Risiko-Management I

Was ist Risiko?

- Summe aller Möglichkeiten, sodass sich die Erwartungen eines Systems aufgrund von Störfällen nicht erfüllen.
- eine Unsicherheit; alles, das nicht 100% vorhergesagt werden kann, ist riskant.
- Volatilität von unerwarteten Vermögenswerten
- Risiko = die aus der Unvorhersehbarkeit der Zukunft resultierende, durch zufällige Störungen verursachte Möglichkeit, geplante Ziele zu verfehlen.

$\Rightarrow$ maßgebliche Größen für Risiko sind:

- die Wahrscheinlichkeit, die erwartete Größe nicht zu erreichen
- ein Maß, für die Abweichung von der erwarteten Größe

$\Rightarrow$ in vielen Büchern wird Risiko definiert als
Eintrittswahrscheinlichkeit $\times$ Größe der Konsequenz

Woher kommt Risiko?

- von Menschen herbeigeführt: z.B: Inflation, Politik, Kriege.
- Naturphänomene & Umwelteinflüsse: Wetter, Erdbeben, etc.
- langfristiges Wirtschaftswachstum, technische Innovationen, ...

Welche Risiken gibt es?

- Marktrisiken: Verfügbarkeit von Rohstoffen, Preise der Rohstoffe, Angebot an Fremd- und Eigenkapital, etc
- Kreditrisiken
- Betriebsrisiken: Sicherung und überwachung von betrieblichen Prozessen
- rechtliche Risiken: Produkthaftung, Gewährleistungsrisiko, Risiken durch Änderung der gesetzlichen Rahmenbedingungen, ...
- Umweltrisiken

Im Zusammenhang mit Risiko sind vor allem relevant:

- Bewertung von Risiko
- Handhabung von Risiken: Versicherungen abschliessen, risk-sharing, Hedging-Strategien, Anlegen von finanziellen Reserven, rechtliche Möglichkeiten (UVP, etc.)

Zur Quantifizierung von Risiken und zum Vergleich unterschiedlicher Instrumente des Risikomanagements sind Grundkenntnisse der Entscheidungstheorie notwendig.

Entscheidungstheorie

Ein Entscheidungsträger muss zwischen (mindestens) zwei Handlungsalternativen wählen. z.B:

- versichere ich mein Haus gegen Feuer, Hagel, etc.?
- spiele ich nächsten Mittwoch Lotto?
- kaufe ich morgen OMV-Aktien an der Wiener Börse?
- kaufe ich Optionen/Forwards am Energiemarkt?

Annahme: der Entscheidungsträger ist nur am "End-Vermögen" bzw. einer Funktion davon (z.B. dem Nutzen) interessiert.

w_f: End-Vermögen (final wealth)

w_0: Anfangs-Vermögen (initial wealth)

Bsp: Firma
w_0 = Vermögenswerte zum Zeitpunkt 0 abzüglich Schulden bei Dritten
$w_f = w_0 +$ erwirtschafteter Profit über dem Planungszeitraum

erwirtschafterer Profit und damit w_f sind nicht sicher vorhersehbar
$\Rightarrow w_f$ ist eine Zufallsvariable

$$\Rightarrow \quad \tilde{w}_f = w_0 + \tilde{x}$$

andere Möglichkeit: $\tilde{w}_f = w_0(1 + \tilde{x})$
$\tilde{x} \cdots$ zufällige Ertragsrate

w_0 : nicht zufällig, beobachtbar
$\tilde{x}, \tilde{w}_f$: Zufallsvariable, zum Zeitpunkt der Entscheidungsfindung unbekannt.

Def: In der ökonomischen Theorie werden Zufallsvariable als **Lotterien** (oder Chancen) bezeichnet.

Man unterscheidet nun

diskrete Lotterien, i.e. $\tilde{x}$ nimmt mit Wahrscheinlichkeit p_i den Wert x_i an, $i = 1, 2, \cdots n$ (oder $i = 1, 2, \cdots$) Mögliche Schreibweise bei endlich vielen Ausprägungen: $(\vec{p}^t; \vec{x}^t)$, $\vec{p} =$ Vektor der Wahrscheinlichkeiten, $\vec{x} =$ Vektor der Realisierungen.

stetige Lotterien, i.e. $\tilde{x}$ wird duch die Dichte $f(x)$ oder die Verteilungsfunktion $F(x)$ charakterisiert.

Kriterien zur Bewertung von Lotterien:

Angenommen, die Firma aus obigem Beispiel muss zwischen verschiedenen Investitionsmöglichkeiten wählen, d.h. sie muss ihre Wahl zwischen verschiedenen Lotterien treffen.

- Orden jeder Lotterie $\tilde{x}$ eine Bewertung $V(\tilde{x})$ zu.
- Bewertungskriterium $\Rightarrow$ Entscheidungskriterium:
  ziehe Lotterie $\tilde{x}$ der Lotterie $\tilde{y}$ vor, falls $V(\tilde{x}) > V(\tilde{y})$.
  Die Bewertungen der Lotterien liefert eine Präferenzrelation.

Erwartungswert-Kriterium:

$$V(\tilde{x}) = \mathrm{E}(\tilde{x})$$

$$\text{im diskreten Fall: } \mathrm{E}(\tilde{x}) = \mu = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\text{im stetigen Fall: } \mathrm{E}(\tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Äquivalent dazu ist: $V(\tilde{w}_f) = V(w_0 + \tilde{x}) = \mathrm{E}(w_0 + \tilde{x}) = w_0 + \mathrm{E}(\tilde{x})$

Bsp.1:

	Gewinn	kein Gewinn	μ
	$p_1 = 10^{-6}$	$p_2 = 1 - p_1$	
$\tilde{x}$ (spiele Lotto)	$10^6 - 5$	-5	-4
$\tilde{y}$ (spiele nicht Lotto)	0	0	0

$\Rightarrow$ ein Entscheidungsträger, der sich nur am Erwartungswert orientiert spielt **NIE** Lotto.

Bsp.2:

	Diebstahl	kein Diebstahl	μ
	$p_1 = 0.001$	$p_2 = 0.999$	
$\tilde{x}$ (Versicherung)	-1100	-1100	-1100
$\tilde{y}$ (keine Versicherung)	-1 000 000	0	-1000

$\Rightarrow$ ein Entscheidungsträger, der sich nur am Erwartungswert orientiert schließt keine Versicherung ab.

Bsp 3: Ein Entscheidungsträger ist mit folgender "Katastrophe" konfrontiert:

x	p(x)
0	0.9
-1000	0.1

Es gilt:

$$\mathrm{E}(\tilde{x}) = -100, \sigma^2(\tilde{x}) = 90000$$

Angenommen, 10 000 Personen haben dieselbe Situation, wobei die Katastrophen unabhängig voneinander auftreten können.

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{10000}\right)(\tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{x}_n) = -100$$

$$\sigma^2 = \frac{90000}{10000} = 9$$

Mittelwert/Varianz-Kriterium

$\mu - \sigma -$ Kriterium.

man bewertet nicht nur den "Ertrag" einer Lotterie, (gemessen durch $\mathrm{E}(\tilde{w}_f)$) sondern auch das "Risiko" (gemessen durch die Varianz σ^2.)

$$V(\tilde{w}_f) = h[\mathrm{E}(\tilde{w}_f), \sigma^2(\tilde{w}_f)]$$

Eigenschaften von h :

- Ein höherer Ertrag wird immer bevorzugt, d.h.

$$\frac{\partial h(\mathrm{E}, \sigma^2)}{\partial \mathrm{E}} > 0$$

- Für die Abhängigkeit vom "Risiko" σ^2 gibt es die folgenden drei Möglichkeiten:

1. $\partial h(\mathrm{E}, \sigma^2)/\partial \sigma^2 = 0$: der Entscheidungsträger ist **risiko-neutral.** Die Entscheidung wird nur aufgrund des Erwartungswertes getroffen.
2. $\partial h(\mathrm{E}, \sigma^2)/\partial \sigma^2 < 0$: der Entscheidungsträger ist **risiko-scheu.** Bei Lotterien mit gleichem Erwartungswert bevorzugt er eine kleinere Varianz.
3. $\partial h(\mathrm{E}, \sigma^2)/\partial \sigma^2 > 0$: der Entscheidungsträger ist **risiko-freudig.** Bei Lotterien mit gleichem Erwartungswert bevorzugt er eine größere Varianz.

Oft hat die Bewertungsfunktion die Gestalt: $V(\tilde{w}_f) = \mathrm{E}(\tilde{w}_f) - k\sigma^2(\tilde{w}_f)$

"safety-first" Kriterium

Bei dem Mittelwert/Varianz- Kriterium werden Abweichungen nach Oben genauso bewertet wie Abweichungen nach Unten.

Beim "safety-first" Kriterium werden die Lotterien auch durch Gewinn und Risiko bewertet, jedoch wird das Risiko nicht durch die Varianz gemessen.

Der Entscheidungsträger bewertet die Realisierungen des End-Vermögens w_f anhand einer vorgegebenen Schranke t, die nach Möglichkeit nicht unterschritten werden soll.

Risiko $\cong$ Variabilität von w_f unterhalb der Schranke t.

Semi-Varianz:

$$\sigma^{2-}(t) = \int_{-\infty}^{t} (w_f - t)^2 f(w_f) dw_f$$

Unterschied Varianz zu Semi-Varianz:

Varianz: mittlerer quadratischer Abstand zum Erwartungswert

Semi-Varianz: bedingter mittlerer quadratischer Abstand zur Schranke, gegeben die Schranke wird unterschritten.

Die Lotterie wird dann anhand der Funktion

$$V[\tilde{w}_f] = \mathrm{E}(\tilde{w}_f) - k\sigma^{2-}(t)$$

bewertet.

Bsp:
Gegeben seien $w_0 = 3, k = 1$, sowie die folgenden zwei Lotterien:

A		B	
x	p	x	p
-1	0.2	-20	0.01
+4	0.3	+7	0.49
+10	0.5	+8	0.50

Bewertung nach dem Mittelwert/Varianz-Kriterium:

- Lotterie B hat einen höheren Ertrag als A:

$$\mathrm{E}(\tilde{x}|A) = 6 < \mathrm{E}(\tilde{x}|B) = 7.23$$

- Lotterie A hat ein höheres Risiko als Lotterie B

$$\sigma^2(\tilde{x}|A) = 19 > \sigma^2(\tilde{x}|B) = 7.737$$

- $\Rightarrow$ ein risikoscheuer Entscheidungsträger ($k = 1 > 0!$) zieht Lotterie B vor, da $V(\tilde{x}|A) < V(\tilde{x}|B)$.

"safety first"-Kriterium
Angenommen, der Entscheidungsträger wählt als Grenze $t = 0$.

- Lotterie A ist risikolos, da das End-Vermögen nie unter $t = 0$ fallen kann.
- Semi-Varianz für Lotterie B:

$$\sigma^{2-}(t = 0) = .01(3 - 20 - 0)^2 = 2.89$$

- Unter Verwendung der Bewertungsfunktion $V(\tilde{w}_f) = \mathrm{E}(\tilde{w}_f) - \sigma^{2-}(t = 0)$ erhält man:

$$V(\tilde{w}_f|A) = 9 - 1(0) = 9 \text{ und } V(\tilde{w}_f|B) = 10.23 - 1(2.89) = 7.34$$

d.h. Lotterie A wird vorgezogen.

Erwartungsnutzen-Maximierung

Der Entscheidungsträger habe ein Anfangs-Vermögen von w_0.

Die Lotterie $\tilde{x}$ wird nun anhand des erwarteten Nutzens, den der Entscheidungsträger aus seinem Endvermögen zieht, bewertet, i.e.

$$V(\tilde{w}_f) = \mathrm{E}(U(\tilde{w}_f)) = \int_{-\infty}^{\infty} U(w_0 + \tilde{x}) f(x) dx$$

Dabei bezeichnet U eine streng monoton wachsende, stetige Nutzenfunktion.

Sicherheits-äquivalent:

Frage: Welchen Betrag an sicherem Vermögen (i.e. ohne Lotterie) schätzt der Entscheidungsträger mit Nutzenfunktion U gleich hoch ein, wie eine Lotterie $\tilde{x}$ bei einem sicheren Anfangsvermögen w_0?

Für dieses Sicherheits-äquivalent w^* muss also gelten:

$$U(w^*) = \int_{-\infty}^{\infty} U(w_0 + x) f(x) dx$$

Da die Nutzenfunktion streng monoton wachsend ist, besitzt sie eine Inverse (auf dem Bild von U)

$$\Rightarrow w^* = U^{-1}U(w^*) = U^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(w_0 + x) f(x) dx\right)$$

Bsp: Eine Entscheidungsträger habe folgenden stückweise lineare Nutzenfunktion:

$$U(w_f) = \begin{cases} 2w_f & \text{für} \quad w_f \leq 100 \\ 100 + w_f & \text{für} \quad 100 < w_f \leq 200 \\ 200 + 0.5w_f & \text{für} \quad 200 < w_f \end{cases}$$

Gegeben das Anfangs-Vermögen von $w_0 = 100$, wie groß ist das Sicherheitsäquivalent der folgenden Lotterie:

x	$p(x)$
-80	0.3
+40	0.4
+120	0.3

Für das End-Vermögen gilt gaher

w_f	$U(w_f)$	$p(w_f)$
20	40	0.3
140	240	0.4
+220	310	0.3

$$\Rightarrow V(\tilde{w}_f) = \mathrm{E}(U(\tilde{w}_f)) = 40 \times 0.3 + 240 \times 0.4 + 310 \times 0.3 = 201$$

Als Sicherheitsäquivalent erhält man $w^* = 101$, d.h. der Entscheidungsträger ist indifferent zwischen einem sicheren Vermögen von 101 oder der Risikosituation, die sich aus seinem Anfangsvermögen von 100 und der Lottery $\tilde{x}$ zusammensetzt.

