfolgt unter zuhilfenahme der logarithmischen Nutzenfunktion $U(w_f) = \log w_f$ anhand des Erwartungsnutzenkriteriums

(a) Bestimmen Sie den erwarteten Nutzen für dieses Problem

(b) Berechnen Sie die Optimalitätsbedingungen und bestimmen Sie a^*.

(c) Unter welchen Bedingungen ist a^* positiv? Zeigen Sie, dass

$$a^*(\mu - i) \geq 0 \text{ gilt.}$$

(d) Bestimmen Sie $\mathrm{d}a^*/\mathrm{d}w_0$ und zeigen Sie das dieser Ausdruck positiv ist, falls $a^* > 0$. Welcher Zusammenhang besteht zur absoluten Risikoaversion der logarithmischen Nutzenfunktion?

(e) Angenommen x_1 fällt und x_2 steigt, wobei der Erwartungswert μ gleichbleibt, wie ändert sich die optimale Lösung?

(f) Wie ändert sich die optimale Lösung, wenn p abnimmt?

2.2. Ein Entscheidungsträger mit einer negativ exponentiellen Nutzenfunktion $U(w_f) = -e^{-\gamma w_f}$ will sein Anfangsvermögen w_0 zwischen einer risikolosen Anlage (mit Ertragsrate i) und einer riskanten Anlageform aufteilen. Der Ertrag der risikobehafteten Anlageform $\tilde{x}$ ist exponentialverteilt, i.e. die Dichte hat die Form:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ für } x \geq 0, \lambda > 0.$$

(a) Bestimmen Sie die optimale Lösung a^*.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{d}a^*/\mathrm{d}w_0$ und stellen Sie den Zusammenhang zur absoluten Risikoaversion her.

(c) Zeigen Sie, dass ein Anstieg von γ eine Verminderung von $|a^*|$ hervorruft.

(d) Zeigen Sie, dass a^* positiv ist genau dann, wenn $\mathrm{E}(\tilde{x}) > i$ ist.

2.3. Nehmen Sie an, dass das risikolose Vermögen mit Rate $i = 0.05$ angelegt ist und das risikobehaftete Vermögen mit Rate $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{y}$ angelegt ist, wobei gilt:

x	$p(x)$
0.02	1/3
0.05	1/3
0.10	1/3

y	$p(y)$
0.02	0.25
0.05	0.50
0.10	0.25

(a) Zeigen Sie, dass für jeden risikoaversen Entscheidungsträger die Wahl des optimalen Portfolios unabhängig davon ist, ob der Ertrag des risikobehafteten Vermögenswertes durch $\tilde{x}$ oder $\tilde{y}$ gegeben ist.

(b) Allgemein gilt: Falls $\tilde{y}$ mit Wahrscheinlichkeit q durch $\tilde{x}$ gegeben ist, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - q$ den Wert i annimmt, so bewirkt eine Verschiebung der Verteilung der Ertragsrate von $\tilde{x}$ zu $\tilde{y}$ keinen Einfluss auf das optimale Portfolio.

(c) Bestimmen Sie den Wert von q, mit dessen Hilfe $\tilde{y}$ aus $\tilde{x}$ in obigen Tabellen bestimmt wurde.

3 Anwendung Versicherung

3.1. Show that the standard portfolio problem and the insurance problem can both be rewritten as

$$max_a \mathrm{E}[U(x_0 + \alpha\tilde{x})]$$

where α is the demand for the risky asset or the retention rate, whereas $\tilde{x}$ is the excess return of the risky asset or the full-insurance premium minus the loss. (In the insurance problem x_0 stands for $w_0 + L$ from which one has to deduct the full insurance premium.)

3.2. Consider the standard insurance problem for the specific case of a power utility function $U(w_f) = sgn(\beta)w^{\beta}, \beta \leq 1$.

Show that the optimal retention rate (i.e. one minus the insurance rate a) is proportional to the initial wealth net of the full insurance premium.

3.3. Show that the optimal rate of coverage a is not necessarily positive. Give a counter-example. Can you provide an intuitive argument for this?

3.4. Suppose that the insurance tariff is defined by:

$$P = \begin{cases} 0 & \text{if } a = 0 \\ P_0 + (1+\lambda)a\mu L & \text{for } a > 0 \end{cases}$$

instead of $P = (1+\lambda)a\mu L$ for $a \geq 0$.

