# VIII. Eichtheorien

## 1) Abelsche Eichtheorien

Abelsche Gruppe $U(1) = \{e^{i\alpha} / \alpha \in \mathbb{R}\}$

Betrachten Kopplung eines Fermionfeldes und eines komplexen Skalarfeldes an em. Feld

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}[i\gamma^\mu D_\mu - m]\Psi + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(\phi)}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$V = m_\phi^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$$

Skalares Potential

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + iQe A_\mu)\Psi$$

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + iQ'e A_\mu)\phi$$

} kovariante Ableitung

$e > 0$ Elementarladung

$e^-$: $Q = -1$

$\mathcal{L}$ invariant unter $\Psi \to e^{i\bar{\alpha}}\Psi$, $\phi \to e^{i\bar{\beta}}\phi$

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ unabh. Phasen

Anf. $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ dürfen von $x$ abhängen $\Rightarrow$

Relation zw. $\bar{\alpha}(x), \bar{\beta}(x)$, $A_\mu(x)$ muss ebenfalls transformiert werden

$\longrightarrow$ Eichtransformation: Invarianz von $\mathcal{L}$ unter

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi(x) &\to e^{-iQ\alpha(x)}\Psi(x) \\ \phi(x) &\to e^{-iQ'\alpha(x)}\phi(x) \\ A_\mu(x) &\to A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}}$$

Transformation der kovarianten Ableitung:

$$D_\mu \Psi \to \left[ \partial_\mu + iQe\left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha\right)\right]\left(e^{-iQ\alpha}\Psi\right) =$$

$$= \partial_\mu\left(e^{-iQ\alpha}\Psi\right) + \left(iQeA_\mu + iQ\,\partial_\mu\alpha\right)e^{-iQ\alpha}\Psi$$

$$= e^{-iQ\alpha}\left(\cancel{-iQ(\partial_\mu\alpha)\Psi} + \underline{\underline{\partial_\mu\Psi}}\right) + e^{-iQ\alpha}\left(\underline{\underline{iQeA_\mu}} + \cancel{iQ\partial_\mu\alpha}\right)\Psi$$

$$\boxed{\begin{aligned} D_\mu\Psi &\to e^{-iQ\alpha} D_\mu\Psi \\ D_\mu\phi &\to e^{-iQ'\alpha} D_\mu\phi \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ Invarianz von $\mathcal{L}$ unter Eichtransformation

Eichfreiheit: verbietet Massenterm $\frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu$, reduziert Anzahl der Freiheitsgrade um eins

$\to$ man kann zeigen: em. Feld (Eichfeld) transversal polarisiert

Dimensionsbetrachtung: $\hbar = c = 1$

$\Rightarrow$ alle Größen haben Einheiten, die Potenzen einer Energie sind

$\dim(m) = 1, \ \dim(x) = -1$

Dim. der Wirkung ist 0! $\Rightarrow \dim \mathcal{L} = 4$

$$\boxed{\dim(A) = 1, \ \dim(\phi) = 1, \ \dim(\Psi) = \frac{3}{2}}$$

$\Rightarrow \underline{\dim(\lambda) = 0}, \ \underline{\dim(e) = 0}$

Man kann zeigen: konsistente QFT enthält alle mit Eichsymmetrie verträglichen Terme, welche Polynome in den Feldern mit Dim $\leq 4$ sind.

## 2) Nichtabelsche Eichtheorien

Am Beispiel der Eichgruppe SU(2)

$$T_a \equiv \frac{\tau_a}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

$a = 1,2,3$ (Paulimatrizen $\tau_a$)

Ansatz Ww. Fermionfeld mit Eichfeldern:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \qquad i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig\,T_a A^a_\mu)\psi$$

$g$ = Eichkopplungskonstante

pro Generator $T_a$ der Eichgruppe ein Eichfeld

Eichtransformation: $\boxed{\psi(x) \to U(x)\psi(x) \quad U(x) \in SU(2)}$

Wie transformieren sich Eichfelder?