Betrachten nun einen anderen Entscheidungsträger, der in derselben Situation ist, jedoch die folgende Nutzenfunktion seinen Entscheidungen zugrunde legt:

$$U(w_f) = w_f^2$$

$\Rightarrow V(\tilde{w}_f) = \mathrm{E}(U(\tilde{w}_f)) = 20^2 \times 0.3 + 140^2 \times 0.4 + 220^2 \times 0.3 = 22480$

$\Rightarrow$ Das Sicherheitsäquivalent des zweiten Entscheidungsträgers beträgt: $w^* = \sqrt{22480} = 149.93$

Dieses Beispiel zeigt:

Die unterschiedlichen Nutzenfunktionen spiegeln die Einstellung der Entscheidungsträger zur Risikosituation wider.

Theorem:

Unter einer wachsenden linearen Transformation der Nutzenfunktion bleibt das Sicherheitsäquivalent unverändert.

Sei w_U^* das Sicherheitsäquivalent unter der Nutzenfunktion U und w_R^* das Sicherheitsäquivalent unter R, und ist

$$R(w_f) = d + gU(w_f), g > 0$$

so gilt: $w_U^* = w_R^*$.

$$R(w_R^*) = \int_{-\infty}^{\infty} R(w_0 + x) f(x) dx$$

$$\begin{aligned} d + gU(w_R^*) = & \int_{-\infty}^{\infty} (d + gU(w_0 + x)) f(x) dx \\ = & \ d + g \int_{-\infty}^{\infty} U(w_0 + x) f(x) dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U(w_R^*) = \int_{-\infty}^{\infty} U(w_0 + x) f(x) dx = U(w_U^*)$$

Da U monoton wachsend und damit injektiv ist muss $w_R^* = w_U^*$ gelten.

Angebotspreis, Nachfragepreis, Risikoprämie:

Der Entscheidungsträger schätzt sein Anfangs-Vermögen plus die unsichere Auszahlung $\tilde{x}$ gleich ein wie das Sicherheitsäquivalent w^*.

$$p_a = w^* - w_0$$

Angebotspreis (asking price): minimaler Preis, zu dem der Entscheidungsträger bereit ist, die Lotterie zu verkaufen.

$$U(w_0 + p_a) = U(w^*) = \int_{-\infty}^{\infty} U(w_0 + x) f(x) dx$$

- $p < p_a$ $\Rightarrow$ der Entscheidungsträger hat einen höheren Nutzen, wenn er die Lotterie behält
- $p > p_a$ $\Rightarrow$ der Entscheidungsträger hat einen höheren Nutzen, wenn er die Lotterie verkauft

Bsp: Im obigen Beispiel beträgt der Angebotspreis $p_a = (101 - 100) = 1$, bzw. $p_a = (149.93 - 100) = 49.93$.

Der Angebotspreis kann aber auch negativ sein:
Betrachten die Nutzenfunktion $U(w_f) = \sqrt{w_f}$, das Anfangsvermögen $w_0 = 100$ und folgende Lotterie:

x	p(x)
-50	0.5
50	0.5

Der Erwartungsnutzen beträgt:

$$\mathrm{E}(U(\tilde{w}_f)) = 0.5\sqrt{50} + 0.5\sqrt{150} = 9.659 = U(w^*) = \sqrt{w^*}$$

$\Rightarrow w^* = 93.296 \quad \Rightarrow p_a = -6.699$
Der Entscheidungsträger ist bereit, noch etwas zu zahlen, um die Lotterie loszuwerden.

Umgekehrt kann ein Käufer interessiert sein, eine Lotterie zu kaufen (z.B. riskante Aktien)
Nachfragepreis (bid price): maximaler Preis, zu dem der Entscheidungsträger bereit ist, eine Lotterie zu kaufen.
p_b ist die Lösung der Gleichung:

$$U(w_0) = \int_{-\infty}^{\infty} U(w_0 + x - p_b) f(x) dx$$

Satz:
Im Fall dass die Nutzenfunktion des Entscheidungsträgers linear bezüglich des End-Vermögens ist, stimmt der Angebotspreis einer Lotterie mit deren Erwartungswert $\mathrm{E}(\tilde{x})$ überein
Beweis:
Da U linear ist, gilt: $U(w_f) = g + dw_f, \quad$ mit $d > 0$
Daraus (und aus der Definition des Sicherheitsäquivalents w^*) folgt :

$$U(w^*) = \mathrm{E}[U(\tilde{w}_f)] = \mathrm{E}[g + d(w_0 + \tilde{x})]$$

$$g + dw^* = g + dw_0 + d\mathrm{E}(\tilde{x})$$

$$w^* = w_0 + \mathrm{E}(\tilde{x})$$

Die Definition des Angebotspreises $p_a = w^* - w_0$ ergibt daher:

$$p_a = E(\tilde{x})$$

◇

⇒ ein Entscheidungsträger mit einer linearen Nutzenfunktion bewertet die Lotterie ausschließlich anhand des Erwartungswertes.
⇒ die Linearität der Nutzenfunktion bedeutet Risikoneutralität.
⇒ falls die Nutzenfunktion linear ist und der Entscheidungsträger mit zwei Lotterien konfrontiert ist, die beide denselben Erwartungswert haben, verlangt der Entscheidungsträger denselben Angebotspreis, auch wenn die Lotterien sehr unterschiedlich bezüglich der anderen Momente (die z.B. das Risiko widerspiegeln) sind.

⇒ die **Risiko-Prämie** π ist definiert als die Differenz zwischen dem Erwartungswert der Lotterie und deren Angebotspreis, i.e. $\pi = \mathrm{E}(\tilde{x}) - p_a$ bzw. $\pi = \mathrm{E}(\tilde{w}_f) - w^*$.

$\pi = 0$ Der Entscheidungsträger ist **risikoneutral.** Für den Entscheidungsträger entspricht der Angebotspreis der Lotterie deren Erwartungswert.

$\pi > 0$ Der Entscheidungsträger ist **risikoscheu.** $\pi > 0 \Rightarrow p_a < \mathrm{E}(\tilde{x})$, d.h. der Angebotspreis im Fall einer positiven Risikoprämie ist kleiner, als der Angebotspreis im Fall von Risikoneutralität.

$\pi < 0$ Der Entscheidungsträger ist **risikofreudig.** $\pi < 0 \Rightarrow p_a > \mathrm{E}(\tilde{x})$, d.h. der Angebotspreis im Fall einer negativen Risikoprämie ist größer, als der Angebotspreis im Fall von Risikoneutralität.

Lemma: Jensen'sche Ungleichung: Sei $\tilde{x}$ eine Zufallsvariable und $f(x)$ eine strikt konkave, differenzierbare Funktion, so gilt:

$$\mathrm{E}[f(\tilde{x})] < f(\mathrm{E}[\tilde{x}])$$

Bemerkungen:

1. Unter den gleichen Voraussetzungen gilt für strikt konvexe Funktionen: $\mathrm{E}[f(\tilde{x})] > f(\mathrm{E}[\tilde{x}])$
2. Diese Ungleichungen gelten auch unter allgemeineren Bedingungen, z.B. für fast überall differenzierbare, stetige Funktionen, etwa stückweise lineare, stetige Funktionen.

Beweis:

- Für eine strikt konkave stetige Funktion liegt der Funktionsgraph stets **unter** der an einen beliebigen Punkt gelegten Tangente.

  (konkav heisst $f'' < 0$, d.h. die Steigung der Tangenten f' nimmt ab ...)
- Dies gilt auch für die Tangente, die an der Stelle $\mathrm{E}(\tilde{x})$ gelegt wird.

$$\Rightarrow f(x) < f(\mathrm{E}[\tilde{x}]) + f'(\mathrm{E}[\tilde{x}])(x - \mathrm{E}[\tilde{x}])$$

- Da diese Ungleichung für alle Realisierungen x der Zufallsvariablen $\tilde{x}$ gilt, gilt es auch im Mittel, also

$$\mathrm{E}[f(\tilde{x})] < \mathrm{E}[f(\mathrm{E}[\tilde{x}]) + f'(\mathrm{E}[\tilde{x}])(\tilde{x} - \mathrm{E}[\tilde{x}])]$$
$$\mathrm{E}[f(\tilde{x})] < f(\mathrm{E}[\tilde{x}]) + \underbrace{f'(\mathrm{E}[\tilde{x}])\mathrm{E}[(\tilde{x} - \mathrm{E}[\tilde{x}])]}_{=0}$$

- Also

$$\mathrm{E}[f(\tilde{x})] < f(\mathrm{E}[\tilde{x}])$$

Satz:
Ist die Nutzenfunktion des Entscheidungsträgers strikt monoton wachsend und strikt konkav (konvex), so ist die Risikoprämie jeder beliebigen Lotterie strikt positiv (negativ) und der Entscheidungsträger daher risikoscheu (risikofreudig).
Beweis:

Die Nutzenfunktion $U(w_f)$ sei strikt monoton wachsen und strikt konkave, i.e. $U'(w_f) > 0, U''(w_f) < 0$. Bei einem Anfangsvermögen von w_0 wird eine Lotterie $\tilde{x}$ nun anhand von

$$\mathrm{E}[U(\tilde{w_f})] = \mathrm{E}[U(w_o + \tilde{x})]$$

bewertet. Jensen'sche Ungleichung $\Rightarrow$:

$$U(w^*) = \mathrm{E}[U(w_0 + \tilde{x})] < U(\mathrm{E}[w_0 + \tilde{x}]) = U(w_0 + \mathrm{E}[\tilde{x}])$$

Da U streng monoton wachsend ist, folgt daraus:

$$w^* < w_0 + \mathrm{E}(\tilde{x}) \Rightarrow p_a = w^* - w_0 < \mathrm{E}(\tilde{x}) \Rightarrow \pi = \mathrm{E}(\tilde{x}) - p_a > 0$$

$\diamond$

Bemerkung:
Risikoaversion heißt nicht, dass jede Lotterie abgelehnt wird, oder dass der Angebotspreis p_a stets negativ ist.

Die Arrow-Pratt Approximation

Bei gegebener Nutzenfunktion U, bekanntem Anfangsvermögen w_0 und gegebener Lotterie $\tilde{x}$ (beschrieben durch ihre Dichtefunktion), ist der Angebotspreis durch folgende nichtlineare Gleichung bestimmt:

$$U(\underbrace{w_0 + p_a}_{=w^*}) = \int_{-\infty}^{\infty} U(w_0 + x) f(x) dx$$

Ziel: p_a explizit zu berechnen (zumindest approximativ)
Entwickeln $U(w_0 + p_a)$ in eine Taylor-Reihe um $w_0 + \mu$ (wobei $\mu = \mathrm{E}(\tilde{x})$)

$$\Rightarrow U(w_0 + p_a) \approx U(w_0 + \mu) + (p_a - \mu) U'(w_0 + \mu)$$

Entwickeln $U(w_0 + x)$ in eine Taylor-Reihe um $w_0 + \mu$

$$\Rightarrow U(w_0 + x) \approx U(w_0 + \mu) + (x - \mu) U'(w_0 + \mu) + \frac{(x - \mu)^2}{2!} U''(w_0 + \mu)$$

Durch Integrieren erhält man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(w_0 + x) f(x) dx \approx U(w_0 + \mu) + \frac{\sigma^2}{2} U''(w_0 + \mu)$$

weil

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}_{=\mathrm{E}(\tilde{x})} + \mathrm{E}(\tilde{x}) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{=1} = 0$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2(\tilde{x})$$

Es gilt also

$$U(w_0+\mu) + \underbrace{(p_a - \mu)}_{=-\pi} U'(w_0+\mu) \approx U(w_0+\mu) + \frac{\sigma^2(\tilde{x})}{2} U''(w_0+\mu)$$

$$\pi \approx \frac{\sigma^2(\tilde{x})}{2} \underbrace{\left[- \frac{U''(w_0+\mu)}{U'(w_0+\mu)} \right]}_{=A_a(\mathrm{E}[\tilde{w}_f])}$$

$A_a(w) \cdots$ Arrow-Pratt Mass der absoluten Risiko-Aversion
Die Risikoprämie setzt sich multiplikativ zusammen aus

- einem Mass für die Größe des Risikos $\sigma^2(\tilde{x})$
- der absoluten Risiko-Aversion, die die Präferenzen des Entscheidungsträgers widerspiegeln.

Weiters gilt: Ist das Arrow-Pratt-Maß der absoluten Risikoaversion bekannt, so lässt sich daraus die Nutzenfunktion bestimmen:

Mithilfe der Substitution

$$y := U'(w) \quad \Rightarrow dy = U''(w)dw$$

gilt:

$$\int \frac{U''(w)}{U'(w)} dw = \int \frac{1}{y} dy = \log y + \alpha = \log U'(w) + \alpha$$

und daher

$$-\int A_a(w)dw = \int \frac{U''(w)}{U'(w)} dw = \log U'(w) + \alpha$$

Also

$$U'(w) = \underbrace{e^{-\alpha}}_{=\gamma} exp[-\int A_a(w)dw]$$

Nochmaliges Integrieren ergibt:

$$U(w) = \beta + \gamma \int exp\left[- \int A_a(w)dw \right] dw$$

Relative Risikoaversion:

Wird angewandt, wenn die Lotterie nicht additiv ist, sondern es sich um eine unsichere Ertragsrate handelt. d.h. das unsichere Endvermögen ist gegeben durch

$$\tilde{w}_f = w_0(1+\tilde{y})$$

Die Lotterie wird wieder durch den erwarteten Nutzen bewertet, d.h. durch $\mathrm{E}[U(w_0(1+\tilde{y}))]$.

Wir nehmen im folgenden an, dass die Lotterie fair ist, d.h. $\mathrm{E}(\tilde{y}) = 0$.

Welchen Anteil seines Vermögens $\hat{\pi}$ ist man nun bereit zu zahlen, um sich des Risikos entledigen zu können?

$$\Rightarrow U[w_0(1-\hat{\pi})] = \mathrm{E}[U(w_0(1+\tilde{y}))]$$

Auf folgende zwei Arten kann man nun einen Näherungsausdruck für $\hat{\pi}$ erhalten:

1. Approximationen wie im additiven Fall ergeben:

   Approximation der linken Seite:

$$U(w_0(1-\hat{\pi})) \approx U(w_0) - \hat{\pi} w_0 U'(w_0)$$

   Approximation der rechten Seite:

$$U(w_0(1+y)) \approx U(w_0) + y w_0 U'(w_0) + \frac{y^2 w_0^2}{2} U''(w_0)$$

   Bilden des Erwartungswertes ergibt:

$$\mathrm{E}[U(w_0(1+y))] \approx U(w_0) + \frac{\sigma^2(\tilde{y}) w_0^2}{2} U''(w_0)$$

   (da $\mathrm{E}(\tilde{y}) = 0$, und $\mathrm{E}(\tilde{y}^2) = \sigma^2(\tilde{y})$).