P_0 can be interpreted as an entry fee to the insurance market to cover overhead costs.

(a) Show that an increase in P_0 increases the demand for insurance under decreasing absolute risk aversion when a is initially strictly positive.

(b) Using an example with a specific utility function (e.g. a logarithmic one) and a specific density function (e.g. a binary one) show that there exists a value of the loss of P_0 such that the individual is indifferent between not insuring or buying the optimal value a^*.

3.5. Ein Entscheidungsträger mit einem Anfangsvermögen von $w_0 = 10000$ Euro und einem zu versichernden Gut im Wert von $L = 4000$ Euro legt seinen Entscheidungen die Nutzenfunktion $U(w_f) = \sqrt{w_f}$ zugrunde. Die Prämie ist durch $P = (1+\lambda)\mathrm{E}[I(\tilde{x}L)]$ gegeben, wobei $\lambda = 0.01$ sei.

Die Zufallsvariable $\tilde{x}$ sei auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt.

Gegeben seien weiters die beiden Entschädigungsfunktionen (i) $I(xL) = axL$ sowie (ii) $I(xL) = \max\{0, xL - d\}$.

(a) Bestimmen Sie den erwarteten Nutzen des Endvermögens.

(b) Welche Wahl von a bzw. d maximiert den erwarteten Nutzen?

(c) Welche der Entschädigungsfunktionen (i) oder (ii) liefert den höheren maximalen Nutzen?

(d) Wie ändern sich die Werte a^* bzw. d^* bei einem Anstieg von w_0?

3.6. Rechnen Sie obiges Beispiel unter der Annahme, dass der Entscheidungsträger die Nutzenfunktion

$$U(w_f) = -e^{-\beta w_f}$$

seiner Entscheidung zugrundelegt.

Wie ändert sich die Lösung, wenn β steigt?

3.7. Ein Entscheidungsträger mit einem Anfangsvermögen von $w_0 = 10000$ Euro und einem zu versichernden Gut im Wert von $L = 4000$ Euro legt seinen Entscheidungen die Nutzenfunktion $U(w_f) = \log w_f$ zugrunde. Die Prämie ist durch $P = (1+\lambda)\mathrm{E}[I(\tilde{x}L)]$ gegeben, wobei $\lambda = 0.01$ sei.

Die Zufallsvariable $\tilde{x}$ nimmt mit Wahrscheinlichkeit p den Wert $x_1 = 0.1$ (= leichter Schaden) bzw. mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$ den Wert $x_2 = 0.9$ (= schwerer Schaden) an.

Gegeben sei die Entschädigungsfunktion $I(xL) = \max\{0, a(xL - d)\}$.

(a) Bestimmen Sie den erwarteten Nutzen des Endvermögens.

(b) Welche Wahl von a und d maximiert den erwarteten Nutzen?

(c) Wie ändern sich die Werte a^* bzw. d^* bei einem Anstieg von p?

4 Anwendung Produktionsentscheidungen

4.1. The owner of a privately held firm has a logarithmic utility function and an initial wealth of 100. A single output is produced the marginal costs of which is constant and equal to 5 ($c'(a) = 5$) up to the maximum capacity of production that is reached at $a = 20$. The fixed costs B amount to 2.

The only source of uncertainty is the price per unit of output that will be obtained on a competitive market. If market conditions are bad (probability 0.5) the unit price will amount to 3 but if they are good the unit price will reach 9.

(a) Write the expected utility of the producer and compute the optimal level of production. Show that an increase in the fixed costs (from 2 to 3) will reduce the optimal output.

(b) What would output level be if a certain output price equal to 6 were guaranteed? Why does the output level increase?

(c) Compare the level of output found in Question (a) to the one that would be obtained if the producer had the following price expectation: the lowest price is equal to 4 (probability=0.5) and the highest one equal to 8. Justify intuitively why output is increased.

(d) Assume now that thanks to a new and more flexible production design, the producer can start production after output price is known. How much will be produced when $p = 3$ and how much when $p = 9$? Compute the expected utility reached under this new system and compare it with the one obtained in Question (a). Then express the monetary value of information.

