IX. Das Standardmodell der Teilchenphysik

1) Einleitung

Eichtheorie mit Eichgruppe $G = \underset{\uparrow \text{ starke Ww}}{SU(3)} \times \underbrace{SU(2) \times U(1)}_{\text{elektroschw. Ww.}}$

Betrachten hier nur elektroschw. Ww. mit $G_{ew} = SU(2) \times U(1)$

Glashow – Weinberg – Salam

Fermionische Multipletts chiral:

SU(2)-Dubletts linkshändig,
SU(2)-Singletts rechtshändig

Die mit U(1) verbundene Ladung heißt (schwache) Hyperladung Y

$$G_{ew} = SU(2)_L \times U(1)_Y, \quad G = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

$$\bar{\Psi}_L \Psi_L = \bar{\Psi}_R \Psi_R \equiv 0, \quad \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_R = \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_L \equiv 0$$

Beweis: $\bar{\Psi}_L \Psi_L = (P_L \Psi_L)^\dagger \gamma_0 \Psi_L = \Psi_L^\dagger P_L \gamma_0 \Psi_L =$

$= \Psi_L^\dagger \gamma_0 P_R \Psi_L = \bar{\Psi}_L \underbrace{P_R \Psi_L}_{0} = 0$, etc. $\square$ %

2) Multipletts und Lagrangefunktion

a) Multipletts

Eichfelder: $G_{ew} = SU(2) \times U(1)$

$$W_\mu^a \qquad B_\mu$$

$a = 1, 2, 3$

Fermionmultipletts: $q_{Lj} \quad u_{Rj} \quad d_{Rj}$ Quarks

Drei Familien $\to j = 1, 2, 3$

$l_{Lj} \quad \nu_{Rj} \quad e_{Rj}$ Leptonen

Higgsdublett: ϕ skalares Feld

γ) SSB im SM:

$G = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$

$SU(N)$: N^2-1 Generatoren

$SU(3)_c$: 8 Generatoren, ungebrochen $\Rightarrow$
8 masselose Vektorboson (Gluonen)
Confinement der Colour: keine freien Gluonen (und Quarks)

$$\underbrace{SU(2)_L \times U(1)_Y}_{\substack{3 \;\; + 1 \;= 4 \\ \#\text{ Generatoren}}} \xrightarrow{SSB} \underbrace{U(1)_{em}}_{\text{ein Generator}}$$

$\Rightarrow$ 3 massive Vektorbosonen: $W^\pm$, Z^0
1 masseloses Vektorboson: γ (Photon)

b) Eichtransformation

SU(2): $U \in SU(2)$, ψ steht für Fermionmultipletts

$\psi \to U\psi$ für Dubletts, $\psi \to \psi$ für Singletts

$\phi \to U\phi$

$\vec{W}_\mu \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \to U \vec{W}_\mu \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}$

$B_\mu \to B_\mu$

U(1): $\psi \to e^{-i\alpha Y_\psi/2} \psi$

$\phi \to e^{-i\alpha Y_\phi/2} \phi$

$\vec{W}_\mu \to \vec{W}_\mu$

$B_\mu \to B_\mu + \frac{1}{g'} \partial_\mu \alpha$

Def. $\tilde{\phi} = \underbrace{i\tau_2}_{} \phi^* \Rightarrow \tilde{\phi} \to U \tilde{\phi}$ wegen $\varepsilon U^* = U \varepsilon$

$i\tau_2 = \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{\phi} \to e^{i\alpha Y_\phi/2} \tilde{\phi}$

c) Lagrangefunktion des SMs

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ew} + \mathcal{L}_{QCD}$

$\mathcal{L}_{ew} = \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_B + \sum_\psi \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{Yuk} - V$

Eichfelder:

$$\boxed{\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^{3} F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu} \quad \text{mit } F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - g\, \varepsilon_{abc} W^b_\mu W^c_\nu}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F^{(B)}_{\mu\nu} F^{(B)\,\mu\nu} \quad \text{mit } F^{(B)}_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu}$$