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + igA_\mu)\psi \longrightarrow (\partial_\mu + igA'_\mu)(U\psi) =$$

$A_\mu \equiv T_a A^a_\mu$

$$= U\partial_\mu\psi + (\partial_\mu U)\psi + igA'_\mu U\psi =$$

$$= U\left[\partial_\mu + ig\left(U^{-1}A'_\mu U - \frac{i}{g}U^{-1}\partial_\mu U\right)\right]\psi$$

$$\boxed{D_\mu\psi \to U(D_\mu\psi) \Rightarrow \text{Ww. eichinvariant}}$$

$$\Rightarrow \quad U^{-1}A'_\mu U - \frac{i}{g}U^{-1}\partial_\mu U = A_\mu \quad \text{bzw.}$$

$$\boxed{A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}}$$

$A'_\mu$ muss sich schreiben lassen als

$$A'_\mu = T_a A'^a_\mu \qquad (*)$$ Beweis S. VIII. 4a

Kann für SU(2) explizit nachgerechnet werden, gilt allgemein für alle Lie-Gruppen

Infinitesimale Eichtransformation: $\vec{\alpha}$ „klein"

$$U(x) = e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}} = 1 - i\vec{\alpha}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}$$

$$A'_\mu = T_a A'^a_\mu \rightarrow (1 - i\vec{\alpha}\cdot\vec{T})\,\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu(1 + i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}) + \frac{i}{g}\left[\partial_\mu(1 - i\vec{\alpha}\cdot\vec{T})\right](1 + i\vec{\alpha}\cdot\vec{T})$$

$$= \vec{T}\cdot\vec{A}_\mu - i\left[\vec{\alpha}\cdot\vec{T}, \vec{T}\cdot\vec{A}_\mu\right] + \frac{1}{g}(\partial_\mu\vec{\alpha})\cdot\vec{T} =$$

$$= T_a A^a_\mu + T_a \varepsilon_{abc}\alpha^b A^c_\mu + T_a \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a$$

$$\boxed{A'^a_\mu = A^a_\mu + \varepsilon_{abc}\alpha^b A^c_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a}$$

Feldstärketensor:

$$\boxed{\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} T_a \equiv F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \\ \Rightarrow F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g\,\varepsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \end{aligned}}$$

Man kann nachrechnen:

Eichtransformation: $\boxed{F_{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu} U^{-1}}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}}$$ eichinvariant

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U) U^{-1}$$

Allgemeine Eichtheorie:

Generatoren $T_a = T_a^\dagger$, $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$

$f_{abc}$ total antisymm. in $a, b, c$

Man kann zeigen: $(t_a)_{bc} \equiv -i f_{abc}$

$\Rightarrow [t_a, t_b] = i f_{abc} t_c$ adjungierte Darst.

$$U(x) = e^{-i\alpha_a(x) T_a}$$

Erster Term:

$$U A_\mu U^{-1} = e^{-i\alpha_b T_b} A_\mu^a T_a e^{i\alpha_c T_c} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} [\alpha\cdot T, [\alpha\cdot T, \ldots [\alpha\cdot T, A_\mu^a T_a] \ldots]]$$

$$[\alpha_b T_b, A_\mu^a T_a] = \alpha_b A_\mu^a \, i f_{bac} T_c =$$

$$= \alpha_b (-i f_{bca} A_\mu^a) T_c = T_c (\alpha_b t_b)_{ca} A_\mu^a$$

$$\Rightarrow \boxed{U A_\mu U^{-1} = T_c \left(e^{-i\alpha_b t_b}\right)_{ca} A_\mu^a}$$

$\begin{pmatrix} A_\mu^1 \\ \vdots \\ A_\mu^{n_G} \end{pmatrix}$ transformiert nach adjungierter Darstellung

$n_G$ = # Generatoren

Zweiter Term:

$e(\mu)$ Einheitsvektor in $\mu$-Richtung

$$U(x+t\,e(\mu))\,U(x)^{-1} = e^{-i\alpha_a(x+t\,e(\mu))}\,e^{i\alpha_b(x)T_b} =$$

$$= e^{-i\beta_{a\mu}(x,t)\,T_a} \qquad \text{Lie-Gruppe!}$$

$$(\partial_\mu U)U^{-1} = \frac{d}{dt}\,U(x+t(\mu))\,U(x)^{-1}\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\left(\beta_{a\mu}(x,t)\,T_a\right)^n\Big|_{t=0}$$

$$\beta_{a\mu}(x,0)=0 \Rightarrow (\partial_\mu U)U^{-1} = -i\,\frac{\partial\beta_{a\mu}}{\partial t}\Big|_{t=0} T_a$$

$$\frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} = \frac{1}{g}\,\frac{\partial\beta_{a\mu}}{\partial t}\Big|_{t=0} T_a$$

$$\Rightarrow A'^{a}_{\mu} = \left(e^{-i\alpha_b t_b}\right)_{ac} A^c_\mu + \frac{1}{g}\,\frac{\partial\beta_{a\mu}}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

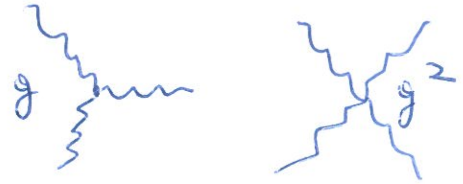
$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi}$$

Bemerkungen:

1) Eichfreiheit: verbietet Massenterm der Eichfelder, reduziert Anzahl der Freiheitsgrade um 3 = Anzahl der Generatoren

2) Selbstww. der Eichfelder: Folge der Eichinvarianz unter nichtabelscher Eichgr.

$-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} \longrightarrow$




3) $SU(2)$-Invarianz $\Rightarrow$ $\Psi_1, \Psi_2$ haben dieselbe Masse

4) Ang. mehrere fermionische od. skalare Multipletts koppeln an Eichfelder $\Rightarrow$ alle haben gleiche Kopplungsstärke $g$!

Unterschied zu abelscher Eichtheorie:

Kopplungsstärke $Qg$, Phasentransf. $e^{-iQ\alpha(x)}$

$\Rightarrow$ $Q$ fällt in $A'_\mu$ heraus, daher beliebig

Nichtabelsch: $g \to Qg$, $\alpha \to Q\alpha$ $\Rightarrow$ $Q$ fällt in $\frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a$ heraus, aber nicht in $\varepsilon \alpha A$!

5) Die Eichfelder transformieren sich nach der „adjungierten" Darstellung der Eichgruppe:

Wenn $U$ von $x$ unabh. $\Rightarrow$

$$U T_a A^a_\mu U^{-1} = T_a R_{ab} A^b_\mu$$

$G = SU(2) \Rightarrow$ adj. Darst. entspricht $SO(3)$

# 3) Spontan gebrochene Eichtheorien: Higgs-Mechanismus

## a) Spontane Symmetriebrechung und Goldstone-Theorem

In 3a) keine Eichtheorie!

Spontane Symmetriebrechung von kont. Symmetrien

Festkörperphysik:

Ferromagnet: Grundzustand Spontane Magnetisierung $\rightarrow$ Brechung der Rotationsymmetrie, Existenz von Magnonen mit Dispersionsrelation $\lim_{k\to 0} \hbar\omega(k) = 0$

Kristall: spontane Brechung der Translationsinvarianz, Existenz von akustischen Phononen mit $\lim_{|\vec{k}|\to 0} \hbar\omega_j(\vec{k}) = 0$ ($j = 1,2,3 \rightarrow 3$ Dispersionszweige)

Ähnliche Effekte in Feldtheorie: Nambu, Goldstone

Beispiel skalares Feld mit Selbst-WW und Symmetrie $\phi \to e^{i\alpha}\phi \Rightarrow$ Symmetriegruppe $G = U(1)$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^* \partial^\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 \qquad (\lambda > 0)$$

$$\mathcal{H} = \ldots + \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$$

$\gamma$ frei!