4.2. A farm faces two sources of risk:

- the output price is random ($\tilde{p}$)
- the amount of fixed costs - that fluctuates with the price of land - is also random and denoted by $\tilde{B}$.

The marginal costs is constant and there is no capacity limit.

(a) Write the expression for the expectation of final wealth and its variance (allowing for a possible correlation between $\tilde{p}$ and $\tilde{B}$.)

(b) If the producer has a quadratic utility function $U(w) = w - \beta w^2$, solve for the optimal a. Compare it with optimal a^* if $\tilde{B}$ were certain and equal to $\mathrm{E}(\tilde{B})$ which you denote by B.

4.3. Return to the initial data of Exercice 4.1, i.e.:

The owner of a privately held firm has a logarithmic utility function and an initial wealth of 100. A single output is produced the marginal costs of which is constant and equal to 5 ($c'(a) = 5$) up to the maximum capacity of production that is reached at $a = 20$. The fixed costs B amount to 2.

The only source of uncertainty is the price per unit of output that will be obtained on a competitive market. If market conditions are bad (probability 0.5) the unit price will amount to 3 but if they are good the unit price will reach 9.

Assume now that the producer has access to a forward market on which a futures price p_t prevails equal to 7.

(a) Show that the optimal level will correspond to the maximal capacity $a^* = 20$.

(b) Compute then a_t^* and explain why a_t^* exceeds a^* (you will need to compare p_t with $\mathrm{E}(\tilde{p})$.

(c) Compare the (maximized) expected utility with the expected utility computed in exercise 4.1, i.e. without forward market.

(d) Solve Questions (a) - (c) again assuming now that $p_t = 6$.

4.4. A farmer who lives in a competitive environment faces the following cost function

$$c(a) = a + 0.1a^2$$

The initial wealth amounts to $w_0 = 1000$ and fixed costs are equal to 100. The utility function is the negative exponential function $U(w_f) = -exp[-\gamma w_f]$.

(a) How much will this farmer produce if he is sure to obtain a unit price of 11?

(b) What happens to optimal output if there is now an uncertain output price characterised by a normal density with expected price equal to 11 and a varianz $\sigma_p^2 = 4$?

(c) What happens to optimal output under certainty and under uncertainty when fixed costs increase? (While the answer is the same in each case, they have a very different justification)

(d) By having a look at the first order conditions in Question (b) express the marginal costs of risk for the farmer.

(e) What happens to optimal output when σ_p^2 increases?

Hint: For the density $\phi(y)$ of the normal distribution the following equality holds:

$$\int_{-\infty}^{\infty} -e^{-ay}\phi(y)dy = -exp[-a\mathrm{E}(\tilde{y}) + 0.5a^2\sigma_{\tilde{y}}^2]$$

4.5. Return to the example of the risk-neutral newsboy and the problem of demand uncertainty. The output price is fixed at $p = 25$, the unit price of unsold inventory is $p_0 = 1$, the unit costs of production or acquisition of the merchandise are $c = 15$, the unit costs of unsatisfied demand are $c_0 = 4$. (There are no fixed costs, i.e. $B = 0$.)

The random demand follows a exponential distribution whith density function $\lambda \exp[-\lambda d]$ where the parameter is $\lambda = 0.02$. For the expected demand we therefore get $\mathrm{E}(\tilde{d}) = 50$.

(a) Show that the optimal order is lower than 50. (compute its exact value.)

(b) Express the expected profit of the newsboy.

(c) Compare the expected profit, if the newsboy were able to order the newspapers once d is known (i.e. the newsboy has prefect information on $\tilde{d}$.) Derive the value of prefect information.

(d) What is the probabiliity that the newsboy will be given the information $\tilde{d} \leq 50$, or $\tilde{d} > 50$, respectively. Express in each case the density of $\tilde{d}$ conditional on the information received and the corresponding optimal order. Show that the value of partial information is lower than that of perfect information.

4.6. An individual is endowed with the following risk situation:

$$
\begin{array}{rr}
p = 0.25 & \qquad w_{f,s} = 10 \\
1 - p = 0.75 & \qquad w_{f,g} = 20
\end{array}
$$

The utility function is $U(w_f) = w_f - 0.02 w_f^2$.