Kinetischer Term und Eichww der Fermionen:

$$\boxed{\mathcal{L}_\psi = i\,\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi \quad \text{mit} \quad D_\mu = \partial_\mu + i g \vec{T}\cdot\vec{W}_\mu + i g' \tfrac{1}{2} Y B_\mu}$$

$$\boxed{\vec{T} = \begin{cases} \frac{\vec{\tau}}{2} & \text{Dubletts} \\ 0 & \text{Singletts} \end{cases}}$$

Kinetischer Term und Eichww des skalaren Dubletts:

$$\boxed{\mathcal{L}_\phi = (D_\mu\phi)^\dagger (D^\mu \phi)}$$

Yukawa-Kopplungen:

$$\boxed{\begin{aligned} -\mathcal{L}_{Yuk} = \; & \bar{q}_{Li}\,\phi\, d_{Rj}\,\Gamma^{(q)}_{ij} + \bar{q}_{Li}\,\tilde{\phi}\, u_{Rj}\,\Delta^{(q)}_{ij} + \\ & \bar{\ell}_{Li}\,\phi\, e_{Rj}\,\Gamma^{(\ell)}_{ij} + \bar{\ell}_{Li}\,\tilde{\phi}\, \nu_{Rj}\,\Delta^{(\ell)}_{ij} + \text{H.c.} \end{aligned}}$$

Hyperladungen müssen noch festgelegt werden!

Skalares Potential: $\boxed{V = \mu^2 \phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2}$

Bem.: Keine Massenterme erlaubt außer für ϕ!
Ursprünglich im SM keine ν_R $\Rightarrow m_\nu = 0$

3) SSB und $U(1)_{em}$

$\mu^2 < 0$, Eichinvarianz $\Rightarrow$ o.B.d.A.

$$\boxed{\text{VEV von } \phi \equiv \langle\phi\rangle_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{mit } v>0}$$

Mit $Y_\phi = 1$ können alle Y_ψ so gewählt werden, dass gewünschte elektrische Ladungen den Fermionen und Vektorbosonen zugeordnet werden können.

Welche Eichtrafo lässt VEV invariant?

$$e^{-i\beta\left(\frac{\tau_3}{2}+\frac{1}{2}1_2\right)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{wegen} \quad \frac{\tau_3}{2}+\frac{1}{2}1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$\beta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{U(1)_{em} \text{ erhalten} \Rightarrow \text{Generator } Q = T_3+\frac{1}{2}Y}$$

$$Q(\phi)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \phi=\begin{pmatrix}\phi^+\\\phi^0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{G_{ew} \xrightarrow{SSB} U(1)_{em}}$$

Singletts: $T_3=0 \Rightarrow \frac{1}{2}Y_\psi = Q_\psi$

$$\boxed{\frac{1}{2}Y_{u_R}=\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}Y_{d_R}=-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}Y_{\nu_R}=0,\ \frac{1}{2}Y_{e_R}=-1}$$

$\mathcal{L}_{Yuk}$: $\bar{q}_L\phi d_R \Rightarrow -Y_{q_L}+Y_\phi+Y_{d_R}=0 \Rightarrow Y_{q_L}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Probe: $\bar{q}_L\tilde{\phi}u_R$

$-\frac{1}{3}-1+\frac{4}{3}=0$ ✓

$$\boxed{Y_{q_L}=\frac{1}{3},\ Y_{\ell_L}=-1} \Rightarrow q_L=\begin{pmatrix}u_L\\d_L\end{pmatrix},\ \ell_L=\begin{pmatrix}\nu_L\\e_L\end{pmatrix}$$

$$Q(q_L)=\frac{\tau_3}{2}+\frac{1}{6}1_2=\begin{pmatrix}2/3&0\\0&-1/3\end{pmatrix}$$

$$Q(\ell_L)=\frac{\tau_3}{2}-\frac{1}{2}1_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

