5. Kombinationen von Optionen

5.1. Ein **Long-Butterfly Spread** ist eine Kombination eines Long Calls mit niedrigem Exercise Preis X_1, eines Long-Calls mit hohem Exercise Preis X_3 sowie zweier Short-Calls mit dazwischenliegendem Exercise Preis X_2, (wobei $X_2 = (X_1 + X_3)/2$ gilt); d.h. der Händler kauft zwei Call-Optionen mit Exercise Preis X_1 bzw. X_3 und verkauft zwei Call-Optionen mit Exercise Preis X_2.

Bestimmen Sie den Gewinn/Verlust (graphische Darstellung) des Händlers in Abhängigkeit vom Wert des Underlyings für folgenden Fall:

1	Long Call:	$X_1 = 54$US\$,	Optionsprämie:	2.5 US\$
1	Long Call:	$X_3 = 60$US\$,	Optionsprämie:	2 US\$
2	Short Calls:	$X_2 = 57$US\$,	Optionsprämie:	2.25 US\$

5.2. Ein **Long-Fence** wird durch den gleichzeiten Kauf einer Call-Option mit hohem Exercise Preis X_2 und Verkauf einer Put-Option mit niedrigem Exercise Preis X_1 erzeugt.

Bestimmen Sie die Auszahlungsfunktion (i.e. den Gewinn/Verlust in Abhängigkeit vom Preis des Underlyings).

5.3. Ein **Long-Straddle** entsteht durch Kauf einer Call-Option und Kauf einer Put-Option mit identischen Exercise Preisen X (und gleichen Laufzeiten).

Skizzieren Sie die Auszahlungsfunktion für $X = 55$US\$, wobei die Optionsprämie der Call-Option 4.0 US\$ beträgt, und die Optionsprämie für die Put-Option 3.5 US\$.

Wann ist diese Strategie vorteilhaft?

6. Bewertung von Optionen

6.1. Berechnen Sie nach dem Modell von Black den fairen Wert einer Put- bzw. Call Option auf WTI (West Texas Intermediate) bei einem Exercise Preis von 54.50 US\$ und einer (Rest-)Laufzeit von 0.1 Jahr, wenn folgende Daten bekannt sind:
der risikofreie Zinssatz beträgt 3.5% pro Jahr, der Futurespreis am Tag der Bewertung sei 50.00 US\$.

Die Volatilität soll anhand der Preise S_i (in US\$) des Underlyings an den folgenden Handelstagen geschätzt werden.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_i	52.50	52.35	51.90	51.95	52.20	52.55	52.45	52.60	52.65	52.55	52.70

Berechnen Sie zur Schätzung der Volatilität σ zunächst

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}$$

mit $u_i = \log(S_i/S_{i-1})$ ($\log\cdots$natürlicher Logarithmus!!) Für die Schätzung der jährlichen Volatilität erhalten Sie dann

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

wobei τ die Länge der Intervalle des Beobachtungszeitraums in Jahren ist. Da wir tägliche Beobachtungen haben ist also $\tau = 1/250$ (unter der Annahme von 250 Handelstagen.) Somit ergibt sich $\sigma = s\sqrt{250}$.

6.2. Betrachten Sie nochmals Aufgabe 6.1. Angenommen die Call-Option wird zu einem Preis von 2.15 US$ gehandelt. Bestimmen Sie (numerisch) die implizite Volatilität; i.e. jene Volatilität, die nach der Formel von Black diesen Preis ergeben hätte.

6.3. Zeigen Sie, dass für die nach dem Modell von Black berechneten Preise für Call- bzw. Put-Optionen (europäischen Typs auf Futures) folgendes gilt: die Differenz der fairen Bewertungen zwischen Call- und Put-Option entspricht der abgezinsten Differenz des aktuellen Futures-Preises und des Exercise Preises.

6.4. Betrachten Sie folgende Put-Option auf Brent- Rohöl:

Spotpreis	$F = 48$US$/bbl	Exercise Preis	$X = 49$ US$/bbl
Volatilität	$\sigma = 0.35$	Zinssatz	$r = 0.05$
Restlaufzeit	$T = 4$Monate	5 Zeitpunkte	$\Delta t = 1/12$ Jahr
			(4 Zeitintervalle) Jahr

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe eines binomialen Baumes den Wert dieser Option, unter der Annahme, dass sie europäischen Typs ist.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Black den Wert der Option unter der Annahme, dass sie europäischen Typs ist, und vergleichen Sie dies mit (i).

(iii) Berechnen Sie nun mit Hilfe eines binomialen Baumes den Wert der Option unter der Annahme, dass sie amerikanischen Typs ist.

(iv) Berechnen Sie nun unter Zuhilfenahme der Ergebnisse von (i)-(iii) den Wert der Option amerikanischen Typs nach der Control Variate Technique.

6.5. Berechnen Sie zu den in Bsp. 6.4 gegebenen Daten den fairen Wert einer europäischen Call Option nach dem Modell von Black.

