VII. Die Dirac-Gleichung

Relativistische Gl. zur Beschreibung von Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$

1) $SL(2,\mathbb{C})$ und ihre kontragrediente Darstellung

$$D: \begin{array}{l} G \longrightarrow L(\mathbb{C}^n) \\ g \longrightarrow D(g) \end{array}$$

$D(g)^{-1T}$ kontragrediente Darst.

$SL(2,\mathbb{C})$: A, A^* nicht äquivalent, jedoch

A und A^{-1T} äquivalent

$\Rightarrow$ A^* zu $A^{-1\dagger}$ äquivalent

Beweis: $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = e^{-i(\vec{\alpha}-i\vec{u})\cdot\vec{\sigma}/2} \Rightarrow A^{-1T} = e^{i(\vec{\alpha}-i\vec{u})\cdot\frac{\vec{\sigma}^T}{2}}$$

$$\varepsilon^{-1}\vec{\sigma}^T\varepsilon = -\vec{\sigma} \Rightarrow \varepsilon^{-1}A^{-1T}\varepsilon = A \quad \square$$

$$\Rightarrow \varepsilon A^* \varepsilon^{-1} = A^{-1\dagger}$$

2) Die Majorana-Gleichung.

$$\boxed{i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi} - m\chi = 0}$$

$(\sigma^\mu) = (1, \vec{\sigma})$, $\bar{\chi} \equiv \varepsilon\chi^*$

$\bar{\chi} \longrightarrow A^{-1\dagger}\bar{\chi}$

Beweis:

$\bar{\chi} \to \varepsilon A^* \varepsilon^{-1} \varepsilon \chi^* = A^{-1\dagger}\bar{\chi}$ $\square$

Def. $(\bar{\sigma}^\mu) = (1, -\vec{\sigma})$

$$-i\sigma^{\mu *}\varepsilon\partial_\mu\chi - m\chi^* = 0$$

$$(\varepsilon\, \sigma^{\mu *}\, \varepsilon) = (-1, \sigma^i) = -(\bar\sigma^\mu)$$

$$\boxed{i\, \bar\sigma^\mu \partial_\mu \chi - m\bar\chi = 0}$$ äquivalent zu voriger Gl.

Die Majorana-Gl. ist Lorentz-invariant:

$$\boxed{\chi(x) \text{ Lsg.} \Rightarrow A\chi(L_A^{-1}x) \text{ Lsg.}}$$

Lemma: $A\sigma_\mu A^\dagger = \sigma_\lambda (L_A)^\lambda{}_\mu\,,\quad A\sigma^\mu A^\dagger = (L_A^{-1})^\mu{}_\lambda \sigma^\lambda$

Beweis: $A\sigma_\mu x^\mu A^\dagger = \sigma_\lambda (L_A)^\lambda{}_\mu x^\mu \Rightarrow$ erste Relation

$$\eta^{\mu\nu} A\sigma_\nu A^\dagger = \eta^{\mu\nu}(L_A)^\lambda{}_\nu\, (\eta_{\lambda\rho}\sigma^\rho) = (\eta L_A^T \eta)^\mu{}_\rho\, \sigma^\rho$$

$$= (L_A^{-1})^\mu{}_\rho\, \sigma^\rho \quad \square$$

Lorentz-Invarianz der Majoranagl.:

$\chi(x)$ Lsg., $\quad y \equiv L_A^{-1}x$

$$\cancel{\overline{A\chi(y)} = \varepsilon A^* \varepsilon^{-1}\varepsilon\chi^*(y) = A^{-1\dagger}\bar\chi(y)}$$

$$i\sigma^\mu A^{-1\dagger}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\bar\chi(y) - mA\chi(y) =$$

$$= A\left\{iA^{-1}\sigma^\mu A^{-1\dagger}(L_A^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu}\bar\chi(y) - m\chi(y)\right\}$$

$$= A\left\{i\underbrace{A^{-1}(A\sigma^\nu A^\dagger)A^{-1\dagger}}_{\sigma^\nu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\bar\chi(y) - m\chi(y)\right\} = 0 \quad \square$$

M Gl. nicht geeignet für <u>geladenes</u> Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen; keine Kopplung an Photon → keine em. WW.