   Gleichsetzen der linken und der rechten Seite ergibt:

$$U(w_0) - \hat{\pi} w_0 U'(w_0) \approx U(w_0) + \frac{\sigma^2 w_0^2}{2} U''(w_0)$$

   Vereinfachen ergibt:

$$\hat{\pi} \approx \frac{\sigma^2(\tilde{y})}{2} \left[-w_0 \frac{U''(w_0)}{U'(w_0)} \right]$$

2. Man kann das multiplikative Risiko in ein additives Risiko umwandeln:

$$\tilde{w}_f = w_0(1+\tilde{y}) \Rightarrow \tilde{w}_f = w_0 + \underbrace{w_0 \tilde{y}}_{:=\tilde{x}}$$

$$\Rightarrow U[w_0(1-\hat{\pi})] = \mathrm{E}[U(w_0(1+\tilde{y}))]$$

$$\Rightarrow U[w_0 - \underbrace{w_0 \hat{\pi}}_{=\pi})] = \mathrm{E}[U(w_0 + \underbrace{w_0 \tilde{y}}_{=\tilde{x}}))]$$

   Für π gilt approximativ:

$$\pi \approx \frac{\sigma^2(\tilde{x})}{2} \left[-\frac{U''(w_0)}{U'(w_0)} \right]$$

   und daher

$$\hat{\pi} \approx \frac{\sigma^2(\tilde{x})}{2 w_0} \underbrace{\left[-\frac{U''(w_0)}{U'(w_0)} \right]}_{=A_a(w_0)} = \frac{\sigma^2(\tilde{y})}{2} \underbrace{\left[-w_0 \frac{U''(w_0)}{U'(w_0)} \right]}_{=A_r(w_0)}$$

   da $\sigma^2(\tilde{x}) = w_0^2 \sigma^2(\tilde{y})$

partielle Risikoaversion:

Grundidee: das Anfangsvermögen w_0 ist aufgeteilt auf einen sicheren Betrag $w_{0,1}$ und einen Betrag $w_{0,2}$.

$w_{0,2}$ unterliegt einem multiplikativen fairen Risiko.

i.e. der erwartete Nutzen ist gegeben durch

$$\mathrm{E}[U(w_{0,1} + w_{0,2}(1+\tilde{y}))], \text{wobei } \mathrm{E}(\tilde{y}) = 0.$$

Welchen Anteil $\hat{\pi}_2$ des unsicheren Vermögens ist man bereit zu zahlen, um das Risiko zu vermeiden?

$\hat{\pi}_2$ ist Lösung von

$$U(w_{0,1} + w_{0,2}(1 - \hat{\pi}_2)) = \mathrm{E}[U(w_{0,1} + w_{0,2}(1 + \tilde{y}))]$$

Analoge Überlegungen liefern:

$$\hat{\pi}_2 \approx \frac{\sigma^2}{2} \underbrace{\left[-w_{0,2} \frac{U''(w_0)}{U'(w_0)} \right]}_{=A_p}$$

$A_p \cdots$ partielle Risikoaversion

Bemerkung: Es gilt : $A_p = \frac{w_{0,2}}{w_0} A_r(w_0)$

Annahmen über die Masszahlen der Risikoaversion:

Im folgenden wird angenommen, dass der Entscheidungsträger risikoavers ist, d.h. insbesondere dass das Arrow-Pratt Maß der absoluten Risikoaversion positiv ist.

Wie verändert sich die Risikoaversion bei steigendem Anfangsvermögen?

weitverbreitete Meinung: Firmen können Risikosituationen umso leichter handhaben je reicher sie sind.

$\Rightarrow$ Die Risikoprämie eines additiven Risikos fällt mit steigendem Anfangsvermögen, sofern es zutrifft, dass reichere Entscheidungsträger eher bereit sind, sich Risiko auszusetzen.

Hypothese 1:

$$\frac{dA_a(w_0)}{dw_0} \leq 0$$

relative Risikoaversion:

$A_r(w_0) = w_0 A_a(w_0)$

$$\frac{dA_r(w_0)}{dw_0} = A_a(w_0) + w_0 \frac{dA_a(w_0)}{dw_0}$$

$\Rightarrow$ steigt die absolute Risikoaversion mit steigendem Anfangsvermögen an, so steigt auch die relative Risikoaversion an.

$\Rightarrow$ Bei fallender absoluter Risikoaversion kann die relative Risikoaversion steigen, fallen, oder konstant bleiben.

$$\hat{\pi} = \frac{w_0 \sigma^2(\tilde{y})}{2} A_a(w_0)$$

$$\frac{d\hat{\pi}}{dw_0} = \underbrace{\frac{w_0 \sigma^2(\tilde{y})}{2} \frac{dA_a(w_0)}{dw_0}}_{<0} + \underbrace{\frac{\sigma^2(\tilde{y})}{2} A_a(w_0)}_{>0}$$

Wenn bei einer multiplikativen Lotterie $\tilde{y}$ das Anfangsvermögen steigt, treten zwei Effekte auf:

"Vermögens-Effekt:" Steigt w_0 so sinkt bei konstantem Risiko die Risikoaversion

"Risiko-Effekt:" Steigt w_0 so steigt das Risiko des Endvermögens bei einer multiplikativen Lotterie. $\sigma^2(\tilde{w}_f) = \sigma^2(\tilde{y})w_0^2$.

Hypothese 2:

$$\frac{dA_r(w_0)}{dw_0} \geq 0$$

Beispiele für Nutzenfunktionen:

quadratische Nutzenfunktion:

$$U(w_f) = w_f - \beta w_f^2$$

$$\Rightarrow U' = 1 - 2\beta w_f \qquad U'' = -2\beta$$

Risikoscheu $\Rightarrow \beta > 0$
monoton wachsend $\Rightarrow \beta < 1/(2 \max w_f)$

Für die absolute Risikoaversion erhält man:

$$A_a(w_f) = \frac{2\beta}{1 - 2\beta w_f} > 0$$

die absolute Risikoaversion (und daher auch die relative Risikoaversion) steigt mit steigendem Vermögen an!!

Das Zugrundelegen einer quadratischen Nutzenfunktion entspricht einem Erwartungswert/ Varianz - Kriterium zum Bewerten der Lotterien.

$$V(\tilde{w}_f) = \mathrm{E}[U(\tilde{w}_f)] = \mathrm{E}[\tilde{w}_f - \beta\tilde{w}_f^2] =$$

$$= \mathrm{E}[\tilde{w}_f] - \beta((\mathrm{E}[\tilde{w}_f])^2 + \sigma^2(\tilde{w}_f))$$

Nutzenfunktion, die zum "safety-first" Kriterium führt:
wähle Schranke t, einen Parameter $k > 0$ und nehme die Nutzenfunktion

$$U(w_f) = \begin{cases} w_f & \text{für} \quad w_f > t \\ w_f - k(t - w_f)^2 & \text{für} \quad w_f \leq t \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\mathrm{E}[U(\tilde{w}_f)] = \int_t^\infty w_f f(w_f) dw_f + \int_{-\infty}^t (w_f - k(t - w_f)^2) f(w_f) dw_f =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^\infty w_f f(w_f) dw_f}_{=\mathrm{E}[\tilde{w}_f]} - k \underbrace{\int_{-\infty}^t (t - w_f)^2 f(w_f) dw_f}_{=\sigma^{2-}(t)}$$

Leider gilt auch hier im Bereich $w_f < t$:

$$U' = 1 + 2k(t - w_f) > 0 \qquad U'' = -2k$$

und damit steigende absolute Risikoaversion

$$A_a(w_f) = \frac{2k}{1 + 2k(t - w_f)} > 0$$

Im Bereich $w_f > t$ ist der Entscheidungsträger risikoneutral.

Logarithmische Nutzenfunktion:

$$U = \log w_f \qquad U' = \frac{1}{w_f} \qquad U'' = -\frac{1}{w_f^2}$$

$$\Rightarrow A_a = \frac{1}{w_f}, \qquad A_r = 1$$

d.h. absolute Risikoaversion ist monoton fallend und relative Risikoaversion ist konstant.

Potenzfunktionen:

$$U = sgn(\beta) w_f^\beta \qquad U' = \underbrace{sgn(\beta)\beta}_{>0} w_f^{\beta-1} \qquad U'' = sgn(\beta)\beta(\beta-1)w_f^{\beta-2}$$

Für Risikoaversion muss also $\beta < 1$ vorausgesetzt werden.

Die absolute Risikoaversion ist monoton fallend und die relative Risikoaversion ist konstant, da

$$A_a = \frac{1-\beta}{w_f} \quad \text{und } A_r = 1 - \beta$$

Negative Exponentialfunktion:

$$U = -e^{-\beta w_f} \qquad U' = \beta e^{-\beta w_f} \qquad U'' = -\beta^2 e^{-\beta w_f}$$

$$\Rightarrow A_a = \beta \qquad A_r = \beta w_f$$

Daher ist die absolute Risikoaversion konstant und die relative Risikoaversion monoton wachsend.

Bemerkungen:

1. Da die relative Risikoaversion nach oben unbeschränkt wachsen kann, kann $\hat{\pi}$ größer als 1 werden, d.h. der Entscheidungsträger ist bereit, mehr als sein ganzes Vermögen herzugeben, als die faire Lotterie zu spielen.

2. Ein Entscheidungsträger, der unter dieser Nutzenfunktion den erwarteten Nutzen einer normalverteilten Lotterie maximiert verhält sich so, als würde er das Erwartungswert / Varianz Kriterium heranziehen.

3. Bei normalverteilten Risiken stimmt die Arrow-Pratt Approximation mit der Risikoprämie exakt überein, sofern die Exponentialfunktion als Nutzenfunktion herangezogen wird.

Verallgemeinerung

HARA-Funktionen $\cdots$ Nutzenfunktionen mit hyperbolischer absoluter Risikoaversion

$$U(w_f) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left\{ \frac{a w_f}{1-\gamma} + b \right\}^\gamma$$

wobei diese Funktion nur auf Werten von w_f definiert ist, wo $aw_f + b(1-\gamma) > 0$ gilt.

$$U'(w_f) = a\left\{\frac{aw_f}{1-\gamma} + b\right\}^{\gamma-1}$$

$$U''(w_f) = -a^2\left\{\frac{aw_f}{1-\gamma} + b\right\}^{\gamma-2}$$

Daraus folgt:

$$A_a = \frac{a}{\left\{\frac{aw_f}{1-\gamma} + b\right\}}$$

$\Rightarrow$ Die Risikotoleranz $T_a := 1/A_a$ ist linear in w_f.
($\Rightarrow$ andere Bezeichnung: Nutzenfunktionen mit linearer Risikotoleranz.)

Sind wir zusätzlich zu unserem Anfangsvermögen w_0 im Besitz einer additiven Lotterie $\tilde{x}$, so ist der Angebotspreis der Preis $p_a(w_0, \tilde{x})$ zu dem wir bereit sind die Lotterie zu verkaufen. Andererseits sei $p_b(w_0, \tilde{x})$ der Preis, zu dem wir bei einem Anfangsvermögen w_0 bereit sind, die Lotterie $\tilde{x}$ zu erwerben.

Der folgende Satz gibt einen Zusammenhang zwischen der Monotonie der absoluten Risikoaversion und der Relation, in der Angebotspreis $p_a(w_0, \tilde{x})$ und Nachfragepreis $p_b(w_0, \tilde{x})$ zueinander stehen.

Satz: Fällt die absolute Risikoaversion monoton, so gilt

$$\text{entweder } 0 < p_b(w_0, \tilde{x}) < p_a(w_0, \tilde{x}) \text{ oder } 0 > p_b(w_0, \tilde{x}) > p_a(w_0, \tilde{x})$$

Steigt die absolute Risikoaversion monoton an, so gilt

$$\text{entweder } 0 < p_a(w_0, \tilde{x}) < p_b(w_0, \tilde{x}) \text{ oder } 0 > p_a(w_0, \tilde{x}) > p_b(w_0, \tilde{x})$$

Bei konstanter absoluter Risikoaversion gilt: $p_a(w_0, \tilde{x}) = p_b(w_0, \tilde{x})$
Beweis:

1. Zunächst zeigen wir:
   $p_a(w_0, \tilde{x}) > 0 \Leftrightarrow p_b(w_0, \tilde{x}) > 0$
   Für den Angebotspreis gilt folgende Indifferenzbedingung

   $$U[w_0 + p_a(w_0, \tilde{x})] = \mathrm{E}[U(w_0 + \tilde{x})]$$

   Die Indifferenzbedingung für den Bietpreis lautet

   $$(*) \qquad U(w_0) = \mathrm{E}[U(w_0 + \tilde{x} - p_b(w_0, \tilde{x})]$$

   Da laut Voraussetzung $p_a > 0$ sowie die Nutzenfunktion U monton wachsend ist, gilt

   $$\mathrm{E}[U(w_0 + \tilde{x})] = U(w_0 + p_a) > U(w_0) = \mathrm{E}[U(w_0 + \tilde{x} - p_b)]$$

   Also $p_b(w_0, \tilde{x}) > 0$.

2. Was ist der Angebotspreis von $\tilde{x}$ bei einem Anfangsvermögen von $w_0 - p_b(w_0, \tilde{x})$?

$$U[w_0 - p_b(w_0,\tilde{x}) + p_a(w_0 - p_b(w_0,\tilde{x}),\tilde{x})] = E[U(w_0 - p_b(w_0,\tilde{x}) + \tilde{x})] = U(w_0)$$

$$\Rightarrow p_b(w_0,\tilde{x}) = p_a(w_0 - p_b(w_0,\tilde{x}),\tilde{x})$$

Falls die absolute Risikoaversion fällt, sinkt die Risikoprämie π bei steigendem Anfangsvermögen. Wegen $\pi = \mathrm{E}(\tilde{x}) - p_a$ steigt also der Angebotspreis und es gilt

$$\Rightarrow p_b(w_0,\tilde{x}) = p_a(w_0 - p_b(w_0,\tilde{x}),\tilde{x}) < p_a(w_0,\tilde{x})$$

3. Die übrigen Fälle können analog gezeigt werden.

Stochastische Dominanz erster und zweiter Ordnung

Sei $\tilde{x}$ eine Lotterie mit Dichtefunktion $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$ sowie $\tilde{y}$ eine Lotterie mit Dichte $g(y)$ und Verteilungsfunktion $G(y)$.