Draw the indifference curve through the initial endowment in the state-claims diagram. Show that this individual would agree to give up 2 units of final wealth in state g to obtain 6 units of final wealth in state s.

4.7. Besides a wealth of 180, an individual owns the following lottery $\tilde{x}$:

x	$p(x)$
-80	0.40
0	0.60

This individual has a utility function $U(w_f) = \log(w_f/20)$.

(i) Compute the certainty equivalent, asking price and risk premium of the lottery.

(ii) Use a two-dimensional graph to represent the initial position of the final wealth (on the abscissa the final wealth in case the favorable outcome of the lottery occurs and on the ordinate the final wealth in the other case) of the individual (call it a) and draw the indifference curve through this point. Locate precisely the intersection between this indifference curve and the 45° identity line (call this point c).

Once you have located point c you should observe that its abscissa (which of course equals its ordinate) is nothing but the value of the certainty equivalent.

With some more effort you can obtain an interpretation of the asking price. Should the individual have access to an insurance contract offering free of charge an indemnity of 80 if the undesirable outcome of the lottery were to occur, show that this contract would involve a transfer from the initial point a to a point b located on the

45° line directly above a. Such a contract is, of course, "welfare-improving" since b is on a higher indifference curve that a. (draw the indifference curve through b).

Now answer the following question: how much money would the individual be willing to give up in each of the two states to obtain this contact that pays money in only one state (the state of loss)? To determine this amount of money you move from b along the 45° line until you reach point c. You then measure this distance on the abscissa and you recover the asking price of the lottery.

In order to illustrate the risk premium you compute $\mathrm{E}(\tilde{w}_f)$ and locate this point on the 45° line. The distance between the abscissa of this point and 180 measures $\mathrm{E}(\tilde{x})$; by comparing $\mathrm{E}(\tilde{x})$ with the asking price you recover the risk premium.

4.8. We have illustrated in the exercise (4.7) our assertion that the notion of the asking price of a lottery corresponds to the idea of insurance for the buyer of an insurance policy. To be more precise the asking price corresponds to the idea of full insurance (that is an indemnity covering 100 per cent of the loss). However, in the real world partial insurance coverage is more common. Nevertheless it is easy to define the asking price for a partial insurance coverage with the help of our two-dimensional graph.

Starting from point a imagine now that the individual is offered free of charge an indemnity of 60 (i.e. cover at 75% against loss of 80). There is a move from a in the direction of point b but below b. Call this new point b' and draw the indifference curve through b'. As expected b' is preferred to a but is dominated by b.

Now answer the following question: how much money should the individual be willing to give up in each state in order to obtain this partial insurance contract? To find the answer you start from point b' and draw a line parallel to the 45° line until it intersects the indifference curve through a, say at point c'. Of course you find that the asking price for a partial coverage is lower than the asking price for full coverage.

5 Kombinationen von Optionen

5.1. Ein **Long-Butterfly Spread** ist eine Kombination eines Long Calls mit niedrigem Exercise Preis X_1, eines Long-Calls mit hohem Exercise Preis X_3 sowie zweier Short-Calls mit dazwischenliegendem Exercise Preis X_2, (wobei $X_2 = (X_1 + X_3)/2$ gilt); d.h. der Händler kauft zwei Call-Optionen mit Exercise Preis X_1 bzw. X_3 und verkauft zwei Call-Optionen mit Exercise Preis X_2.

Bestimmen Sie den Gewinn/Verlust (graphische Darstellung) des Händlers in Abhängigkeit vom Wert des Underlyings für folgenden Fall:

1	Long Call:	$X_1 = 54$US\$,	Optionsprämie:	2.5 US\$
1	Long Call:	$X_3 = 60$US\$,	Optionsprämie:	2 US\$
2	Short Calls:	$X_2 = 57$US\$,	Optionsprämie:	2.25 US\$

5.2. Ein **Long-Fence** wird durch den gleichzeiten Kauf einer Call-Option mit hohem Exercise Preis X_2 und Verkauf einer Put-Option mit niedrigem Exercise Preis X_1 erzeugt.

Bestimmen Sie die Auszahlungsfunktion (i.e. den Gewinn/Verlust in Abhängigkeit vom Preis des Underlyings).