3) <u>Konstruktion der Dirac-Gleichung</u>

Addieren 2 M Glen:

$$\boxed{\begin{aligned} i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\varphi} - m\chi &= 0 \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - m\bar{\varphi} &= 0 \end{aligned}}$$

4 Spinorfreiheitsgrade!

$$\boxed{\Psi \equiv \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\varphi} \end{pmatrix} \text{ 4-Spinor, } \gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} 1_4}$$

$$(\gamma^0)^2 = 1_4, \quad (\gamma^i)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sigma^i)^2 & 0 \\ 0 & -(\sigma^i)^2 \end{pmatrix} = -1_4$$

etc.

<u>Theorem:</u> Jeder Satz von 4 Matrizen $\{\gamma^\mu\}_{\mu=0,\dots,3}$, der $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} 1_4$ erfüllt, ist zueinander äquivalent.

D.h.: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_4$, $\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_4$

$\Rightarrow \exists\, Z \ (\det Z \neq 0): \ Z^{-1}\gamma'^\mu Z = \gamma^\mu$

Andere oft verwendete Darst. der γ-Matrizen:

$$\gamma'^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma'^i = \gamma^i \quad \Rightarrow Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$ Weyl-Basis

~~Lassen ab jetzt ausgehend von Weyl-Basis nur unitäres Z zu $\Rightarrow$ $\boxed{\gamma'^{0\dagger} = \gamma'^0, \ \gamma'^{i\dagger} = -\gamma'^i \ (i=1,2,3)}$~~

Basiswechsel: ψ Lsg. der Dirac-Gl. mit $\{\gamma^\mu\}$

$\Rightarrow \psi' = Z\psi$ Lsg der Dirac-Gl. mit $\{\gamma'^\mu = Z\gamma^\mu Z^{-1}\}$

$\boxed{\psi \text{ Lsg. der Dirac-Gl.} \Rightarrow (\Box + m^2)\psi = 0}$

Beweis: $(i\gamma^\nu\partial_\nu + m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$

$$\Rightarrow 0 = (-\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu - m^2)\psi = -\left(\tfrac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi =$$
$$= -(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = -(\Box + m^2)\psi \quad \Box$$

~~Kontinuitätsgl. und Dirac-Gl.~~

4-Spinoren $\equiv$ Dirac-Spinoren

Transformationsverhalten von Dirac-Spinoren unter $SL(2,\mathbb{C})$:

Weyl-Basis, $A = e^{-i(\vec{\alpha}-i\vec{u})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \in SL(2,\mathbb{C})$:

$$\boxed{\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\varphi} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A\chi \\ A^{-1+}\bar{\varphi} \end{pmatrix} \equiv S\psi}$$

Invarianz der Majorana-Gl. unter $SL(2,\mathbb{C}) \Rightarrow$ Invarianz der Dirac-Gl.

$$S = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1+} \end{pmatrix}$$ reduzible Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$

$$S(\vec{\alpha},\vec{u}) = \begin{pmatrix} e^{-i(\vec{\alpha}-i\vec{u})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i(\vec{\alpha}+i\vec{u})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \exp(-i)\begin{pmatrix} (\vec{\alpha}-i\vec{u})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & (\vec{\alpha}+i\vec{u})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix} \equiv e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$$

mit $\sigma_{\mu\nu}$ 4×4-Matrizen und $\omega^{\mu\nu}$ Koeffizientenmatrix, die Funktion von $\vec{\alpha},\vec{u}$ ist.

Bedingung: $\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu} \Rightarrow \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$

$(\omega^{\mu\nu})$ antisymm. 4×4-Matrix $\Rightarrow$ enthält 6 unabh. Parameter

Idee: Damit S basisunabh. wird, Formulierung mit γ-Matrizen

$$\begin{pmatrix} (\vec{\alpha}-i\vec{u})\cdot\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & (\vec{\alpha}+i\vec{u})\cdot\vec{\sigma} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$$

<u>Behauptung</u>: $S(\vec{\alpha},\vec{u}) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$

mit $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$ und $(\omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -u_x & -u_y & -u_z \\ u_x & 0 & \alpha_z & -\alpha_y \\ u_y & -\alpha_z & 0 & \alpha_x \\ u_z & \alpha_y & -\alpha_x & 0 \end{pmatrix}$

Zu zeigen: In Weyl-Basis gilt (*).