Die Lotterie $\tilde{y}$ dominiert $\tilde{x}$ im Sinn der **stochastischen Dominanz erster Ordnung**, falls gilt

$$G(z) \leq F(z) \quad \forall z, \text{ und } G(z) < F(z) \text{ für mindestens einen Wert } z.$$

Bemerkung: Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, bei Lotterie $\tilde{y}$ einen Gewinn höher als z zu erzielen, mindestens ebenso groß ist, wie bei Lotterie $\tilde{x}$, und für mindestens einen Wert echt größer ist.

Von **stochastischer Dominanz zweiter Ordnung** spricht man, wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{z} G(\zeta)d\zeta \leq \int_{-\infty}^{z} F(\zeta)d\zeta \quad \forall z$$

wobei echte Ungleichheit wieder für mindestens einen Wert von z gelten muss.

Vergleich von Entscheidungsträgern bzgl. ihrer Risikoaversion:

Def.: Ausgehend vom Vermögen x betrachten wir die Lotterie: $(x+\epsilon, 0.5+p; x-\epsilon, 0.5-p)$. Jener Wahrscheinlichkeitswert p für den der Entscheidungsträger zwischen der Lotterie und der sicheren Auszahlung x indifferent ist, heißt **Wahrscheinlichkeitssprämie.**

Wir betrachten zwei Entscheidungsträger mit monoton wachsenden Nutzenfunktionen U_1 bzw. U_2.

Satz:
äquivalent sind:

(1) $A_{a,2}(w) \geq A_{a,1}(w), \quad \forall w$

i.e. das Arrow Pratt Maß der absoluten Risikoaversion ist für Entscheidungsträger 2 größer als für Entscheidungsträger 1.

(2) es existiert eine monoton steigende konkave Funktion Ψ, sodass $U_2(x) = \Psi(U_1(x)), \forall x$
d.h. U_2 ist eine konkave Transformation von U_1

(3) Für beliebige Lotterien ist das Sicherheitsäquivalent des ersten Entscheidungsträgers größer als das des zweiten. $w_1^* \geq w_2^*$

(4) Für die Risikoprämien π gilt: $\pi_2 \geq \pi_1$ (für bel. Lotterien)

(5) Wenn Entscheidungsträger 2 eine unsichere Auszahlung $\tilde{x}$ besser beurteilt als eine sichere x_0, dann tut dies auch Entscheidungsträger 1. d.h.

$$E[U_2(w_0 + \tilde{x})] \geq U_2(w_0 + x_0) \quad \Rightarrow \quad E[u_1(w_0 + \tilde{x})] \geq U_1(w_0 + x_0)$$

Satz:
Personen mit streng fallender absoluter Risikoaversion gehen höhere Risiken ein, je reicher sie sind.
Satz:
Falls sich zwei Nutzenfunktionen in 2 verschiedenen Punkten schneiden, so können sie nicht äquivalent sein.

Vergleich des Risikos von Lotterien mit gleichem Erwartungswert

Rothschild und Stiglitz, "Increasing Risk I, a Definition.", J. Economic Theory 2, 1970.
Vergleichen nun Lotterien $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ mit **gleichem** Erwartungswert, i.e. $\mathrm{E}(\tilde{x}) = \mathrm{E}(\tilde{y})$.
Eine Lotterie $\tilde{x}$ ist riskanter als eine Lotterie $\tilde{y}$, genau dann wenn einer der folgenden Punkte (und damit auch alle anderen) zutrifft:

- jeder im Sinn der Nutzentheorie risikoscheue Entscheider bevorzugt die Lotterie $\tilde{y}$ gegenüber $\tilde{x}$ i.e.

$$E[U(w_0 + \tilde{y})] \geq E[U(w_0 + \tilde{x})], \quad \forall \text{konkaven Nutzenfunktionen } U$$

- es gilt die "Integral-Bedingung":

$$\int_{-\infty}^{x} F(t)dt \geq \int_{-\infty}^{x} G(t)dt \qquad \forall x$$

  wobei F die Verteilungsfunktion von $\tilde{x}$ und G die Verteilungsfunktion von $\tilde{y}$ ist. ($\tilde{y}$ dominiert $\tilde{x}$ im Sinn der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung)

- $\tilde{x}$ ist aus $\tilde{y}$ durch einen **mean preserving spread** gewonnen worden, d.h. aus der Mitte der Verteilung von $\tilde{y}$ werden Elemente herausgenommen und an den Rand der Verteilung transformiert, ohne den Erwartungswert zu verändern.

  z.B. $\tilde{x}$ ist aus $\tilde{y}$ durch Addition einer Zufallsvariablen $\tilde{\epsilon}$ mit Erwartungswert 0 gewonnen worden. (zusammengesetzte Lotterien)

$$\tilde{x} = \tilde{y} + \tilde{\epsilon}, \text{ wobei } \mathrm{E}(\tilde{\epsilon} | \tilde{x} = x) = 0$$

Dies ergibt eine Partialordnung auf der Menge der Lotterien mit gleichem Erwartungswert.

Andere Möglichkeit von früher: ($\mu - \sigma-$Prinzip) Ordne Lotterien mit gleichem Erwartungswert entsprechend ihrer Varianz. Dies ergibt eine Totalordnung (i.e. je zwei Lotterien sind miteinander vergleichbar)
Es gilt folgender Zusammenhang:

1. Eine im obigen Sinn risikoreichere Lotterie hat eine höhere Varianz.
2. Die Umkehrung gilt jedoch **nicht.** Hat eine Lotterie $\tilde{x}$ eine grössere Varianz als Lotterie $\tilde{y}$, so ist $\tilde{x}$ (im obigen Sinn) nicht risikoreicher als $\tilde{x}$. ($\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ sind dann nicht vergleichbar.)

ad 1: Betrachten die quadratische Nutzenfunktion $U(w) = aw - bw^2$ mit $b > 0$. Haben die Lotterien $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ den gleichen Erwartungswert und ist $\tilde{x}$ risikoreicher, so gilt $\mathrm{E}[U(w_0+\tilde{x})] < \mathrm{E}[U(w_0+\tilde{y})]$, d.h. ein risikoscheuer Entscheidungsträger bevorzugt $\tilde{y}$.

$$\Rightarrow aw_0 + a\mathrm{E}(\tilde{x}) - b\left[Var(\tilde{x}) + \{w_0 + \mathrm{E}(\tilde{x})\}^2\right] <$$

$$< aw_0 + a\mathrm{E}(\tilde{y}) - b\left[Var(\tilde{y}) + \{w_0 + \mathrm{E}(\tilde{y})\}^2\right]$$

$$\Rightarrow Var(\tilde{x}) > Var(\tilde{y})$$

ad 2:
Bsp: Betrachte die Nutzenfunktion $U(x) = \sqrt{x}$.

	μ	σ^2	$E(U(.))$
$\tilde{x} = ((0.99, 0.01); (10, 1090))$	20.8	11547.36	3.46
$\tilde{y} = ((0.80, 0.20); (1, 100))$	20.8	1568.16	2.8

Obwohl $\tilde{x}$ eine größere Varianz hat, wird sie vom risikoscheuen Entscheidungsträger bevorzugt.

Das Marschak/Machina Dreieck

Wir betrachten drei mögliche Endvermögen $w_1 < w_2 < w_3$, sowie Lotterien, die sich nur durch die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Endvermögen angenommen werden können, unterscheiden.

Im weiteren sind w_1, w_2, w_3 fest. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Endvermögen angenommen werden können, seien p_1, p_2, p_3. Klarerweise gilt: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Jedem Tripel von Wahrscheinlichkeiten (p_1, p_2, p_3), d.h. jeder Lotterie, entspricht ein Punkt im Dreieck $\{(p_1, p_3) | 0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_3 \leq 1 - p_1\}$.

Jeder Punkt im Dreieck charakterisiert auch den Erwartungswert des Endvermögens, da w_1, w_2 und w_3 fest sind.

$$\mathrm{E}(\tilde{w}) = p_1 w_1 + p_2 w_2 + p_3 w_3$$

Welche Gestalt haben nun Kurven $p_3 = p_3(p_1)$, entlang denen der Erwartungswert konstant ist?

Da $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ist, gilt: $dp_2 = -dp_1 - dp_3$
Totales Differenzieren ergibt:

$$dE(\tilde{w}) = w_1 dp_1 + w_2 \underbrace{dp_2}_{=-dp_1-dp_3} + w_3 dp_3 = (w_1 - w_2)dp_1 + (w_3 - w_2)dp_3$$

Entlang Kurven mit konstantem Erwartungswert gilt $dE(\tilde{w}) = 0$ also

$$\frac{dp_3}{dp_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_2} > 0$$

$\Rightarrow$ entlang Geraden mit Anstieg $(w_2 - w_1)/(w_3 - w_2)$ ist der Erwartungswert der Lotterien konstant.

$\Rightarrow$ Gerade, entlang denen der Erwartungswert konstant ist, sind zueinander parallel.

$\Rightarrow$ Wird eine Gerade mit konstantem Erwartungswert nach links/oben (Richtung $p_3 = 1$) verschoben, so steigt der Erwartungswert.

Da die Werte $w_1, w_2 w_3$ fixiert sind, gilt dies auch für $U(w_1), U(w_2)$ bzw. $U(w_3)$.

Für den erwarteten **Nutzen** einer durch (p_1, p_2, p_3) gegebenen Lotterie erhält man:

$$\mathrm{E}(U(\tilde{w})) = p_1 U(w_1) + p_2 U(w_2) + p_3 U(w_3)$$

Für die Kurven mit gleichem Erwartungsnutzen erhält man

$$dE\{U(\tilde{w})\} = U(w_1)dp_1 + U(w_2) \underbrace{dp_2}_{=-dp_1-dp_3} + U(w_3)dp_3 =$$

$$= (U(w_1) - U(w_2))dp_1 + (U(w_3) - U(w_2))dp_3$$

d.h. Lotterien mit gleichem Erwartungsnutzen liegen auf Geraden mit Anstieg

$$\frac{dp_3}{dp_1} = \frac{U(w_2) - U(w_1)}{U(w_3) - U(w_2)} > 0$$

Für konkave Funktionen gilt:

$$\frac{U(w_2) - U(w_1)}{w_2 - w_1} > \frac{U(w_3) - U(w_2)}{w_3 - w_2}$$

und daher

$$\frac{U(w_2) - U(w_1)}{U(w_3) - U(w_2)} > \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_2}$$

d.h. die Geraden mit konstantem erwarteten Nutzen sind steiler als die Geraden mit konstantem Mittelwert.

Es gilt wieder:

- Gerade mit konstantem Erwartungsnutzen sind zueinander parallel
- Je näher die Gerade bei $p_3 = 1$ liegt, desto höher ist der erwartete Nutzen.

Aufgrund des steileren Anstiegs der Geraden mit konstantem Erwartungsnutzen wird ein risikoscheuer Entscheidungsträger entlang Geraden mit konstantem Mittelwert einen Punkt mit möglichst hohem p_2 wählen.

$\Rightarrow$ unter Lotterien mit gleichem Erwartungswert sind jene, die weniger Masse bei den extremen Werten w_1 bzw. w_3 haben risikoärmer.

Das Allais Paradoxon:

empirisches Experiment:

Den Versuchspersonen werden folgende Lotterien vorgelegt:

$A = ((0.01, 0.66, 0.33); (0, 2400, 2500))$

$B = ((1.0); (2400))$

$C = ((0.67, 0.33); (0, 2500))$

$D = ((0.66, 0.34); (0, 2400))$

Die Versuchpersonen müssen ihre Präferenzen zwischen A und B bzw. C und D bekanntgeben. Die Meisten wählen: $B > A$ sowie $C > D$.

Darstellung im Marschak/Machina-Dreieck:

$w_1 = 0., w_2 = 2400, w_3 = 2500.$

Den Lotterien entsprechen dann folgende Punkte:

Lotterie	Punkt
A	$(.01, .33)$
B	$(0., 0.)$
C	$(0.67, 0.33)$
D	$(0.66, 0.)$

Die Lotterien A und B bzw. C und D liegen auf zueinander parallelen Geraden. Wird nun C vor D präferiert, so werden sie von einer Iso-Erwartungsnutzen-Geraden getrennt. Da die Iso-Erwartungsnutzen-geraden zueinander parallel sind, muss auch eine Iso-Erwartungsnutzen-gerade die Lotterien A und B trennen, wobei A oberhalb und B unterhalb liegen müssten. d.h. wer C gegenüber D vorzieht, muss auch A gegenüber B vorziehen. Die steht in Widerspruch zu empirischen Belegen.

mögliche Auswege: weighted utility theory:

$$V(\tilde{w}) = \frac{\sum p_i g(w_i) U(w_i)}{\sum p_i g(w_i)}$$

(Einfache) Portfolio-Wahl unter Unsicherheit

$w_0 \cdots$ Anfangsvermögen

Grundidee: Das Anfangsvermögen kann nun (teilweise) in einen "risikolosen" Vermögenswert angelegt werden, der Rest wird als risikobehafteter Vermögenswert angelegt.

$w_0 = m + a$

$m \cdots$ risikolose Investition, wird mit fester Rate i verzinst.

$a \cdots$ risikobehaftete Investition, wird mit zufälliger Rate $\tilde{x}$ verzinst.

$\mu = \mathrm{E}(\tilde{x})$

$\Rightarrow$ Für das Endvermögen gilt:

$$\tilde{w}_f = m(1+i) + a(1+\tilde{x})$$

Neben der Restriktion $w_0 = m + a$ werden keine weiteren Beschränkungen angenommen. Insbesondere sind die folgenden zwei Fälle möglich und durchaus sinnvoll:

1. $m < 0$: i.e. Aufnahme von Krediten ist erlaubt.