Wie ändert sich der Wert der Call- bzw. Put Option bei einer Änderung des Wertes des Underlyings? Berechnen Sie den entsprechenden "Griechen" und bestimmen Sie damit näherungsweise den Wert der Option für $F = 49$US$/bbl.

Vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem Wert der sich aus der Formel von Black für $F = 49$US$/bbl ergibt.

6.6. Stellen Sie ähnliche Berechnungen wie in Aufgabe 6.5 an, für

(a) Abnahme der Restlaufzeit auf $T = 3$ Monate

(b) Änderung der Volatilität auf $\sigma = 0.40$

(c) Änderung des risikofreien Zinssatzes auf $\rho = 0.045$.

7. Value at Risk

7.1. Der Verlust X eines Portfolios über einen vorgegebenen Zeitraum ist normalverteilt mit Mittelwert $\mu = -50$ und Varianz $\sigma^2 = 10000$, i.e. $X \sim N(-50, 10000)$. (Positive Werte entsprechen einem Verlust, negative Werte einem Gewinn.)

(a) Berechnen Sie den "Value at Risk" (VaR) zum Signifikanzniveau $\alpha = 95\%$. (Hinweis: Sei $\Phi(.)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Dann gilt: $\Phi^{-1}(0.95) = 1.64485$)

(b) Berechnen Sie den erwarteten Verlust, gegeben dass er über dem VaR-Wert (zum Signifikanzniveau von $\alpha = 95\%$) liegt, i.e. $\mathrm{E}(X|X \geq \mathrm{VaR}_{0.95})$.
Hinweis: Für die Standardnormalverteilung gilt:

$$\int_a^\infty x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}$$

7.2. Der Verlust X eines Gesamtportfolios setzt sich additiv aus den Verlusten X_1 und X_2 zusammen. X_1 und X_2 sind voneinander unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Mittelwert $\mathrm{E}(X_i) = 3$. Zeigen Sie, dass der *Value at Risk* VaR des Gesamtportfolios zum Signifikanzniveau $\alpha = 70\%$ größer ist, als die Summe der VaR-Werte der Einzelkomponenten.

Hinweis: Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Mittelwert $1/\lambda$ lautet:

$$F(x) = 1 - \exp[-\lambda x]$$

Sind X_1 und X_2 voneinander unabhängig und exponentialverteilt mit Mittelwert $1/\lambda$, so ist $X_1 + X_2$ erlangverteilt mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - (1 + \lambda x) \exp[-\lambda x]$$

7.3. Ein Unternehmen habe ein Portfolio aus zwei offenen Long-Positionen und zwar 10.000 bbl Brent Rohöl und 1.000 t Heizöl. Der heutige Marking to Market Wert dieser Positionen beträgt bei Preisen von 48.63 US$/bbl bzw. 721.00 US$/t exakt 347 300 US$.

Während der letzten 21 Handelstage haben sich die Preise (in US$ pro Barrel bzw. je Tonne) entsprechend folgender Tabelle geändert.

t	Brent	Heizöl
-21	47.28	518.75
-20	49.08	522.50
-19	48.45	522.25
-18	47.95	521.75
-17	47.25	519.00
-16	47.83	519.50
-15	47.34	519.50
-14	46.98	518.25
-13	47.02	518.25
-12	47.89	519.00
-11	47.01	518.50
-10	46.86	518.00
-9	47.42	519.00
-8	48.13	519.50
-7	48.43	520.00
-6	48.06	519.75
-5	47.39	519.00
-4	47.25	518.75
-3	47.03	518.50
-2	47.96	519.25
-1	48.75	521.25
0	48.63	521.00

Bestimmen Sie durch historische Simulation den VaR auf dem 90% Konfidenzniveau für den nächsten Handelstag.

7.4. Die unabhängigen Beobachtungen $X_i, i = 1, \cdots, n$ seien die Verluste eines Portfolios, die über einer Schranke U liegen. Angenommen, Sie wollen dieses Überschreiten der Schranke, i.e. die Differenz $X_i - U$, durch eine allgemeine Pareto-Verteilung beschreiben, und die Parameter β und ξ durch eine Maximum-Likelihood-Schätzung bestimmen.

Formulieren Sie dazu die Log-Likelihood-Funktion und die Bedingungen erster Ordnung.

Hinweis: Bei der Maximum-Likelihood Methode werden die Parameter derart bestimmt, dass die gemeinsame Dichtefunktion ausgewertet an den Beobachtungen maximiert wird.

Die Dichte der allgemeinen Pareto-Verteilung lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)}$$

(dabei ist $\beta > 0$ und $x \geq 0$ falls $\xi > 0$ bzw. $0 \leq x \leq -\beta/\xi$ falls $\xi < 0$. Für $\xi = 0$ erhält man die Dichte der Exponentialverteilung $\exp(-x/\beta)/\beta$.)