Beweis: $\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = \sigma_{0i}\,\omega^{0i} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sigma_{ij}\,\omega^{ij}$

$$\sigma_{0i} = -\sigma^{0i} = -\frac{i}{2}[\gamma^0,\gamma^i] = -i\gamma^0\gamma^i = i\begin{pmatrix}\sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i\end{pmatrix}$$

$i\neq j$:

$$\sigma_{ij} = \sigma^{ij} = \frac{i}{2}[\gamma^i,\gamma^j] = i\gamma^i\gamma^j = i\begin{pmatrix}0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}$$

$$\omega^{0i} = -u_i\,,\quad \omega^{ij} = \varepsilon_{ijl}\alpha_l\,,\quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -i\vec{u}\cdot\vec{\sigma}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & i\vec{u}\cdot\vec{\sigma}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\vec{\alpha}-i\vec{u})\cdot\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & (\vec{\alpha}+i\vec{u})\cdot\vec{\sigma}\end{pmatrix}$$

□

Umrechnung in beliebige Basis:

$$\psi' = Z\psi, \quad S' = ZSZ^{-1} = Z e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} Z^{-1} =$$

$$= e^{-\frac{i}{4}(Z\sigma_{\mu\nu}Z^{-1})\omega^{\mu\nu}}$$

$$Z\sigma_{\mu\nu}Z^{-1} = Z\,\frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\,Z^{-1} =$$

$$\frac{i}{2}[Z\gamma_\mu Z^{-1}, Z\gamma_\nu Z^{-1}] = \frac{i}{2}[\gamma'_\mu, \gamma'_\nu]$$

$$S' = e^{-\frac{i}{4}\sigma'_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} \quad \text{mit } \sigma'_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma'_\mu, \gamma'_\nu]$$

Bem.: Transformation von Dirac-Spinoren unter $SL(2,\mathbb{C})$ gilt für beliebige Basis der γ-Matrizen: $\psi \to S\psi$

In Weyl-Basis wird S blockdiagonal:

$$S = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1\dagger} \end{pmatrix}$$

$\psi(x)$ Lsg. der Dirac-Gl. $\Rightarrow$ $S(A)\,\psi(L_A^{-1}x)$ ebenfalls Lsg., d.h.

Lorentz-Invarianz der Dirac-Gl.

Skalare und Vektoren gebildet aus Dirac-Spinoren:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} 1_4 \Rightarrow \{\gamma_\mu^\dagger, \gamma_\nu^\dagger\} = 2\eta_{\mu\nu} 1_4$$

$$\Rightarrow \exists \beta : \beta^{-1} \gamma_\mu^\dagger \beta = \gamma_\mu$$

Lemma: $\boxed{\beta^{-1} \sigma_{\mu\nu}^\dagger \beta = \sigma_{\mu\nu}, \quad \beta^{-1} S^\dagger \beta = S^{-1}}$

Beweis: $\beta^{-1} \sigma_{\mu\nu}^\dagger \beta = -\frac{i}{2} \beta^{-1} [\gamma_\nu^\dagger, \gamma_\mu^\dagger] \beta$

$$= -\frac{i}{2} [\gamma_\nu, \gamma_\mu] = \sigma_{\mu\nu}$$

$$\beta^{-1} S^\dagger \beta = \beta^{-1} e^{\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu}^\dagger \alpha^{\mu\nu}} \beta = e^{\frac{i}{4} \beta^{-1} \sigma_{\mu\nu}^\dagger \beta \alpha^{\mu\nu}} = S^{-1} \quad \square$$

$$\boxed{\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \beta \Rightarrow \bar{\psi} \xrightarrow{S} \bar{\psi} S^{-1}}$$

Beweis: $\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta \to \psi^\dagger S^\dagger \beta = \psi^\dagger \beta \beta^{-1} S^\dagger \beta = \bar{\psi} S^{-1} \quad \square$

Bemerkung:

In Weyl-Basis und jeder Basis, die durch Zunitär aus Weyl-Basis hervorgeht, gilt

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_i^\dagger = -\gamma_i \quad (i = 1,2,3). \quad (*)$$

$\Rightarrow$ β kann mit γ_0 identifiziert werden!