   Negative Werte von m entsprechen der Aufnahme eines Kredites, um Investitionen in einen risikobehafteten Verwögenswert zu ermöglichen. Am Ende des Planungshorizontes muss der Kredit verzinst mit Rate i zurückgezahlt werden.

   Bsp: Frau L. hat ein Anfangsvermögen von $w_0 = 10000 Euro$. Sie möchte um $a = 12000 Euro$ riskante Wertpapiere kaufen, und nimmt daher einen Kredit in der Höhe von 2000 Euro auf.

$$\Rightarrow \qquad w_0 = m + a = \underbrace{-2000}_{m} + \underbrace{12000}_{a}$$

Am Ende des Planungszeitraumes muss Frau L. den Kredit zuzüglich $i = 5\%$ Zinsen zurückzahlen. Falls die Wertpapiere während des Planungszeitraumes um 10% gestiegen sind, beträgt das Endvermögen von Frau L.

$$w_f = m(1+i) + a(1+x) = \underbrace{-2000 \times 1.05}_{=-2100} + \underbrace{12000 \times 1.1}_{=13200} = 11100$$

Hätte Frau L. die Wertpapiere um ihr Anfangsvermögen von 10000 Euro **ohne** Aufnahme eines Kredites gekauft, wäre ihr Endvermögen nur auf 11000 Euro gestiegen.

2. $a < 0$: i.e. "short-selling" ist zulässig.

   Negative Werte von a entsprechen der Verpflichtung, in der Zukunft den risikobehafteten Vermögenswert abzugeben, den man ursprünglich gar nicht besitzt.

   Bsp: Frau P. hat ein Anfangsvermögen von $w_0 = 10000 Euro$. Sie verpflichtet sich, am Ende des Planungshorizontes an Herrn Z. 100 Aktien der Firma Turmoil (Aktien, die Frau P. gar nicht besitzt) abzugeben, und bekommt von Herrn Z. den momentanen Gegenwert von 2000 Euro. Das risikofrei angelegte Kapital wird mit $i = 0.05$ verzinst.

$$\Rightarrow \qquad w_0 = m + a = \underbrace{12000}_{m} \underbrace{-2000}_{a}$$

   Am Ende des Planungshorizontes muss Frau P. die 100 Aktien zu dem dann gültigen Preis $a(1+\tilde{x})$ kaufen, um sie Herrn Z. auszuhändigen. Falls die Aktien während des Planungszeitraumes nur um 3% gestiegen sind, beträgt das Endvermögen von Frau P.

$$w_f = m(1+i) + a(1+x) = \underbrace{12000 \times 1.05}_{=12600} - \underbrace{2000 \times 1.03}_{=2060} = 10540$$

   also mehr, als eine feste Verzinsung des Anfangsvermögens mit $i = 0.05$ ergeben hätte.

Optimalitätsbedingungen für verschiedene Evaluierungsmodelle

Aus der Beschränkung $m + a = w_0$ folgt:

$$m = w_0 - a$$

Für das Endvermögen gilt daher:

$$\tilde{w}_f = \underbrace{w_0(1+i)}_{(*)} + \underbrace{a(\tilde{x} - i)}_{(**)}$$

$(*) \cdots$ Endvermögen des Entscheidungsträgers, wenn dieser das gesammte Anfangsvermögen risikolos angelegt hätte

$(**) \cdots$ (positiver oder negativer) Überschuss, durch risikobehaftete Anlage. $(\tilde{x} - i)$ ist ein Maß für den Profit (bzw. Verlust) je Geldeinheit, die in einen risikobehafteten Vermögenswert angelegt wurde.

Erwartungswert-Kriterium:

$$a^* = \text{argmax } \mathrm{E}(\tilde{w}_f) = \text{argmax } \{w_0(1+i) + a(\mu - i)\}$$

wobei $\mathrm{E}(\tilde{x}) = \mu$.

folgende drei Fälle können auftreten:

$\mu - i > 0$: der "optimale" Wert a^* ist $+\infty$, i.e. das erwartete Endvermögen kann durch möglichst große Wahl von a beliebig groß gemacht werden.

Der Entscheidungsträger würde einen möglichst großen Kredit aufnehmen, um in riskante Vermögenswerte zu investieren, selbst wenn μ nur geringfügig größer als i ist. Stellt sich am Ende des Planungshorizonts heraus, dass $\tilde{x}$ einen Wert kleiner als i annimmt, kann der Kredit zuzüglich der Zinsen nicht mehr zurückgezahlt werden $\Rightarrow$ Bankrott.

$\mu - i < 0$: der "optimale" Wert a^* ist $-\infty$, i.e. das erwartete Endvermögen kann durch möglichst kleine Wahl von a beliebig groß gemacht werden.

Der Entscheidungsträger verkauft möglichst viele ungedeckte riskante Vermögenswerte und legt die Einnahmen risikolos an.

Am Ende des Planungszeitraumes bekommt er $(w_0 - a) \times (1 + i)$, erwartet aber nur $-a \times (1+\mu)$ Geldeinheiten für die dann fälligen risikobehafteten Vermögenswerte zahlen zu müssen.

Stellt sich nun heraus, dass i auch nur geringfügig kleiner als $\tilde{x}$ ist, so ist der Gewinn aus der risikolosen Anlage weitaus geringer als die zusätzlichen Kosten für die nun fälligen risikobehafteten Vermögenswerte. $\Rightarrow$ Bankrott.

$\mu - i = 0$: Der Entscheidungsträger ist indifferent zwischen m und a. a kann jeden beliebigen Wert annehmen.

Erwartungswert-Varianz-Kriterium:

Betrachten als Bewertungsfunktion

$$V(\tilde{w}_f) = \mathrm{E}(\tilde{w}_f) - k\sigma^2(\tilde{w}_f)$$

wobei $k > 0$ (i.e. Risikoaversion) angenommen wird.

$$a^* = \text{argmax } V(\tilde{w}_f) = \text{argmax } \{w_0(1+i) + a(\mu - i) - ka^2\sigma^2(\tilde{x})\}$$

Optimalitätsbedingungen:

$$\frac{dV}{da} = (\mu - i) - 2ka\sigma^2(\tilde{x}) = 0$$

$$\frac{d^2V}{da^2} = -2k\sigma^2(\tilde{x}) < 0$$

$\Rightarrow$ als eindeutige Lösung, die tatsächlich zu einem Maximum führt erhält man:

$$a^* = \frac{(\mu - i)}{2k\sigma^2(\tilde{x})}$$

- Steigt $(\mu - i)$, so steigt auch a^* (sofern k und $\sigma^2(\tilde{x})$ gleichbleiben).
- Steigt k (i.e. die Risikoaversion) oder $\sigma^2(\tilde{x})$ (i.e. das Risiko), so fällt $|a^*|$.

Erwartungsnutzen-Kriterium:

$$a^* = \text{argmax } \mathrm{E}[U(\tilde{w}_f)] = \text{argmax } \mathrm{E}[U(w_0(1+i) + a(\tilde{x} - i))]$$

Optimalitätsbedingungen:

$$\frac{d\mathrm{E}(U)}{da} = \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - i)] = 0$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}(U)}{da^2} = \mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - i)^2] < 0$$

- Für alle risikoaversen Entscheidungsträger ist die Bedingung zweiter Ordnung für die Existenz eines Maximums erfüllt.
- Um das Vorzeichen von a^* zu bestimmen, betrachten wir die erste Ableitung des erwarteten Nutzens an der Stelle $a = 0$, i.e.

$$\left.\frac{d\mathrm{E}(U)}{da}\right|_{a=0} = \mathrm{E}[U'(\underbrace{\tilde{w}_f|_{a=0}}_{=w_0(1+i)})(\tilde{x} - i)] =$$

$$= \underbrace{U'(w_0(1+i))}_{>0}(\mu - i)$$

Aus der Konkavität von $\mathrm{E}(U)$ folgt dann unmittelbar:

$$a^* > 0 \Leftrightarrow \mu > i \quad \text{bzw.} \quad a^* < 0 \Leftrightarrow \mu < i$$

d.h. ein risikoscheuer Entscheidungsträger wird einen Teil seines Vermögens (oder sogar mehr) in eine riskante Anlageform investieren, wenn die erwartete Ertragsrate μ größer als der risikofreie Zinssatz i ist. Ist jedoch $\mu < i$, so wird mehr als das vorhandene Anfangsvermögen risikolos angelegt, und der über das Anfangsvermögen hinausgehende Betrag durch Verkauf ungedeckter riskanter Vermögenswerte finanziert.

Aus der Bedingung erster Ordnung folgt:

$$\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)\tilde{x}] = \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)]i$$

Da bekanntlich für Zufallsvariable folgender Zusammenhang gilt

$$cov(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathrm{E}(\tilde{x}\tilde{y}) - \mathrm{E}(\tilde{x})\mathrm{E}(\tilde{y}) \Rightarrow \mathrm{E}(\tilde{x}\tilde{y}) = cov(\tilde{x}, \tilde{y}) + \mathrm{E}(\tilde{x})\mathrm{E}(\tilde{y})$$

erhält man

$$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{E}(\tilde{x})}_{=\mu} \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)] + cov(U'(\tilde{w}_f), \tilde{x}) = \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)]i$$

Wegen $U' > 0$ kann man dividieren und erhält:

$$\mu + \frac{cov(U', \tilde{x})}{\mathrm{E}(U')} = i$$

d.h. im Gleichgewicht gilt: der marginale erwartete Gesamtgewinn = den marginalen Opportunitätskosten i einer Einheit des Wertpapiers.

Der marginale erwartete Gesamtgewinn besteht aus zwei Komponenten:

- $\mu \cdots$ marginaler erwarteter Gewinn aus Investitionen in den risikobehafteten Vermögenswert.
- abzüglich der "marginalen Risiko-Kosten"

$$-\frac{cov(U', \tilde{x})}{\mathrm{E}(U')}$$

Bemerkungen:

- Ist $a > 0$ und der Entscheidungsträger risikoavers, so ist

$$\frac{cov(U', \tilde{x})}{\mathrm{E}(U')} < 0$$

  Ist $a > 0$ so bewirkt ein Ansteigen von $\tilde{x}$ eine Erhöhung von $\tilde{w}_f$ und aufgrund der Risikoaversion eine Abnahme des marginalen Nutzens U' (U ist konkav). D.h. $\tilde{x}$ und $U'(\tilde{w}_f)$ sind negativ korrelliert, also ist die Covarianz negativ.

- Im Fall von Risikoneutralität ist U linear, also U' konstant und damit die Covarianz $= 0$.

Abhängigkeit vom Anfangsvermögen

$$\text{Welches Vorzeichen hat } \frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}w_0}$$

a^* ist Lösung der "first-order condition"

$$H(a; w_0, i) = \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - i)] = 0$$

Totales Ableiten von H unter der Annahme dass i konstant bleibt (i.e. $\mathrm{d}i = 0$):

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial H}{\partial w_0}\mathrm{d}w_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}w_0} = \frac{\frac{\partial H}{\partial w_0}}{-\frac{\partial H}{\partial a}}$$

Da $\tilde{w}_f = w_0(1 + i) + a(\tilde{x} - i)$ gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial w_0} = (1 + i)\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - i)]$$

$$\frac{\partial H}{\partial a} = \mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - i)^2] < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}w_0} = \frac{-(1 + i)\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - i)]}{\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - i)^2]}$$

$$\Rightarrow \mathrm{sgn}\frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}w_0} = \mathrm{sgn}\left\{\underbrace{(1 + i)}_{>0}\mathrm{E}[\underbrace{U''(\tilde{w}_f)}_{<0}\underbrace{(\tilde{x} - i)}_{\mathrm{sgn}=?}]\right\}$$

Konstante absolute Risikoaversion:

$$-\frac{U''(\tilde{w}_f)}{U'(\tilde{w}_f)} = \beta \Rightarrow U''(\tilde{w}_f) = -\beta U'(\tilde{w}_f)$$

und daher

$$\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)] = \mathrm{E}[-\beta U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)] = -\beta \underbrace{\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)]}_{=0}$$

das heisst also

$$\text{konstante absolute Risikoaversion } A_a \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}w_0} = 0$$

fallende absolute Risikoaversion:

$$-\frac{U''(\tilde{w}_f)}{U'(\tilde{w}_f)} = A_a(\tilde{w}_f) \Rightarrow U''(\tilde{w}_f) = -A_a(\tilde{w}_f)U'(\tilde{w}_f)$$

wobei $A_a(w_f)$ positiv ist (Annahme U ist konkav, i.e. Entscheidungsträger ist risikoavers) und monoton fällt.

$$\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)] = \mathrm{E}[-A_a(\tilde{w}_f)U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)]$$

Bestimmen Vorzeichen von

$$(*) = \mathrm{E}[\underbrace{A_a(\tilde{w}_f)}_{>0}\underbrace{U'(\tilde{w}_f)}_{>0}(\tilde{x}-i)]$$

- für $A_a(\tilde{w}_f)$ =konstant, ist $(*) = 0$
- ist $a^* > 0$ ($a^* < 0$) so gilt: für $x < i$ nimmt w_f kleinere (größere) Werte und daher $A_a(w_f)$ größere (kleinere) Werte an, als für $x > i$
- d.h. von $U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)$ wird der "negative Anteil" (i.e. für $x < i$) durch $A_a(\tilde{w}_f)$ stärker (schwächer) gewichtet als der "positive Anteil" (i.e. für $x > i$.)
- $(*)$ ist also negativ (positiv).