4) Vektorbosonmassen

Ladungen der Eichbosonen:

B_μ koppelt nicht an Eichbosonen $\Rightarrow Y_B = 0$

B_μ SU(2)-Singlett $\Rightarrow Q_B = 0$

$\vec{W}_\mu$ in adjung. Darstellung der SU(2): $Y_W = 0$

$$T_3 = (-i\varepsilon_{3ab}) = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_W$$

$\vec{e}_3, \vec{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von Q_W

$$\vec{W} = W^3\vec{e}_3 + W^+\vec{e}_+ + W^-\vec{e}_- \ , \ W_\pm = \vec{e}_\pm^{\,\dagger}\vec{W}$$

$$\boxed{W^+ = \frac{W^1 - iW^2}{\sqrt{2}} \ , \ W^- = \frac{W^1 + iW^2}{\sqrt{2}}}$$

Massen der Eichboson: Higgs-Mechanismus

$$D_\mu\phi = \left(\partial_\mu + ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}_\mu + ig'\frac{1}{2}B_\mu\right)\phi$$

$$\frac{1}{2}(\tau^1W^1 + \tau^2W^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & W^+ \\ W^- & 0 \end{pmatrix}$$

Massen von VEV $\Rightarrow$

$$D_\mu\langle\phi\rangle_0 = \frac{iv}{\sqrt{2}}\left\{\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(-gW_\mu^3 + g'B_\mu)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Eichbosonmassenterm $= (D_\mu\langle\phi\rangle_0)^\dagger(D^\mu\langle\phi\rangle_0) =$

$$= \frac{g^2v^2}{4}W_\mu^+W^{-\mu} + \frac{v^2}{8}(-gW_\mu^3 + g'B_\mu)(-gW^{3\mu} + g'B^\mu)$$

Weinbergwinkel ≡ schw. Mischungswinkel:

$$\boxed{\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}\,,\quad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}}$$

$$\frac{v^2}{8}\left(-g W^3 + g' B\right)^2 = \frac{(g^2+g'^2)v^2}{8}\left(-c_W W^3 + s_W B\right)^2$$

Physikalische Vektorbosonen Z (Z^0-Feld), A (Photonfeld):

$$\boxed{\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^3 \\ B \end{pmatrix} \qquad m_A^2 = 0}$$

$$\boxed{\text{Eichbosonmassenterm} = m_W^2\, W^+_\mu W^{-\mu} + \frac{1}{2} m_Z^2\, Z_\mu Z^\mu}$$

$$\boxed{\frac{m_W}{m_Z} = \cos\theta_W} \qquad \boxed{m_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4}\,,\quad m_Z^2 = \frac{(g^2+g'^2)v^2}{4}}$$

5) Allgemeine kovariante Ableitung mit physikalischen Vektorbosonen

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{\sqrt{2}}\left(T_+ W^+_\mu + T_- W^-_\mu\right) + ig\, T_3 W^3_\mu + ig' \frac{1}{2} Y B_\mu$$

$$T_\pm = T_1 \pm i T_2 = \begin{cases} 0 & \text{für Singletts} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{für Dubletts} \end{cases}$$

$$g T_3 W^3 + g' \tfrac{1}{2} Y B = g T_3 (c_W Z + s_W A) + g' \tfrac{1}{2} Y (-s_W Z + c_W A)$$

$$= \left(g T_3 c_W - g' \tfrac{1}{2} Y s_W\right) Z + \left(g T_3 s_W + g' \tfrac{1}{2} Y c_W\right) A =$$

$g s_W = g' c_W$

$$= \left[g T_3 c_W - g' (Q - T_3) s_W\right] Z + g s_W Q A$$

$\boxed{g s_W = e}$ $\qquad g, g' \longleftrightarrow e, \theta_W \qquad$ $\boxed{g = \frac{e}{s_W}, \; g' = \frac{e}{c_W}}$

$$g' s_W = \frac{g s_W^2}{c_W}, \quad g c_W + g' s_W = g c_W + g \frac{s_W^2}{c_W} = \frac{g}{c_W}$$