Nehmen ab jetzt an, dass immer $(*)$ erfüllt ist, daher $\beta \equiv \gamma_0$!!!

Früher bewiesen: $A\sigma^\mu A^+ = (L_A^{-1})^\mu{}_\nu \sigma^\nu$

<u>Lemma:</u> $A^+ \bar\sigma^\mu A = (L_A)^\mu{}_\nu \bar\sigma^\nu$

Beweis: $A^+\bar\sigma^\mu A = (\varepsilon^{-1}A^{-1T}\varepsilon)^+ \bar\sigma^\mu (\varepsilon^{-1}A^{-1T}\varepsilon) =$

$$= \varepsilon^{-1}A^{-1*}\underbrace{\varepsilon\bar\sigma^\mu\varepsilon^{-1}}_{\sigma^{\mu *}}A^{-1T}\varepsilon = \varepsilon^{-1}(A^{-1}\sigma^\mu A^{-1+})^*\varepsilon =$$

$$= (L_A)^\mu{}_\nu\, \varepsilon^{-1}\sigma^{\nu *}\varepsilon = (L_A)^\mu{}_\nu \bar\sigma^\nu \quad \square$$

Weyl-Basis: $S^{-1}\gamma^\mu S = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1+} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & A^{-1}\sigma^\mu A^{-1+} \\ A^+\bar\sigma^\mu A & 0 \end{pmatrix} = (L_A)^\mu{}_\nu \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar\sigma^\nu & 0 \end{pmatrix} = (L_A)^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$\boxed{\text{In jeder Basis gilt } S^{-1}\gamma^\mu S = L^\mu{}_\nu \gamma^\nu}$$

Beweis: $Z S^{-1}\gamma^\mu S Z^{-1} = (ZSZ^{-1})^{-1} Z\gamma^\mu Z^{-1} ZSZ^{-1} =$

$$= S'^{-1}\gamma'^\mu S' = L^\mu{}_\nu Z\gamma^\nu Z^{-1} = L^\mu{}_\nu \gamma'^\nu \quad \square$$

$$\cancel{\bar\psi \xrightarrow{S} (S\psi)^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \gamma_0 \gamma_0 S^\dagger \gamma_0 = \bar\psi S^{-1}}$$

$$\cancel{\boxed{\bar\psi \xrightarrow{S} \bar\psi S^{-1}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\psi_1, \psi_2 \text{ 4-Spinoren} \Rightarrow \bar\psi_1 \psi_2 \text{ Lorentz-Skalar} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \bar\psi_1 \gamma^\mu \psi_2 \text{ Lorentz-Vektor} \end{aligned}}$$

Beweis: $\bar\psi_1 \psi_2 \to \bar\psi_1 S^{-1} S \psi_2 = \bar\psi_1 \psi_2$

$\bar\psi_1 \gamma^\mu \psi_2 \to \bar\psi_1 S^{-1} \gamma^\mu S \psi_2 = L^\mu{}_\nu \, \bar\psi_1 \gamma^\nu \psi_2$ $\square$

Chirale Felder:

Def. $\gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$

Eigenschaften: $\gamma_5^2 = 1_4$, $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$, $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$

$\Rightarrow$ $P_L = \dfrac{1_4 - \gamma_5}{2}$, $P_R = \dfrac{1_4 + \gamma_5}{2}$ Projektoren

Chirale Felder $\psi_L \equiv P_L \psi$, $\psi_R \equiv P_R \psi$

Weyl-Basis: $\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$, $P_L = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$

$P_L \psi = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$

4) Lösungen der Dirac-Gl.: ebene Wellen

Weyl-Basis

$(i\not\partial - m)\psi = 0 \qquad \not a \equiv \gamma^\mu a_\mu$

$\Rightarrow (\Box + m^2)\psi = 0$

Suchen Lsgen. der Form $u(\vec p)e^{-ip\cdot x}$, $v(\vec p)e^{ip\cdot x}$

u, v 4-Spinoren, $p^0 \equiv E = \sqrt{\vec p^{\,2} + m^2} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}(\not p - m)u = 0\\ (\not p + m)v = 0\end{array}}$