Also gilt:

$$\text{abnehmende absolute Risikoaversion } A_a \Rightarrow \frac{\mathrm{d}|a^*|}{\mathrm{d}w_0} > 0$$

d.h. der risikobehaftete Vermögenswert ist ein **normales Gut.**

steigende absolute Risikoaversion: analog kann man zeigen:

$$\text{steigende absolute Risikoaversion } A_a \Rightarrow \frac{\mathrm{d}|a^*|}{\mathrm{d}w_0} < 0$$

d.h. der risikobehaftete Vermögenswert ist ein **inferiores Gut.**

Bemerkung: Empirische Studien belegen, dass risikobehaftete Vermögenswerte normale Güter sind. $\Rightarrow$ Hinweis für abnehmende absolute Risikoaversion

Frage: Ist ein risikobehafteter Vermögenswert ein "Luxusgut", i.e. ein normales Gut mit einer Nachfrage-elastizität η größer als 1?

$$\eta = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}w_0}\frac{w_0}{a}$$

$$\eta = \frac{-(1+i)\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)]}{\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)^2]}\frac{w_0}{a}$$

$$\eta = 1 + \frac{-a(1+i)\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)]w_0 - a^2\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)^2]}{a^2\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)^2]}$$

Der Nenner des Bruches ist negativ und für den Zähler bekommt man:

$$-a\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)\underbrace{\{(1+i)w_0 + a(\tilde{x}-i)\}}_{=\tilde{w}_f}] = -a\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)\tilde{w}_f]$$

Es gilt also

$$\eta > 1 \Leftrightarrow \underbrace{a\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)\tilde{w}_f(\tilde{x}-i)]}_{=(*)} > 0.$$

Das Vorzeichen von $(*)$ hängt mit der relativen Risikoaversion zusammen:

$$A_r = -\tilde{w}_f\frac{U''(\tilde{w}_f)}{U'(\tilde{w}_f)} \Rightarrow U''(\tilde{w}_f)\tilde{w}_f = -A_r(\tilde{w}_f)U'(\tilde{w}_f)$$

und daher

$$(*) = a\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)\tilde{w}_f(\tilde{x}-i)] = a\mathrm{E}[-A_r(\tilde{w}_f)U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)]$$

Konstante relative Risikoaversion:

$$A_r(\tilde{w}_f) = \alpha (= \text{konstant})$$

Daher

$$(*) = -a\alpha\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)] = 0$$

Es gilt also

$$\text{konstante relative Risikoaversion } A_r \Rightarrow \eta = 1.$$

fallende relative Risikoaversion:

$$(*) = -a\,\underbrace{\mathrm{E}[A_r(\tilde{w}_f)U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)]}_{(**)}$$

Ist A_r monoton fallend und $a > 0$ ($a < 0$), kann man wie oben zeigen, dass $(**)$ negativ (positiv) ist, also gilt:

$$\text{abnehmende relative Risikoaversion } A_r \Rightarrow \eta > 1$$

d.h. der risikobehaftete Vermögenswert ist ein **Luxusgut.**

steigende relative Risikoaversion: analog kann man zeigen:

$$\text{steigende relative Risikoaversion } A_r \Rightarrow \eta < 1$$

d.h. der risikobehaftete Vermögenswert ist **kein Luxusgut.**

Bemerkung: $\eta > 1$ ist äquivalent zu

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{|a|}{w_0}\right)}{\mathrm{d}w_0} > 0$$

d.h. die Aussage, dass ein Wertpapier ein Luxusgut ist, ist gleichbedeutend damit, dass der risikoreiche Anteil des Portfolios mit steigendem Anfangsvermögen (absolut gesehen) zunimmt. Dazu wird der Entscheidungsträger aber nur bereit sein, wenn seine Nutzenfunktion eine abnehmende relative Risikoaversion besitzt.

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{|a|}{w_0}\right)}{\mathrm{d}w_0} = \frac{1}{w_0^2}\left[\frac{\mathrm{d}|a|}{\mathrm{d}w_0}w_0 - |a|\right] = \frac{|a|}{w_0^2}\left[\underbrace{\frac{\mathrm{d}|a|}{\mathrm{d}w_0}\frac{w_0}{|a|}}_{=\eta} - 1\right] = \frac{|a|}{w_0^2}\left[\underbrace{\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}w_0}\frac{w_0}{a}}_{=\eta} - 1\right] > 0$$

Zusammenfassung:

	A_a fallend	A_a konstant	A_a steigend
A_r fallend	$\eta > 1$	nicht möglich	nicht möglich
A_r konstant	$\eta = 1$	nicht möglich	nicht möglich
A_r steigend	$0 < \eta < 1$	$\eta = 0$	$\eta < 0$

Abhängigkeit von i

Vermutung: Eine Erhöhung von i macht das risikofreie Anlegen des Vermögens attraktiver und führt zu einer Veringerung von a.

Totales Ableiten von H unter der Annahme, dass w_0 konstant bleibt (i.e. $\mathrm{d}w_0 = 0$):

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial H}{\partial i}\mathrm{d}i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}i} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial i}}{\frac{\partial H}{\partial a}}$$

Da $\tilde{w}_f = w_0(1+i) + a(\tilde{x} - i)$ gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial i} = \mathrm{E}[-U'(\tilde{w}_f) + (\tilde{x} - i)U''(\tilde{w}_f)(w_0 - a^*)]$$

Da $\partial H / \partial a$ (= Bedingung 2-ter Ordnung) negativ ist, gilt:

$$\mathrm{sgn}\frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}i} = \mathrm{sgn}\left\{\mathrm{E}[\underbrace{-U'(\tilde{w}_f)}_{<0} + \underbrace{(\tilde{x} - i)U''(\tilde{w}_f)(w_0 - a^*)]}_{sgn=?}\right\}$$

$$= \operatorname{sgn}\left\{ \mathrm{E}[\underbrace{-U'(\tilde{w}_f)}_{<0}] + m^*\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)] \right\}$$

Wie bereits früher gezeigt, ist bei monoton fallender absoluter Risikoaversion

$$\operatorname{sgn}\mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x}-i)] = \operatorname{sgn}\frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}w_0}$$

2 Effekte:

- **"Substitutionseffekt:"** eine Erhöhung von i führt zu einer Abnahme von a^* (gilt auch für $a^* < 0$, wo eine Erhöhung von i zu stärkerem short-selling führt), i.e. $a^* \to \hat{a} < a^*$.
- **"Reichtumseffekt:"** Ist $m^* > 0$, so erhöht eine Steigerung von i den (erwarteten) Reichtum. Bei fallender absoluter Risikoaversion verringert das die marginalen Risikokosten und führt zu einer Erhöhung der Risikobereitschaft. Ist $\hat{a} > 0$ so resultiert daraus eine Verschiebung $\hat{a} \to a^{**} > \hat{a}$.

  Bemerkung: Überwiegt der "Reichtumseffekt", so kann eine Erhöhung des risikofreien Zinssatzes i zu einer verstärkten Nachfrage nach der riskanten Anlageform führen.

Abhängigkeit von μ

Angenommen, der Entscheidungsträger erhält neue Informationen über den Ertrag des unsicher angelegten Vermöges. Formal bedeutet das, dass die Zufallsvariable $\tilde{x}$ zu $\tilde{y}$ transformiert wird.

Frage: Welchen Einfluss hat dies auf a^*?

Einfachster Fall:

Die ursprüngliche Ertragsrate ist durch $\tilde{x} = \mu + \tilde{\epsilon}$ charakterisiert und man betrachtet nun eine Verscheibung zu $\tilde{x}' = \mu' + \tilde{\epsilon}$ wobei $\mu' > \mu$ ist.

a^* ist gegeben durch

$$a^* = \operatorname{argmax}\ \mathrm{E}[U(\tilde{w}_f)] = \operatorname{argmax}\ \mathrm{E}[w_0(1+i) + a(\mu + \tilde{\epsilon} - i)]$$

Als Bedingung erster Ordnung bekommt man:

$$\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)(\mu + \tilde{\epsilon} - i)] = 0$$

Auf zu den bisherigen Überlegungen analoge Weise bekommt man:

$$\operatorname{sgn}\frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}\mu} = \operatorname{sgn}\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f) + U''(\tilde{w}_f)(\mu + \tilde{\epsilon} - i)a^*]$$

bzw.

$$\operatorname{sgn}\frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}\mu} = \operatorname{sgn}\mathrm{E}\left[U'(\tilde{w}_f)\left(1 + \underbrace{\frac{U''(\tilde{w}_f)}{U'(\tilde{w}_f)}(\mu + \tilde{\epsilon} - i)a^*}_{=-A_p(\tilde{w}_f)} \right)\right]$$

Daher gilt:

Ist die partielle Risikoaversion immer kleiner (größer) als 1, so ist $\mathrm{d}a^*/\mathrm{d}\mu$ positiv (negativ).

Bemerkung: Da für die meisten Entscheidungsträger a^* mit steigendem μ zunimmt, ist dies ein Hinweis, dass partielle Risikoaversion kleiner als 1 ist.

Zunahme des Risikos bei gleichbleibendem Erwartungswert

Intuition: Wird der Ertrag $\tilde{x}$ bei gleichbleibendem Erwartungswert μ riskanter, so sinkt a^*.

Seien $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ zwei Ertragsrate mit gleichem Erwartungswert. $f(s)$ sei die Dichte von $\tilde{x}$ und $g(s)$ die Dichte von $\tilde{y}$. $\tilde{y}$ ist riskanter als $\tilde{x}$, falls

$$\int h(s)f(s)ds > \int h(s)g(s)ds$$

für alle konkaven Funktionen $h(s)$. Dazu äquivalent ist

$$\int h(s)[g(s) - f(s)]ds < 0.$$

D.h. jeder risikoaverse Entscheidungsträger zieht aus der Lotterie $\tilde{x}$ einen höheren erwarteten Nutzen als aus $\tilde{y}$.

$\Rightarrow$ Die Kurve $\mathrm{E}[U(\tilde{x})] := \mathrm{E}[U(w_0(1+i) + a(\tilde{x} - i)]$ liegt **über** $\mathrm{E}[U(\tilde{y})] := \mathrm{E}[U(w_0(1+i) + a(\tilde{y} - i)]$

Sei a^* die optimale Wahl des Portfolios bei Ertragsrate $\tilde{x}$, i.e. es gilt die Optimalitätsbedingung erster Ordnung

$$\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - i)] = 0$$

Diese kann geschrieben werden als

$$\int U'(w_f(s))(s-i)f(s)ds = 0$$

wobei $w_f(s) = w_0(1+i) + a^*(s-i)$.

a^{**} ist die optimale Wahl bei Ertragsrate $\tilde{y}$ und maximiert $\mathrm{E}[U(\tilde{y})]$. Um festzustellen, ob a^{**} kleiner oder größer als a^* ist, betrachte ich den Anstieg der Tangente an Funktion $\mathrm{E}[U(\tilde{y})]$ an der Stelle a^*, i.e.

$$(*) = \left.\frac{\mathrm{dE}[U(\tilde{y})]}{\mathrm{d}a}\right|_{a=a^*} = \int U'(w_f(s))(s-i)g(s)ds$$

a^{**} ist kleiner als a^* genau dann, wenn $(*) < 0$ ist.
$(*)$ zusammen mit obiger Optimalitätsbedingung ergibt: $(*) < 0$ genau dann, wenn

$$\int U'(w_f(s))(s-i)[g(s) - f(s)]ds < 0.$$

Hinreichend dafür ist, dass $U'(w_f(s))(s-i)$ konkav in s ist.
Es gilt also: $U'w_f(s)(s-i)$ konkav in $s \Rightarrow a^{**} < a^*$
Um Festzustellen, ob $U'(w_f(s))(s-i)$ konkav in s ist, berechnen wird:

$$\frac{\partial^2[U'(w_f(s))(s-i)]}{\partial s^2} = 2U''(w_f(s))a + a^2(s-i)U'''(w_f(s))$$

Die üblichen Bedingungen U monoton wachsend und konkav sind also **nicht** hinreichend, um die Intuition einer fallenden Nachfrage nach dem risikobehafteten Vermögenswert bei steigendem Risiko und gleichbleibendem Erwartungswert des Ertrags zu rechtfertigen.

Bedarf nach Versicherungen

Der Entscheidungsträger hat ein sicheres Vermögen w_0 und zusätzlich einen Vermögenswert L, der durch einen Schadensfall (Feuer, Unfall, etc.) beschädigt werden kann.

mögliches Schadensausmaß: $\tilde{x}L$
wobei $\tilde{x}$ eine Zufallsvariable auf dem Intervall $[0, 1]$ mit Dichte $f(x)$ bezeichnet.

Versicherungsvertrag spezifiziert zwei Punkte:

1. Die Entschädigungszahlung $I = I(xL) = I(X)$.

   Dabei ist X der absolute Wert des Schadens. Die Funktion I hat die folgenden Eigenschaften:

   $$(a) I(0) = 0, \quad (b) \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}X} \geq 0 \quad (c) \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}X} \leq 1$$

   Ohne Bedingung (c) könnte der Versicherte bei einer Erhöhung des Schadens durch eine unverhältnismässig größere Entschädigung einen Gewinn erzielen.

   $I(0) = 0$ und $\mathrm{d}I/\mathrm{d}X \leq 1 \quad \Rightarrow I \leq X$.

2. Die Versicherung verlangt eine Prämie P.

   $$P = (1 + \lambda)\mathrm{E}[I(\tilde{x}L)] = (1 + \lambda) \int_0^1 I(xL)f(x)dx$$

   Bemerkung: Sowohl das Versicherungsunternehmen als auch der Versicherte gehen von der gleichen Dichtefunktion $f(x)$ aus.

Betrachten folgende zwei Spezialfälle:

- "co-insurance", Teilversicherung, mit prozentualer Selbstbeteiligung $I(X) = aX = axL$, wobei $0 \leq a \leq 1$
- mit Selbstbehalt

$$I(xL) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad xL \leq d \\ xL - d & \text{falls} \quad d < xL \end{cases}$$

Bemerkung: $d = 0$ bzw. $a = 1$ entspricht einem vollständigen Begleichen des Schadens, im Fall $d = L$ bzw. $a = 0$ wird der Schaden überhaupt nicht abgegolten.

Fall 1: Teilversicherung

Die Entschädigungszahlung hat die Form $I(xL) = axL$

Annahme: Der Versicherungsnehmer ist der Entscheidungsträger und wählt den optimalen Wert von a. Der Versicherer ist bereit, die Versicherung zur Prämie

$$P = (1 + \lambda)\mathrm{E}[I(\tilde{x}L)] = (1 + \lambda)\mathrm{E}[a\tilde{x}L] = (1 + \lambda)a\mu L$$

abzuschliessen.