$V = |V| e^{i\gamma}$

$\mu^2 > 0 \Rightarrow$ Minimum der Energie bei $\phi = 0$

$\mu^2 < 0 \Rightarrow$ Minimale Konfiguration bei $\phi = \frac{v}{\sqrt{2}} \neq 0$

SSB!

$v$ = Vakuumerwartungswert (VEV)

o.B.d.A. $v > 0$

$$f(v) = \frac{\mu^2 v^2}{2} + \frac{\lambda v^4}{4} \Rightarrow \text{Min. bei } \mu^2 + \lambda v^2 = 0$$

$$\boxed{v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Ansatz: $\phi = \frac{v + \varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}$, $\varphi_1, \varphi_2$ reell

$$\Rightarrow \phi^*\phi = \frac{1}{2}\left[(v+\varphi_1)^2 + \varphi_2^2\right] = \frac{1}{2}v^2 + v\varphi_1 + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

Entwicklung um $\phi = v/\sqrt{2}$:

$$V(\phi) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{irrelevant}}}{V_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Null, da Entwicklung um Min.}}}{V_i \varphi_i} + \underbrace{\frac{1}{2} V_{ij} \varphi_i \varphi_j}_{\text{Massenterm}} + \ldots$$

$$\frac{1}{2} V_{ij} \varphi_i \varphi_j = \frac{1}{2}\mu^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \lambda\left[v^2\varphi_1^2 + \frac{1}{2}v^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\mu^2 + 3\lambda v^2)\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{(\mu^2 + \lambda v^2)}_{0}\varphi_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\varphi_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1^2 = 2\lambda v^2, \; m_2^2 = 0}$$

U(1) spontan gebrochen durch Fixierung der Phase des VEVs $\Rightarrow$ ein masseloser Freiheitsgrad

Allgemein:

<u>Goldstone-Theorem:</u>

$\mathcal{L}$ invariant unter ~~spontaner~~ kontinuierlicher Gruppe $G$ mit $n_G$ Generatoren, Theorie spontan gebrochen zu Symmetriegruppe $H \subset G$, $H$ hat $n_H$ Generatoren

$\Rightarrow n_G - n_H$ masselose Freiheitsgrade

SSB: $\mathcal{L}$ invariant unter $G$, Grundzustand (in QFT Grundzust. $\equiv$ Vakuum) ist nicht invariant unter $G$

# Goldstone-Theorem für skalares Potential:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}$$ Vektor von skalaren Feldern $\phi_i$

O.B.d.A. $\phi$ reell

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - V(\phi)}$$

$\mathcal{L}$ invariant unter Lie-Gruppe $G$:

$U(\alpha) = e^{-i\alpha_a T_a}$, $\mathcal{L}(U\phi) = \mathcal{L}(\phi)$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n_G} \end{pmatrix}$$

$\phi$ reell $\Rightarrow$ $iT_a$ reell und antisymmetrisch

SSB in $V$: Minimum von $V(\phi)$ bei $\phi = v \neq 0$
$H$ Untergruppe von $G$, so dass $Uv = v \; \forall U \in H$
$H$ habe $n_H$ Generatoren $\Rightarrow$
$\mathcal{L}$ hat $n_G - n_H$ masselose Freiheitsgrade

Beweis: $V(U(\alpha)\phi) = V(\phi) \; \forall \alpha$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha_a} V(U(\alpha)\phi)\Big|_{\alpha=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi_j} \frac{\partial U(\alpha)_{jk}}{\partial \alpha_a}\bigg|_{\alpha=0} \phi_k = -i \frac{\partial V}{\partial \phi_j} (T_a)_{jk} \phi_k = 0 \quad \forall a, \forall \phi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} (T_a)_{jk} \phi_k + \frac{\partial V}{\partial \phi_j} (T_a)_{ji} = 0 \quad \forall a, \forall \phi$$

$$\phi = v \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi_j}\bigg|_{\phi=v} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\bigg|_{\phi=v} \equiv M^2_{ij}$$

$M^2$ = Massenmatrix der Felder $\phi_i' = \phi_i - v_i$

Taylor-Entwicklung von $V$ um $\phi = v$!