Behauptung: Lsg. in Weyl-Basis

$$\boxed{u(\vec p, \xi) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\xi \end{pmatrix} \text{ mit } \xi \in \mathbb{C}^2 \text{ beliebig}}$$

$$\boxed{v(\vec p, \eta) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta \\ -\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\eta \end{pmatrix} \text{ mit } \eta \in \mathbb{C}^2 \text{ beliebig}}$$

$p\cdot\sigma \equiv p^\mu\sigma_\mu$, $p\cdot\bar\sigma \equiv p^\mu\bar\sigma_\mu$

positive Matrizen mit Eigenwerten

$E \pm |\vec p| \Rightarrow$ Wurzel wohldefiniert

Nachrechnen: Weyl-Basis

$$\not p - m = p^\mu\gamma_\mu - m = \begin{pmatrix} -m\mathbb{1}_2 & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar\sigma & -m\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

$$(\not p - m)u(\vec p, \xi) = \begin{pmatrix} -m\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi + p\cdot\sigma\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\xi \\ p\cdot\bar\sigma\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi - m\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\xi \end{pmatrix}$$

$$-m\sqrt{p\cdot\sigma} + p\cdot\sigma\sqrt{p\cdot\bar\sigma} = \sqrt{p\cdot\sigma}\left(-m1_2 + \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\right) =$$

$$= \sqrt{p\cdot\sigma}\left(-m1_2 + \sqrt{\underbrace{(E-\vec p\cdot\vec\sigma)(E+\vec p\cdot\vec\sigma)}_{E^2-\vec p^2=m^2}}\right) = 0$$

Zwei l.u. Lsgen mit positiver Frequenz:

$u(\vec p, s)$ mit $\{\xi_s \mid s=1,2\}$ ON-Basis

Normierung:

$$\bar u(\vec p, r)\, u(\vec p, s) = \left(\xi_r^\dagger\sqrt{p\cdot\sigma},\ \xi_r^\dagger\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\right)\begin{pmatrix}0 & 1_2\\ 1_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi_s\\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\xi_s\end{pmatrix}$$

$$= 2\,\xi_r^\dagger\sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\xi_s = 2m\,\delta_{rs}$$

$$\boxed{\bar u(\vec p, r)\, u(\vec p, s) = 2m\,\delta_{rs}\,,\quad \bar v(\vec p, r)\, v(\vec p, s) = -2m\,\delta_{rs}}$$

$$\boxed{\bar u(\vec p, r)\, v(\vec p, s) = 0}$$

$$\underbrace{\left(\sum_s u(\vec p, s)\,\bar u(\vec p, s)\right)}_{4\times4\text{-Matrix}} u(\vec p, r) = \sum_s u(\vec p, s)\cdot 2m\,\delta_{sr} =$$

$$= 2m\,u(\vec p, r) = (\not p + m)\,u(\vec p, r)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_s u(\vec p, s)\,\bar u(\vec p, s) = \not p + m\,,\quad \sum_s v(\vec p, s)\,\bar v(\vec p, s) = \not p - m}$$

Allgemeine Lsg.: $\qquad$ b, d^* freie Funktionen

$$\boxed{\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}}\left[b(\vec p, s)\,u(\vec p, s)\,e^{-ip\cdot x} + d^*(\vec p, s)\,v(\vec p, s)\,e^{ip\cdot x}\right]}$$

5) Lagrangedichte und Energie des Dirac-Felds

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi} = \bar{\Psi}_a \, i\gamma^\mu{}_{ab} \, \partial_\mu \Psi_b - m \bar{\Psi}_a \Psi_a$$

Diracspinorindizes $a, b = 1, \dots, 4$

$\bar{\Psi}_a, \Psi_b$ unabh. Variable

Einfachste Wahl: $\bar{\Psi}_a \Rightarrow \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_a)} = 0$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gl. $(i\not{\partial} - m)\Psi = 0$ Dirac-Gl.

Allgem.:

$\mathcal{H} = \sum_a \pi_a \dot{\phi}_a - \mathcal{L}$

Variation nach $\Psi_a \to$ D-Gl.