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{\sqrt{2}} \left(T_+ W_\mu^+ + T_- W_\mu^-\right) + \frac{ig}{c_W} \left(T_3 - s_W^2 Q\right) Z_\mu + ie Q A_\mu}$$

geladener Strom $\qquad$ neutraler Strom $\qquad$ em. Ww.

z.B. $\nu_\mu + p \to \nu_\mu + p$

Streuexperimente $\to \theta_W$; μ-Zerfall $\longrightarrow m_W \Rightarrow m_Z$-Vorhersage

1983 am CERN $W^\pm, Z^0$ nachgewiesen

6) Fermionmassen

$$\boxed{-\mathcal{L}_{Yuk} \xrightarrow{VEV} \bar{d}_L M_d d_R + \bar{u}_L M_u u_R + \bar{e}_L M_e e_R + \bar{\nu}_L M_\nu \nu_R + \text{H.c.}}$$

$$\phi \longrightarrow \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\phi} \longrightarrow \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_d = \frac{v}{\sqrt{2}} \Gamma^{(q)}, \; M_u = \frac{v}{\sqrt{2}} \Delta^{(q)}, \; M_e = \frac{v}{\sqrt{2}} \Gamma^{(\ell)}, \; M_\nu = \frac{v}{\sqrt{2}} \Delta^{(\ell)}}$$

Theorem: M beliebige komplexe $n\times n$-Matrix

$\Rightarrow \exists$ unitäre $n\times n$-Matrizen U_L, U_R, so dass

$$U_L^\dagger M U_R = \hat{M} \text{ diagonal und positiv}$$

Anwendung: phys. Felder d'_L, d'_R
(Masseneigenfelder)

$$d_{\substack{L\\R}} = U^d_{\substack{L\\R}} d'_{\substack{L\\R}}$$

$$\bar{d}_L M_d d_R + \bar{d}_R M_d^\dagger d_L = \bar{d}'_L \hat{m}_d d'_R + \bar{d}'_R \hat{m}_d d'_L =$$

$$= \overline{(d'_L + d'_R)}\, \hat{m}_d\, (d'_L + d'_R) = \bar{d}' \hat{m}_d d' = m_d \bar{d} d + m_s \bar{s} s + m_b \bar{b} b$$

$$d' = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \text{ phys. Quarkfelder (Dirac-Felder!)}$$

Bem.: Fundamentale fermionische Bausteine des SMs chirale Felder, L und R in verschiedenen Multipletts!
Am Ende trotzdem normale Diracfelder!

Neutrinos: haben Dirac-Natur angenommen, weil $Y_{\nu_R}=0$ könnte man auch Majorana-Massenterm basteln.

$\mathcal{L}_{Yuk} \rightarrow$ Massen an Fermionen

7) Der geladene Strom

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\psi} \bar{\psi} \gamma^{\mu} (T_+ W_\mu^+ + T_- W_\mu^-) \psi$$

Singletts tragen nicht bei, nur $q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$, $\ell_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[\left(\bar{u}_L \gamma^{\mu} d_L + \bar{\nu}_L \gamma^{\mu} e_L \right) W_\mu^+ + \text{H.c.} \right]$$

Übergang zu phys. Feldern:

$$u_L = U_L^u u_L' \ , \quad d_L = U_L^d d_L' \ , \quad \nu_L = U_L^\nu \nu_L' \ , \quad e_L = U_L^e e_L'$$

$$V_{CKM} = U_L^{u\dagger} U_L^d \ , \quad V_{PMNS} = U_L^{e\dagger} U_L^\nu$$

Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata

$$\boxed{\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\left(\bar{u}' \gamma^{\mu} (1-\gamma_5) V_{CKM} d' + \bar{\nu}' \gamma^{\mu} (1-\gamma_5) V_{PMNS}^{\dagger} e' \right) W_\mu^+ + \text{H.c.} \right]}$$