$\Rightarrow \quad M^2_{ij} (T_a v)_j = 0 \quad \forall a$, d.h. $\{T_a v\}$ Masseneigenzustände mit Masse $= 0$

Def.: Matrix $\underbrace{A = (T_1 v, \ldots, T_{n_G} v)}_{N \times n_G} : \mathbb{R}^{n_G} \to \underbrace{(\mathbb{C}^N)_{\mathbb{R}}}_{\text{aufgefasst als reeller Vektorraum}}$

$$\underbrace{\dim \ker A}_{\#\text{ Generatoren von } H = n_H} + \underbrace{\dim \operatorname{im} A}_{\#\text{ Goldstone-Bosonen}} = n_G \qquad \square$$

b) <u>Higgs-Mechanismus</u>

Beispiel: spontan gebrochene abelsche Eichtheorie

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(\phi)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + iQe A_\mu \,, \quad V(\phi) = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Eichtrafo: $\phi(x) \to e^{-iQ\alpha(x)} \phi(x)$, $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$

SSB: $\mu^2 < 0$, VEV $v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$

Ansatz: $$\phi(x) = e^{i\beta(x)} \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h(x))$$

Eichtrafo: $Q\alpha = \beta \Rightarrow \phi \to \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h)$ „unitäre Eichung"

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{Qe} \partial_\mu \beta = A'_\mu$$

$$(D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) = \frac{1}{2} [\partial_\mu h - iQe A'_\mu (v+h)] [\partial^\mu h + iQe A'^\mu (v+h)] =$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} Q^2 e^2 A'_\mu A'^\mu (v+h)^2$$

$\Rightarrow A'$ hat Masse$^2$ $\boxed{m_A^2 = Q^2 e^2 v^2}$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} \xrightarrow[\text{unitäre Eichung}]{SSB} \mathcal{L}' = &-\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A'_\mu A'^\mu \left(1 + \frac{h}{v}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m_h^2 h^2 \left(1 + \frac{h}{2v}\right)^2 - V_0 \end{aligned}}$$

$\boxed{m_h^2 = 2\lambda v^2}$ kein masseloser Skalar!

<u>Higgs-Mechanismus:</u> Eichgruppe $G \xrightarrow{SSB} H$

$\Rightarrow N - N_1$ massive Vektorbosonen (masselose skalare Freiheitsgrade ergeben long. Freiheitsgrad der massiven VBen)

Skalares Potential:

VIII.9

$$\mu^2 \phi^*\phi + \lambda (\phi^*\phi)^2 = \frac{\mu^2}{2}(v+h)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+h)^4 =$$

$$= \frac{\mu^2}{2}\left(v^2 + \cancel{2vh} + h^2\right) + \frac{\lambda}{4}\left(v^4 + \cancel{4v^3h} + 6v^2h^2 + 4vh^3 + h^4\right)$$

$$= V_0 + \frac{\mu^2}{2}h^2 + \frac{\lambda}{4}\left(6v^2h^2 + 4vh^3 + h^4\right) =$$

$$= V_0 + h^2\left(\frac{\mu^2}{2} + \frac{3\lambda v^2}{2} + \lambda v h + \frac{1}{4}\lambda h^4\right) =$$

$$\mu^2 = -\lambda v^2$$

$$= V_0 + \frac{h^2}{2}\left(2\lambda v^2 + 2\lambda v h + \frac{1}{2}\lambda h^2\right) =$$

$$= V_0 + \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\, h^2 \left(1 + \frac{h}{v} + \frac{1}{4}\left(\frac{h}{v}\right)^2\right) =$$

$$= V_0 + \frac{1}{2} m_h^2 h^2 \left(1 + \frac{h}{2v}\right)^2$$