$\Psi_a, \bar{\Psi}_b, \pi_a = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_a}, \bar{\pi}_b = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\Psi}}_b} = 0$

$$\mathcal{H} = \underbrace{i\bar{\Psi}_c \gamma^0{}_{ca}}_{\pi_a} \dot{\Psi}_a - \mathcal{L} = i\Psi^\dagger \dot{\Psi} - \mathcal{L}$$

Hamiltondichte

$H = \int d^3x \, \mathcal{H}$ Feldenergie $\to$ Einsetzen der allgem. Lsg.

$$H = i \sum_{s,s'} \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E'}} (-iE')$$

$$[b u e^{-ip\cdot x} + d^* v e^{ip\cdot x}]^\dagger [b' u' e^{-ip'\cdot x} - d'^* v' e^{ip'\cdot x}]$$

Terme mit $\delta(\vec{p} - \vec{p}')$ und $\delta(\vec{p} + \vec{p}')$

$$u^\dagger(\vec{p},r)\,u(\vec{p},s) = \left(\xi_r^\dagger\sqrt{p\cdot\sigma}\,,\ \xi_r^\dagger\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi_s\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi_s\end{pmatrix} =$$

$$= \xi_r^\dagger\left(p\cdot\sigma + p\cdot\bar{\sigma}\right)\xi_s = 2E\,\delta_{rs}$$

$$\boxed{u^\dagger(\vec{p},r)\,u(\vec{p},s) = v^\dagger(\vec{p},r)\,v(\vec{p},s) = 2E\,\delta_{rs}}$$

$$\boxed{u^\dagger(\vec{p},r)\,v(-\vec{p},s) = 0}$$

$$\boxed{H = \sum_s\int d^3p\; E\left(b^*(\vec{p},s)\,b(\vec{p},s) - d(\vec{p},s)\,d^*(\vec{p},s)\right)}$$

Wenn d normale komplexe Funktion von $\vec{p}, s$

$\rightarrow$ H nicht positiv definit!

Erhaltener Strom: $\mathcal{L}$ invariant unter $\psi \to e^{i\alpha}\psi$

$$\Delta\psi = -i\psi\,,\quad j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_a)}(-i\psi_a) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$\boxed{j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi}$$

Wenn $\psi^\dagger(x)\psi(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichte, dann muss Normierbarkeit $\int d^3x\,\psi^\dagger(x)\psi(x) = 1$ ~~gegeben~~ möglich sein.

$$\boxed{\int d^3x\,\psi^\dagger(x)\psi(x) = \sum_s\int d^3p\left[b^*(\vec{p},s)\,b(\vec{p},s) + d(\vec{p},s)\,d^*(\vec{p},s)\right]}$$

Falls $-dd^* = d^*d$ (Antikommutativität)

$\Rightarrow$ $\int d^3x\,\psi^\dagger\psi = \sum_s\int d^3p\left[b^*b - d^*d\right]$ kann nicht als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden!

Konsistenz in QFT: b, d Operatoren, $\{b(\vec{p},s), b^\dagger(\vec{p}',s')\} = \delta_{ss'}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')$ etc. $\longrightarrow$ Fermi-Statistik

QFT: $H \geq 0$, j^μ em. Strom, $\psi^\dagger(x)\psi(x)$ Ladungsdichte

$Q = \int d^3x\, \psi^\dagger \psi$ = Gesamtladung = Teilchenladung − Antiteilchenladung

6) Kopplung an das em. Feld

$$\boxed{\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + iq A_\mu}$$

q = Ladung

„Kovariante Ableitung" D_μ

$$\boxed{[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\psi = 0}$$

Eichinvarianz: $\boxed{\psi \to e^{i\Lambda}\psi, \quad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu \Lambda}$

$D_\mu \psi(x) \longrightarrow e^{i\Lambda(x)} D_\mu \psi(x)$

$$\mathcal{L}_{Maxwell+Dirac} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}[i\not{\partial} - q\not{A} - m]\psi$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{M+D} = \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}[i\not{\partial} - m]\psi}_{\text{freie Felder}} \underbrace{- q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\text{Ww.}}}$$

Em. Feld koppelt an Strom $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

$\partial_\mu j^\mu = 0$

QFT: $\mathcal{L}_{QED}$

$$\partial_\lambda F^{\lambda\sigma} = q\bar{\psi}\gamma^\sigma\psi$$

7) Nichtrelativistischer Limes

a) Ebene Wellen

Basis $\boxed{\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}}$ NRL-Basis