Für den erwarteten Nutzen des Endvermögens gilt:

$$\mathrm{E}[U(\tilde{w}_f)] = \int_0^1 U(w_0 + L - xL + \underbrace{axL}_{=I(X)} - \underbrace{(1+\lambda)a\mu L}_{=P})f(x)dx$$

Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}E[U(\tilde{w}_f)]}{\mathrm{d}a} = \int_0^1 U'(w_f(x))L\{x - (1+\lambda)\mu\}f(x)dx = 0$$

Bedingung zweiter Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}^2E[U(\tilde{w}_f)]}{\mathrm{d}a^2} = \int_0^1 U''(w_f(x))L^2\{x - (1+\lambda)\mu\}^2 f(x)dx < 0$$

Die Bedingung zweiter Ordnung ist für risikoscheue Entscheidungsträger stets erfüllt.

Bemerkung: Ziel ist es, den erwarteten Nutzen zu maximieren, i.e.

$$\mathrm{E}[U(w_0 + L - \tilde{x}L + a\tilde{x}L - (1+\lambda)a\mu L)]$$

Umschreiben ergibt:

$$\mathrm{E}[U(w_0 + L - (1+\lambda)\mu L + (a-1)L(\tilde{x} - (1+\lambda)\mu)]$$

Bei der Wahl des optimalen Portfolios wurde a so gewählt, dass

$$\mathrm{E}[U(w_0(1+i) + a(\tilde{x} - i)]$$

maximal wird.

In beiden Fällen gilt:

- Das Endvermögen ist linear in der Entscheidungsvariablen a. Das Endvermögen besteht aus einem sicheren Anteil + Entscheidungsvariable multipliziert mit einem unsicheren Anteil.
- die Akzeptanz (oder Ablehnung) eines höheren Risikos wird kompensiert durch ein höheres (niedrigeres) erwartetes Endvermögen.

Aus der Bedingung erster Ordnung folgt:

$$\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)L(\tilde{x} - (1+\lambda)\mu)] = 0$$

$$\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)\tilde{x}] = \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)](1+\lambda)\mu$$

$$Cov(U'(\tilde{w}_f), \tilde{x}) + \mu\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)] = \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)](1+\lambda)\mu$$

$$\frac{Cov(U'(\tilde{w}_f), \tilde{x})}{\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)]} = \lambda\mu$$

Fall 2: Versicherung mit Selbstbehalt

Die Entschädigungszahlung hat die Form

$$I(xL) = \max(0, xL - d) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \leq d/L \\ xL - d & \text{falls} \quad d/L < x \end{cases}$$

Die Versicherungsprämie beträgt

$$P(d) = (1+\lambda)\int_0^1 I(x,d)f(x)dx = (1+\lambda)\int_{d/L}^1 (xL - d)f(x)dx$$

Durch partielles Integrieren erhält man

$$P(d) = (1+\lambda)\left[L - d - L\int_{d/L}^1 F(x)dx\right]$$

wobei $F(.)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $\tilde{x}$ bezeichnet.

Zur Erinnerung:
partielles Intergieren: $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$
Hier: $u'(x) = f(x), v(x) = (xL - d) \Rightarrow u(x) = F(x), v'(x) = L$

$$\Rightarrow \int_{d/L}^1 (xL-d)f(x)dx = (xL-d)F(x)|_{d/L}^1 - \int_{d/L}^1 LF(x)dx = L - d - L\int_{d/L}^1 F(x)dx$$

Für die Änderung der Prämie bei infinitesimaler Änderung des Selbstbehaltes gilt dann:

$$P'(d) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}(1+\lambda)[L-d+L\int_1^{d/L} F(x)dx] = (1+\lambda)\left[-1 + LF\left(\frac{d}{L}\right)\frac{1}{L}\right] = -(1+\lambda)(1-F(d/L))$$

Bemerkungen:

- $P'(d) < 0$, i.e. bei höherem Selbstbehalt fällt die Prämie
- Risikoaverser Entscheidungsträger ist mit folgendem Dilemma konfrontiert:

kleiner Selbstbehalt	$\Rightarrow$	guter Schutz durch Versicherung, hohe Prämie
hoher Selbstbehalt	$\Rightarrow$	geringe Prämie, hoher Schutz

- Prämie hängt in **nicht-linearer** weise von d ab. Entschädigungszahlung ist auch **nicht-linear** in d.

Das Endvermögen hat folgende Form

$$\tilde{w}_f = w_0 + L - \tilde{x}L + \underbrace{\max(0, \tilde{x}L - d)}_{=I(\tilde{x}L)} - P(d)$$

und beträgt stets mindestens

$$w_f^{min} = w_0 + L - d - P(d)$$

da folgendes gilt:

$$w_f = \begin{cases} w_0 + L - xL - P(d) & \text{falls} \quad x \leq d/L \\ w_0 + L - d - P(d) & \text{falls} \quad d/L < x \end{cases}$$

Bestimmen des optimalen Selbstbehalts:

Um den optimalen Selbstbehalt d^* zu bestimmen, leiten wir den erwarteten Nutzen nach d ab:

$$\frac{\mathrm{dE}[U(\tilde{w}_f)]}{\mathrm{d}d} = \int_0^1 U'(w_f)\left[\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}d} - P'(d)\right] f(x)dx$$

Ist der Schaden kleiner als der Selbstbehalt, so ist die Entschädigung I konstant gleich 0 und ändert sich nicht, andernfalls ist $I = xL - d$. Für die Ableitung erhält man demnach

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}d} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < d/L \\ -1 & \text{für} \quad d/L < x \end{cases}$$

Daher gilt:

$$\frac{\mathrm{dE}[U(\tilde{w}_f)]}{\mathrm{d}d} = \int_{d/L}^1 U'(w_f)(-1)f(x)dx - P'(d)\int_0^1 U'(w_f)f(x)dx$$

Weiters ist, sofern der Schaden den Selbstbehalt übersteigt, dass Endvermögen konstant gleich dem minimalen Endvermögen w_f^{min} und somit:

$$\frac{\mathrm{dE}[U(\tilde{w}_f)]}{\mathrm{d}d} = -U'(w_f^{min})[1 - F(d/L)] - P'(d)\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)]$$

Nach Einsetzen für $P'(d)$ ergibt sich die Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{\mathrm{dE}[U(\tilde{w}_f)]}{\mathrm{d}d} = \underbrace{(1+\lambda)[1 - F(d/L)]\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)]}_{(*)}\underbrace{-U'(w_f^{min})[1 - F(d/L)]}_{(**)} = 0$$

bzw.

$$U'(w_f^{min}) = (1+\lambda)\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)]$$

(*): marginaler Gewinn durch Reduktion der Prämie wenn Selbstbehalt erhöht wird. ("Prämieneffekt")

(**): marginaler Verlust bei Erhöhung des Selbstbehaltes. ("Deckungseffekt")

Bemerkung: Risikoaversion (i.e. eine konkave Nutzenfunktion) ist **nicht** hinreichend, dass die Bedingung zweiter Ordnung erfüllt ist. D.h. der erwartete Nutzen kann durchaus konvex in d sein und die Bedingung erster Ordnung kann zu einem Minimum führen.

Satz: $d^* > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$

Begründung:

$w_f(x) \geq w_f^{min} \forall x \Rightarrow U'[w_f(x)] \leq U'[w_f^{min}] \Rightarrow \mathrm{E}U'[w_f(x)] \leq U'[w_f^{min}]$

Ist $\lambda = 0$ impliziert die Bedingung erster Ordnung

$$U'(w_f^{min}) = \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)]$$

Dies ist aber nur möglich, wenn $w_f(x) = w_f^{min} \forall x$, also $d^* = 0$.

Andererseits folgt aus $\lambda > 0$, dass $U'(w_f^{min}) > \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)]$. Also muss $w_f(x) > w_f^{min}$ für einige Werte von x. Dies ist nur bei $d^* > 0$ möglich.

Satz: Falls ein Versicherungsunternehmen Versicherungsverträge anbietet, bei denen die Prämie nur von der erwarteten Entschädigungszahlung abhängt, so wählt jeder risikoaverse Entscheidungsträger eine Versicherung mit Selbstbehalt, i.e. $I(xL) = \max\{0, xL - d\}$.

Betrachten $\tilde{y} = w_0 + L - xL - P$, i.e. das Endvermögen nach Eintreten des Schadens aber ohne Entschädigungszahlung. $\tilde{y}$ liegt im Bereich $[w_0 - P, w_0 + L - P]$. $H(y)$ bezeichne die Verteilungsfunktion von $\tilde{y}$.

Produktionsentscheidungen unter Risiko

Man kann folgende Ursachen des Risikos unterscheiden:

1. Risiko durch den Markt.
   - Unsichere Verkaufspreise: Zu Beginn der Produktion weiss der Unternehmer die Produktionskosten. Der Preis $\tilde{p}$ zu dem das Produkt verkauft werden kann, ist jedoch eine Zufallsvariable, die durch die Dichtefunktion $f(p)$ charakterisiert ist.
   - Unsichere Nachfrage: Der Produktpreis ist fest vorgegeben. Ein (Zwischen-) Händler muss nun das Produkt bestellen, er kennt aber die Nachfrage nicht. (In der OR-Literatur ist das Problem als "Newsboy problem" bekannt.)
2. Risiko durch den Produktionsprozess. Man unterscheidet:
   - geplante Produktion a
   - tatsächliche Produktion $\tilde{a}$. Abweichung von geplanter Produktion etwa durch Streiks, Klima, Ausfall von Maschinen, etc.

   Mögliche Beziehungen zwischen a und $\tilde{a}$:

   $$\tilde{a} = a + \tilde{\epsilon} \text{ mit } \mathrm{E}(\tilde{\epsilon}) = 0.$$

   Dieser Ansatz ist oft nicht sehr sinnvoll, da etwa eine Dürre den selben Effekt auf einen Hobby-Gärtner wie auf einen großen Agrarbetrieb hätte.

   $$\tilde{a} = a(1 + \tilde{\epsilon}) \text{ mit } \mathrm{E}(\tilde{\epsilon}) = 0.$$

Preis-Risiko

Annahmen:

- perfekter Wettbewerb
- Kostenfunktionen von Anfang an bekannt
- Alles kann verkauft werden
- kein Risiko im Produktionsprozess

$$\begin{array}{rcl} w_0 & \dots & \text{Anfangsvermögen} \\ a & \cdots & \text{Produktion (Entscheidungsvariable)} \\ B & \cdots & \text{Fixkosten} \\ c(a) & \cdots & \text{variable Kosten}, c'(a) > 0 \\ \tilde{p} & \dots & \text{Preis, (Zufallsvariable)} \\ f(p) & \dots & \text{Dichtefunktion von } \tilde{p} \\ & & \text{(unabhängig von } a) \end{array}$$

Für das Endverm ögen des Produzenten erhält man also

$$\tilde{w}_f = w_0 + \underbrace{\tilde{p}a - c(a) - B}_{=\text{ Profit}}$$

Sei nun $U(.)$ eine stetige, monoton wachsende, konkave Nutzenfunktion. Entsprechend der Bernoulli-Nutzentheorie wählt nun der Entscheidungsträger die optimale Produktionsmenge derart, dass der erwartete Nutzen seines Endvermögens maximal wird.

$$a^* = \text{argmax E}[U(w_0 + \tilde{p}a - c(a) - B)]$$

Als Bedingung erster Ordnung erhält man daher

$$\frac{\mathrm{dE}[U(\tilde{w}_f)]}{\mathrm{d}a} = \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)(\tilde{p} - c'(a))] = 0. \tag{1}$$

Vergleich zu früher:

$$\begin{array}{rl} \text{Portfoliowahl:} & \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - i)] = 0 \\ \text{Versicherung:} & \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - (1+\lambda)\mu)] = 0 \end{array}$$

Die Bedingung zweiter Ordnung ist für risikoaverse Entscheidungsträger erfüllt, sofern die Kostenfunktion konvex ist:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{E}[U(\tilde{w}_f)]}{\mathrm{d}a^2} = \mathrm{E}[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{p} - c'(a))^2 - U'(\tilde{w}_f)c''(a)] < 0.$$

Da allgemein für beliebige Zufallsvariable $\tilde{X}, \tilde{Y}$ die Beziehung $\mathrm{E}(\tilde{X}\tilde{Y}) = \mathrm{Cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \mathrm{E}(\tilde{X})\mathrm{E}(\tilde{Y})$ gilt, kann man Bedingung (1) umformen zu

$$\mathrm{E}(\tilde{p}) = c'(a) - \frac{\mathrm{Cov}(U'(\tilde{w}_f), \tilde{p})}{\mathrm{E}(U'(\tilde{w}_f))}$$

LHS: marginaler erwarteter Bruttoerlös
RHS: marginalen Kosten: = marginalen Produktionskosten + marginalen Risikokosten

Behauptung: Für einen risikoaversen Entscheidungsträger ist

$$-\frac{\mathrm{Cov}(U'(\tilde{w}_f), \tilde{p})}{\mathrm{E}(U'(\tilde{w}_f))} > 0$$

Steigt der Preis $\tilde{p}$, so steigt das Endvermögen und daher sinkt (aufgrund der Konkavität von U) die Ableitung $U'(\tilde{w}_f)$. Daher ist die Covarianz negativ. Da $E(U'(\tilde{w}_f))$ positiv ist, folgt obige Behauptung.

Falls der Entscheidungsträger risikoneutral ist (oder der Preis nicht zufällig ist) verschwinden die Risikokosten (Cov = 0), und der Entscheidungsträger wird die optimale Produktionszahl derart bestimmen, dass die marginalen Produktionskosten dem (erwarteten) marginalen Brutto-erlös entspricht.

Das durch den unbekannten Preis verursachte Risiko bewirken für einen risikoaversen Entscheidungsträger zusätzliche Kosten, die zu einer reduzierten Produktionsmenge führen.

Einfluss der Fixkosten B auf die Produktionsentscheidung:

- Falls p sicher ist:
  Änderung der Fixkosten B hat **keinen** Einfluss auf die optimale Produktionsrate.
- Falls p zufällig ist, gilt dies nicht mehr.

  Satz: Unter der Annahme fallender absoluter Risikoaversion gilt: steigt B, so fällt a^*.