V-A - Strom

Bem. zu ν-Massen:
ursprünglich keine Felder ν_{R_j} im SM $\Rightarrow$

a) ν-Massen $= 0$

b) $V_{PMNS} \longrightarrow 1$

durch Wahl $U_L^\nu = U_L^e$

8) Das Higgsboson und seine WW.

$$\phi(x) = e^{i\vec{\beta}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+h(x)\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Eichung}]{\text{unitäre}} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+h(x)\end{pmatrix}$$

Parameterisierung
von $\phi(x)$ durch
4 reelle Funktionen

$$\boxed{\text{Ein phys. neutraler Skalar im SM} = \text{Higgsboson}}$$

$$D_\mu\phi \to \frac{1}{\sqrt{2}} D_\mu \begin{pmatrix}0\\ v+h\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\partial_\mu h\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(v+h) - \frac{ig}{2c_W} Z_\mu \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(v+h)\right\}$$

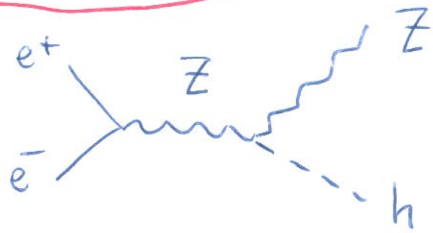
$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) \to$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{hV} = \frac{1}{2}\partial_\mu h\,\partial^\mu h + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}\left(1+\frac{h}{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu\left(1+\frac{h}{v}\right)^2}$$

$$\boxed{V_h = \frac{1}{2}m_h^2 h^2\left(1+\frac{h}{2v}\right)^2, \quad m_h^2 = 2\lambda v^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{Yuk}^h = -\sum_f m_f \bar{f} f\left(1+\frac{h}{v}\right)}$$

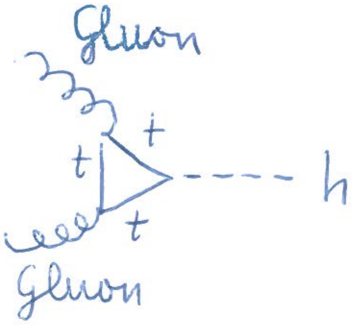
e^+e^-- Collider:



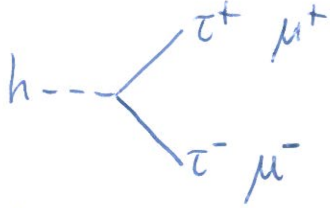
$m_h = 125\,\text{GeV}$

LHC (pp-Collider):

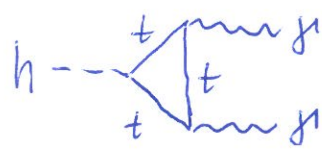
Gluonfusion



Zerfall



$h \to \gamma\gamma$



9) QCD

λ^a, $a = 1, \dots, 8$ Gell-Mann-Matrizen → wirken auf
Generatoren der $SU(3)_c$ Colour-Indizes

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{\psi = q_L, u_R, d_R} i \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i g_s \frac{\lambda^a}{2} G^a_\mu \right) \psi - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu} G^{a\,\mu\nu}$$

$$\sum_{\psi = q_L, u_R, d_R} = \sum_{q = u, \dots, t} \leftarrow \text{phys. Felder}$$

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g_s f_{abc} G^b_\mu G^c_\nu$$

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}, \quad f_{abc} \text{ total antisymmetrisch}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\lambda_a \lambda_b \right) = 2 \delta_{ab}$$

$$\lambda_{1,2,3} = \begin{pmatrix} \tau_{1,2,3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Quarks bez. Colour in 3-dim. irred.
Darstellung $\underline{3}$ der $SU(3)$, $\underline{3}^* \not\simeq \underline{3}$