$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, weder u_1, noch u_2 haben einfaches Transformations-verhalten unter $SL(2,\mathbb{C})$

$\left(\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$(\not{p} - m)\, u(\vec{p}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} (E-m)1 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (-E-m)1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$u_2 = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} u_1 \Rightarrow (E-m)u_1 - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} u_1 = 0$$

$$\frac{1}{E+m}\left[(E^2-m^2) - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2\right] u_1 = \frac{1}{E+m}\left[\vec{p}^{\,2} - \vec{p}^{\,2}\right] u_1 = 0$$

$\Rightarrow u_1 = \xi$ frei $\quad \xi^\dagger \xi = 1, \ \bar{u}u = 2m \Rightarrow$

$$\boxed{u(\vec{p},\xi) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\xi \end{pmatrix}, \quad v(\vec{p},\eta) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\eta \\ \eta \end{pmatrix}}$$

NR Limes: $u(\vec{p},\xi)\, e^{-ip\cdot x} \propto \begin{pmatrix} \xi e^{-ip\cdot x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\vec{p},\eta)\, e^{ip\cdot x} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ \eta e^{ip\cdot x} \end{pmatrix}$

$\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \ll m$ bzw. $|\vec{p}| \ll m$

Antiteilchen

b) Geladenes Teilchen im em. Feld

Ansatz: $\psi(\vec{x},t) = e^{-iEt}\begin{pmatrix}\psi_1(\vec{x})\\ \psi_2(\vec{x})\end{pmatrix}$

NRL-Basis

$$\left[\gamma^0(E-qA_0)+\vec{\gamma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A})-m\right]\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}(E-qA_0-m)\mathbb{1} & \vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A})\\ -\vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A}) & -(E+m-qA_0)\mathbb{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=0$$

NRL: $\dfrac{|E-m|}{m}\ll 1 \Rightarrow E+m-qA_0 \simeq 2m$

$$\psi_2 \simeq -\frac{\vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A})}{2m}\psi_1$$

$$E\psi_1 = (qA_0+m)\psi_1 - \vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A})\psi_2 \simeq$$

$$(qA_0+m)\psi_1+\frac{1}{2m}\left[\vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A})\right]^2\psi_1$$

$-i\vec{\nabla}\equiv\vec{P}$ QM Impulsoperator

$$\left[\vec{\sigma}\cdot(\vec{P}-q\vec{A})\right]^2 = \sigma^j(P^j-qA^j)\,\sigma^k(P^k-qA^k) =$$

$$= (\delta_{jk}\mathbb{1}+i\varepsilon_{jkl}\sigma^l)(P^j-qA^j)(P^k-qA^k) = (\vec{P}-q\vec{A})^2$$

$$+\frac{i}{2}\varepsilon_{jkl}\sigma^l\left[P^j-qA^j,\,P^k-qA^k\right] = (\vec{P}-q\vec{A})^2+\varepsilon_{jkl}(-q)\nabla_j A^k\sigma^l$$

$$\boxed{i\dot{\psi}_1 = \left[\frac{1}{2m}(\vec{P}-q\vec{A})^2-\frac{q}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}+qA_0+m\right]\psi_1}$$

Schrödinger-Pauli-Gl.

Spin-Operator $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, $\mu_B = \frac{q}{2m}$ Bohrsches Magneton

Ww. zw. Spin und Magnetfeld:

$$-\ 2\mu_B \vec{S}\cdot\vec{B}$$ Landé-Faktor 2

Magn. Moment $\boxed{\vec{\mu} = \mu_B(\vec{L} + 2\vec{S})}$

für $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{x}$ ($\vec{B}$ konst.) $\Rightarrow \frac{(\vec{P}-q\vec{A})^2}{2m}$

Ww. $-\ \vec{\mu}\cdot\vec{B}$

$$= \frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{q^2}{8m}(\vec{B}^2\vec{x}^2 - (\vec{B}\cdot\vec{x})^2) - \mu_B \vec{L}\cdot\vec{B}$$

8) Relativistische QM

a) Dirac-Gl. als relativistische Schrödingergl.