5.3. Ein **Long-Straddle** entsteht durch Kauf einer Call-Option und Kauf einer Put-Option mit identischen Exercise Preisen X (und gleichen Laufzeiten).

Skizzieren Sie die Auszahlungsfunktion für $X = 55$US\$, wobei die Optionsprämie der Call-Option 4.0 US\$ beträgt, und die Optionsprämie für die Put-Option 3.5 US\$.

Wann ist diese Strategie vorteilhaft?

6 Bewertung von Optionen

6.1. Berechnen Sie nach dem Modell von Black den fairen Wert einer Put- bzw. Call Option auf WTI (West Texas Intermediate) bei einem Exercise Preis von 54.50 US\$ und einer (Rest-)Laufzeit von 0.1 Jahr, wenn folgende Daten bekannt sind:
der risikofreie Zinssatz beträgt 3.5% pro Jahr, der Futurespreis am Tag der Bewertung sei 50.00 US\$.

Die Volatilität soll anhand der Preise S_i (in US\$) des Underlyings an den folgenden Handelstagen geschätzt werden.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_i	52.50	52.35	51.90	51.95	52.20	52.55	52.45	52.60	52.65	52.55	52.70

Berechnen Sie zur Schätzung der Volatilität σ zunächst

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}$$

mit $u_i = \log(S_i/S_{i-1})$ ($\log\cdots$natürlicher Logarithmus!!) Für die Schätzung der jährlichen Volatilität erhalten Sie dann

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

wobei τ die Länge der Intervalle des Beobachtungszeitraums in Jahren ist. Da wir tägliche Beobachtungen haben ist also $\tau = 1/250$ (unter der Annahme von 250 Handelstagen.) Somit ergibt sich $\sigma = s\sqrt{250}$.

6.2. Betrachten Sie nochmals Aufgabe 6.1. Angenommen die Call-Option wird zu einem Preis von 2.15 US\$ gehandelt. Bestimmen Sie (numerisch) die implizite Volatilität; i.e. jene Volatilität, die nach der Formel von Black diesen Preis ergeben hätte.

6.3. Zeigen Sie, dass für die nach dem Modell von Black berechneten Preise für Call- bzw. Put-Optionen (europäischen Typs auf Futures) folgendes gilt: die Differenz der fairen Bewertungen zwischen Call- und Put-Option entspricht der abgezinsten Differenz des aktuellen Futures-Preises und des Exercise Preises.

6.4. Betrachten Sie folgende Put-Option auf Brent- Rohöl:

Spotpreis	$F = 48$US\$/bbl	Exercise Preis	$X = 49$ US\$/bbl
Volatilität	$\sigma = 0.35$	Zinssatz	$r = 0.05$
Restlaufzeit	$T = 4$Monate	5 Zeitpunkte	$\Delta t = 1/12$ Jahr
			(4 Zeitintervalle) Jahr

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe eines binomialen Baumes den Wert dieser Option, unter der Annahme, dass sie europäischen Typs ist.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Black den Wert der Option unter der Annahme, dass sie europäischen Typs ist, und vergleichen Sie dies mit (i).

(iii) Berechnen Sie nun mit Hilfe eines binomialen Baumes den Wert der Option unter der Annahme, dass sie amerikanischen Typs ist.

(iv) Berechnen Sie nun unter Zuhilfenahme der Ergebnisse von (i)-(iii) den Wert der Option amerikanischen Typs nach der Control Variate Technique.

6.5. Berechnen Sie zu den in Bsp. 6.4 gegebenen Daten den fairen Wert einer europäischen Call Option nach dem Modell von Black.

Wie ändert sich der Wert der Call- bzw. Put Option bei einer Änderung des Wertes des Underlyings? Berechnen Sie den entsprechenden "Griechen" und bestimmen Sie damit näherungsweise den Wert der Option für $F = 49$US\$/bbl.

Vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem Wert der sich aus der Formel von Black für $F = 49$US\$/bbl ergibt.

6.6. Stellen Sie ähnliche Berechnungen wie in Aufgabe 6.5 an, für

(a) Abnahme der Restlaufzeit auf $T = 3$ Monate

(b) Änderung der Volatilität auf $\sigma = 0.40$

(c) Änderung des risikofreien Zinssatzes auf $\rho = 0.045$.