  Begründung: B steigt $\Rightarrow w_f$ fällt $\Rightarrow$ Risikoaversion nimmt zu $\Rightarrow a^*$ fällt.

  (Ein formaler Beweis kann wie im Abschnitt der Portfoliowahl gegeben werden.)

Die Rolle zukünftiger Märkte:

Am Beginn des Planungszeitraumes wird ein Future-Vertrag bezüglich des Kaufs/Verkaufs von a_t Einheiten des Produktes zum festgesetzten Preis p_t zum Ende des Panungszeitraumes abgeschlossen. Der Spotpreis am Ende des Planungszeitraumes ist zufällig.

w_0	...	Anfangsvermögen
a	···	Produktion (Entscheidungsvariable)
a_t	···	am Ende des Planungszeitraumes zu verkaufende Menge zum Preis p_t (Entscheidungsvariable)
p_t	···	(bekannter) Preis am zukünftigen Markt
B	···	Fixkosten
$c(a)$	···	variable Kosten, $c'(a) > 0$
$\tilde{p}$	...	Spot-Preis, (Zufallsvariable)
$f(p)$	...	Dichtefunktion von $\tilde{p}$ (unabhängig von a)

Für den Profit erhält man

$$\tilde{\pi} = \tilde{p}(a - a_t) + p_t a_t - c(a) - B$$

Die Entscheidungsvariablen a sowie a_t werden derart gewählt, dass der erwartete Nutzen des Endvermögens maximal wird, i.e.

$$(a, a_t) = \text{argmax} \int_0^\infty U(w_0 + p(a - a_t) + p_t a_t - c(a) - B) f(p) dp$$

Als Bedingungen erster Ordnung erhält man

$$\frac{\partial \mathrm{E}[U(\tilde{w}_f)]}{\partial a} = \int_0^\infty U'(w_f)(p - c'(a)) f(p) dp = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}[U(\tilde{w}_f)]}{\partial a_t} = \int_0^\infty U'(w_f)(-p + p_t)f(p)dp = 0 \tag{3}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen liefert:

$$\int_0^\infty U'(w_f)(p_t - c'(a))f(p)dp = (p_t - c'(a))\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)] = 0$$

Daher ist die optimale Produktionsentscheidung a^* unabhängig vom Risiko des Spotpreises und von der Risikoeinstellung des Entscheidungsträgers. a^* erhält man als Lösung der Gleichung

$$c'(a) = p_t$$

Zur Bestimmung von a_t^* folgt aus Gleichung (3)

$$p_t \mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)] = \underbrace{\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)\tilde{p})]}_{=\mathrm{Cov}(U',\tilde{p}) + \mathrm{E}(U')\mathrm{E}(\tilde{p})}$$

beziehungsweise ergibt das übliche Umschreiben

$$p_t = \mathrm{E}[\tilde{p}] + \frac{\mathrm{Cov}(U'(\tilde{w}_f), \tilde{p})}{\mathrm{E}[U'(\tilde{w}_f)]} \tag{4}$$

Es können nun die folgenden beiden Fälle auftreten:

$\mathrm{E}[\tilde{p}] > p_t$ Gleichung (4) kann nur dann gelten, falls $\mathrm{Cov}(U'(\tilde{w}_f), \tilde{p})$ negativ ist.
Dies ist der Fall, wenn bei steigendem Preis $U'(w_f)$ fällt. Aufgrund der Konkavität von U (i.e. Risikoaversion des Entscheidungsträgers) muss also w_f steigen. Da $w_f = w_0 + p(a - a_t) + p_t a_t - c(a) - B$ ist daher $a_t^* < a^*$, d.h. es ist optimal einen Teil der produzierten Menge am Spotmarkt zu verkaufen.

$\mathrm{E}[\tilde{p}] < p_t$ Gleichung (4) kann nur dann gelten, falls $\mathrm{Cov}(U'(\tilde{w}_f), \tilde{p})$ positiv ist.
Analoge Überlegungen führen dazu, dass $a_t^* > a^*$, d.h. es ist optimal einen Teil der zur Erfüllung des Future-Vertrages benötigten Ware am Spotmarkt zu kaufen.

Bemerkungen

1. Die Möglichkeit des zukünftigen Marktes erhöht den erwarteten Nutzen des Entscheidungsträgers.
   (Ohne zukünftigen Markt ist $a_t = 0$ und man hat das urspruüngliche Problem der optimalen Wahl von a. Bei einem zukünftigen Markt hat der Entscheidungsträger weiterhin die Möglichkeit, $a_t = 0$ zu wählen, die er auch ergriffe, wenn der zukünftige Markt seinen erwarteten Nutzen nicht erhöhte.)
2. Eine Erhöhung der Fixkosten hat keinen Einfluss auf die optimale Wahl von a. Unter Annahme fallender Risikoaversion wird jedoch steigende Fixkosten zu einem Fallen von $|a^* - a_t^*|$ führen.

Nachfrage-Risiko (”Newsboy problem”)

Annahme: Verkaufspreis ist festgesetzt (z.B. von Regierung, Zwischenhändler, oder Produzenten festgelegt)

$$\begin{array}{rcl} p & \cdots & \text{Verkaufspreis} \\ c & \cdots & \text{Einheitskosten } (p > c) \\ \tilde{d} & \cdots & \text{Nachfrage (zufällig)} \\ f(d) & \cdots & \text{Dichte der Zufallsvariablen } \tilde{d} \\ a & \cdots & \text{Produktionsrate (Entscheidungsvariable)} \end{array}$$

Es können nun folgende Fälle auftreten:

$d > a$, d.h. es stellt sich heraus, dass die tatsächliche Nachfrage größer als die angebotene Menge ist.
Für den Profit erhält man

$$\pi = (p - c)a - c_0(d - a) - B$$

wobei c_0 die Einheitskosten der nicht-erfüllten Nachfrage bezeichnet. (z.B. Strafzahlungen, Imageverlust, etc.)

$d < a$, d.h. die tatsächliche Nachfrage ist geringer als das Angebot, und $a - d$ Stücke können nicht verkauft werden. Diese unverkauften Stücke können

- ∗ pro Stück den Gewinn p_0 bringen, $(0 < p_0 < p)$, wenn z.B. der Produzent nicht verkaufte Stücke zum Preis p_0 zurücknimmt,
- ∗ oder Kosten p_0 (z.B. für Entsorgung) verursachen, wobei $p_0 < 0$.

$$\Rightarrow \pi = pd - ca + p_0(a - d) - B$$

Zusammenfassen also

$$\pi = \begin{cases} (p_0 - c)a + (p - p_0)d - B & \text{falls} \quad d \leq a \\ (p - c + c_0)a - c_0 d - B & \text{falls} \quad d > a \end{cases}$$

Im folgenden nehmen wir $p_0 < c$ an, da sonst durch entsprechend große Wahl von a der Profit beliebig groß gemacht werden kann.

Es soll nun der erwartete Profit maximiert werden. Für den erwarteten Profit erhält man

$$\mathrm{E}(\pi) = \int_0^a [(p_0 - c)a + (p - p_0)d - B]f(d)\mathrm{d}d + \int_a^\infty [(p - c + c_0)a - c_0 d - B]f(d)\mathrm{d}d$$

Ableiten des ersten Integrals nach a liefert:

$$[(p_0 - c)a + (p - p_0)a - B]f(a) + \int_0^a (p_0 - c)f(d)\mathrm{d}d$$

Ableiten des zweiten Integrals ergibt:

$$-[(p - c + c_0)a - c_0 a - B]f(a) + \int_a^\infty (p - c + c_0)f(d)\mathrm{d}d$$

Nach entsprechendem Kürzen erhält man als Ableitung des erwarteten Profits nach a:

$$\frac{\partial \mathrm{E}(\pi)}{\partial a} = (p_0 - c)F(a) + (p - c + c_0)(1 - F(a))$$

Als Bedingung erster Ordnung ergibt Nullsetzen und Umformen:

$$\frac{F(a)}{1 - F(a)} = \frac{p - c + c_0}{c - p_0} \tag{5}$$

Die linke Seite von (5) ist monoton wachsend und es gilt

$$\frac{F(0)}{1 - F(0)} = 0, \quad \lim_{a \to \infty} \frac{F(a)}{1 - F(a)} = \infty$$

deshalb hat die Gleichung (5) eine eindeutige Lösung a^*.

Weiters gilt:

$$\begin{array}{rcccl} p \text{ oder } c_0 \text{ wächst} & \Rightarrow & \text{RHS von } (*) \text{ wächst} & \Rightarrow & a^* \text{ wächst} \\ p_0 \text{ wächst} & \Rightarrow & \text{RHS von } (*) \text{ wächst} & \Rightarrow & a^* \text{ wächst} \\ c \text{ steigt} & \Rightarrow & \text{RHS von } (*) \text{ fällt} & \Rightarrow & a^* \text{ fällt} \end{array}$$

Falls nun eine andere Nachfrage $\tilde{d}_1$ mit Verteilungsfunktion F_1 die Nachfrage $\tilde{d}$ im Sinn der stochastischen Dominanz 1. Ordnung dominiert, i.e. falls $F_1(a) \leq F(a)$, so ist auch

$$\frac{F_1(a)}{1 - F_1(a)} \leq \frac{F(a)}{1 - F(a)}$$

und damit $a_1^* \geq a^*$.

Wert der Information (Flexibilität)

Bsp: Betrachten das *newsboy problem* mit den Parameterwerten:

$$p = 25, \quad c = 15, \quad c_0 = 4, \quad p_0 = 1, \quad B = 0$$

Die zufällige Nachfrage ist gleichverteilt am Intervall $[0, 100]$

Für die Verteilungsfunktion gilt daher

$$F(d) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad d \leq 0 \\ d/100 & \text{für} \quad 0 < d \leq 100 \\ 1 & \text{für} \quad 100 < d \end{cases}$$

Gleichung (5) ergibt daher

$$\frac{a/100}{1 - a/100} = \frac{p - c + c_0}{c - p0} = \frac{14}{14} = 1$$

und daher als optimale Lösung $a^* = 50$.

Für den maximierten erwarteten Profit ergibt sich

$$\mathrm{E}[\tilde{\pi}] = \int_0^{50} (-14 \times 50 + 24d) \frac{1}{100} \mathrm{d}d + \int_{50}^{100} (14 \times 50 - 4d) \frac{1}{100} \mathrm{d}d = 150$$

Angenommen, der newsboy kann die Anzahl der Zeitungen bestellen, **nachdem** die zufällige Nachfrage bekannt wurde. Er wird dann natürlich $a^* = d$ wählen, der Profit für jede Realisierung von $\tilde{d}$ ist dann $(p-c)d = 10d$.

Der erwartete Nutzen unter perfekter Information ist daher

$$\int_0^{100} 10d \frac{1}{100} \mathrm{d}d = 500$$

Als Wert der perfekten Information ergibt sich also 500 - 150 = 350.

Angenommen, der newsboy bekommt nur die Information *die Nachfrage wird stark sein* $(d > 50)$ bzw. *die Nachfrage wird schwach sein* $(d < 50)$. Wie hoch ist der Wert dieser Information?

Unter der Information, dass die Nachfrage stark ist, ist nun $\tilde{d}$ gleichverteilt auf dem Intervall $[50, 100]$. Als Verteilungsfunktion erhält man

$$F(d) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad d \leq 50 \\ (d-50)/50 & \text{für} \quad 50 < d \leq 100 \\ 1 & \text{für} \quad 100 < d \end{cases}$$

Gleichung (5) ergibt daher

$$\frac{(a-50)/50}{1-(a-50)/50} = \frac{p-c+c_0}{c-p0} = \frac{14}{14} = 1$$

und daher als optimale Lösung $a^+ = 75$.

Der erwartete Profit ergibt sich zu

$$\mathrm{E}[\tilde{\pi}|d^+] = \int_{50}^{75} (-14 \times 75 + 24d) \frac{1}{50} \mathrm{d}d + \int_{75}^{100} (14 \times 75 - 4d) \frac{1}{50} \mathrm{d}d = 575$$

Analog erhält man bei Information, dass der Bedarf < 50 ist, eine optimale Bestellmenge $a^- = 25$ mit einem erwarteten Profit von $E[\tilde{\pi}|d^-] = 75$.

Da die Informationen *starke Nachfrage* bzw. *schwache Nachfrage* jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.5 auftreten, ergibt sich als erwarteter Profit unter imperfekter Information

$$0.5E[\tilde{\pi}|d^+] + 0.5E[\tilde{\pi}|d^-] = 0.5(575 + 75) = 325.$$

	erwarteter Profit
keine Information	150
partiale Information	325
perfekte Information	500

Technologisches Risiko

1. **additives Risiko**

   Das Endvermögen ist durch

   $$\tilde{w}_f = w_0 + p(a + \tilde{\epsilon}) - c(a) - B$$

   gegeben.

Die optimale Produktionsrate soll wieder den erwarteten Nutzen

$$\mathrm{E}[U(\tilde{w}_f)] = \int_{-\infty}^{\infty} U[w_0 + p(a+\epsilon) - c(a) - B] f(\epsilon) d\epsilon$$

maximieren.

Als Bedingung erster Ordnung ergibt sich

$$\frac{\mathrm{dE}[U(\tilde{w}_f)]}{\mathrm{d}a} = \int_{-\infty}^{\infty} U'(w_f)[p - c'(a)] f(\epsilon) d\epsilon = 0$$

Da sowohl der Preis als auch $c'(a)$ nicht-zufällig sind, kann man diesen Term aus dem Integral herausziehen und erhält die optimale Produktion a^* als Lösung von

$$p - c'(a) = 0$$

$\Rightarrow$ additives technologisches Risiko hat keinen Einfluss auf die Wahl von a. Die optimale Wahl von a erfolgt derart, dass der Stückpreis den Grenzkosten entspricht.

2. **multiplikatives Risiko**

   Für das Endvermögen gilt:

$$\tilde{w}_f = w_0 + p(a(1+\tilde{\epsilon})) - c(a) - B = w_0 + \underbrace{p(1+\tilde{\epsilon})}_{=\tilde{p}} a - c(a) - B$$

   Dies entspricht genau dem Problem mit Preisunsicherheit, wenn man $\tilde{p} = p(1+\tilde{\epsilon})$ setzt.