7 Value at Risk

7.1. Der Verlust X eines Portfolios über einen vorgegebenen Zeitraum ist normalverteilt mit Mittelwert $\mu = -50$ und Varianz $\sigma^2 = 10000$, i.e. $X \sim N(-50, 10000)$. (Positive Werte entsprechen einem Verlust, negative Werte einem Gewinn.)

(a) Berechnen Sie den "Value at Risk" (VaR) zum Signifikanzniveau $\alpha = 95\%$.
(Hinweis: Sei $\Phi(.)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Dann gilt: $\Phi^{-1}(0.95) = 1.64485$)

(b) Berechnen Sie den erwarteten Verlust, gegeben dass er über dem VaR-Wert (zum Signifikanzniveau von $\alpha = 95\%$) liegt, i.e. $\mathrm{E}(X|X \geq \mathrm{VaR}_{0.95})$.
Hinweis: Für die Standardnormalverteilung gilt:

$$\int_a^\infty x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}$$

7.2. Der Verlust X eines Gesamtportfolios setzt sich additiv aus den Verlusten X_1 und X_2 zusammen. X_1 und X_2 sind voneinander unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Mittelwert $\mathrm{E}(X_i) = 3$. Zeigen Sie, dass der *Value at Risk* VaR des Gesamtportfolios zum Signifikanzniveau $\alpha = 70\%$ größer ist, als die Summe der VaR-Werte der Einzelkomponenten.

Hinweis: Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Mittelwert $1/\lambda$ lautet:

$$F(x) = 1 - \exp[-\lambda x]$$

Sind X_1 und X_2 voneinander unabhängig und exponentialverteilt mit Mittelwert $1/\lambda$, so ist $X_1 + X_2$ erlangverteilt mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - (1 + \lambda x) \exp[-\lambda x]$$

7.3. Ein Unternehmen habe ein Portfolio aus zwei offenen Long-Positionen und zwar 10.000 bbl Brent Rohöl und 1.000 t Heizöl. Der heutige Marking to Market Wert dieser Positionen beträgt bei Preisen von 48.63 US$/bbl bzw. 521.00 US$/t exakt 1 007 300US$.

Während der letzten 21 Handelstage haben sich die Preise (in US$ pro Barrel bzw. je Tonne) entsprechend folgender Tabelle geändert.

t	Brent	Heizöl
-21	47.28	518.75
-20	49.08	522.50
-19	48.45	522.25
-18	47.95	521.75
-17	47.25	519.00
-16	47.83	519.50
-15	47.34	519.50
-14	46.98	518.25
-13	47.02	518.25
-12	47.89	519.00
-11	47.01	518.50
-10	46.86	518.00
-9	47.42	519.00
-8	48.13	519.50
-7	48.43	520.00
-6	48.06	519.75
-5	47.39	519.00
-4	47.25	518.75
-3	47.03	518.50
-2	47.96	519.25
-1	48.75	521.25
0	48.63	521.00

Bestimmen Sie durch historische Simulation den VaR auf dem 90% Konfidenzniveau für den nächsten Handelstag.

7.4. Die unabhängigen Beobachtungen $X_i, i = 1, \cdots, n$ seien die Verluste eines Portfolios, die über einer Schranke U liegen. Angenommen, Sie wollen dieses Überschreiten der Schranke, i.e. die Differenz $X_i - U$, durch eine allgemeine Pareto-Verteilung beschreiben, und die Parameter β und ξ durch eine Maximum-Likelihood-Schätzung bestimmen.

Formulieren Sie dazu die Log-Likelihood-Funktion und die Bedingungen erster Ordnung.

Hinweis: Bei der Maximum-Likelihood Methode werden die Parameter derart bestimmt, dass die gemeinsame Dichtefunktion ausgewertet an den Beobachtungen maximiert wird.

Die Dichte der allgemeinen Pareto-Verteilung lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)}$$

(dabei ist $\beta > 0$ und $x \geq 0$ falls $\xi > 0$ bzw. $0 \leq x \leq -\beta/\xi$ falls $\xi < 0$. Für $\xi = 0$ erhält man die Dichte der Exponentialverteilung $\exp(-x/\beta)/\beta$.)