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\psi = 0$$ NRL-Basis

$$\gamma^0 \equiv \beta, \quad \gamma^0\vec{\gamma} \equiv \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$i\dot{\psi} + [i\vec{\alpha}\cdot(\vec{\nabla} - iq\vec{A}) - qA_0 - \beta m]\psi = 0$$

$$\vec{P} \equiv -i\vec{\nabla}$$

$$\boxed{i\dot{\psi} = \bar{H}\psi \quad \text{mit} \quad \bar{H} = \vec{\alpha}\cdot(\vec{P} - q\vec{A}) + qA_0 + \beta m}$$

Schrödingergl. für Diracspinoren

b) Drehimpulserhaltung im rotationssymm. Zentralkraftfeld

$$\boxed{\bar{H} = \vec{\alpha}\cdot\vec{P} + \beta m + V(r)}$$

$\vec{A} = \vec{0}$, $A_0 = V(r)$

Sakurai, Advanced QM

Spinoperator für Diracspinoren:

$$\frac{1}{4}\sigma_{ij}\,\omega^{ij} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{12}\,\alpha_z + \sigma_{23}\,\alpha_x + \sigma_{31}\,\alpha_y\right)$$

$$S_z = \frac{1}{2}\sigma_{12} = \frac{1}{2}\,\frac{i}{2}\,[\gamma^1, \gamma^2] = \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2 =$$

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^1\sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^1\sigma^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}}$$

Weyl-, NRL-Basis

Erhaltungsgrößen: $\boxed{\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \quad K = \beta\,(2\vec{S}\cdot\vec{L} + 1)}$

$\Rightarrow \boxed{[K, \vec{J}\,] = 0,}$ weil $\vec{J}$ mit β komm. und

$$\vec{S}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2\right)$$

Im NR Limes: Spin parallel oder antiparallel zu $\vec{J}$

$$[\bar{H}, L_k] = [\vec{\alpha}\cdot\vec{P}, L_k] = \alpha_j\,[P^j, \varepsilon_{klm}X^l P^m]$$

$$= -i\alpha_j\,\varepsilon_{klm}\,\delta_{jl}\,P^m = -i\,\varepsilon_{kjm}\,\alpha_j\,P^m$$

$$[\bar{H}, S_k] = [\vec{\alpha}\cdot\vec{P}, S_k] = [\alpha_j, S_k]\,P^j = \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}\right]$$

$$\cdot\frac{1}{2}P^j = \left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j\sigma^k \\ \sigma^j\sigma^k & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k\sigma^j \\ \sigma^k\sigma^j & 0 \end{pmatrix}\right)\frac{1}{2}P^j = i\,\varepsilon_{jkl}\,\alpha_l\,P^j$$

$[\bar{H},\vec{L}] = -i\vec{\alpha}\times\vec{P}\,,\ [\bar{H},\vec{S}] = i\vec{\alpha}\times\vec{P} \Rightarrow [\bar{H},\vec{J}] = 0$

Berechnung von $[\bar{H},K]$: $\quad [\vec{L}, V(r)] = \vec{0} \Rightarrow$

$$[\bar{H},K] = [\vec{\alpha}\cdot\vec{P}, \beta(2\vec{S}\cdot\vec{L}+1)] = [\vec{\alpha}\cdot\vec{P},\beta](2\vec{S}\cdot\vec{L}+1)$$
$$+2\beta[\vec{\alpha}\cdot\vec{P}, \vec{S}\cdot\vec{L}]$$

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{P},\beta] = [\alpha_j,\beta]P_j = -2\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{P}$$

$$\Rightarrow [\bar{H},K] = -2\beta\vec{\alpha}_i\cdot\vec{P}_i(2\vec{S}_j\cdot\vec{L}_j+1) + 2\beta[\vec{\alpha}_i\cdot\vec{P}_i,\vec{S}_j]\cdot\vec{L}_j + 2\beta\vec{S}_i\cdot[\vec{\alpha}_j\cdot\vec{P}_j, L_i]$$

$$\alpha_i S_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_j & 0\\ 0 & \sigma_j\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\sigma_j\\ \sigma_i\sigma_j & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \delta_{ij}1_2 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\\ \delta_{ij}1_2 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\gamma_5\delta_{ij} + \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}\alpha_k$$

$\boxed{\vec{P}\cdot\vec{L} = 0}$

$$S_i\alpha_j = \frac{1}{2}\gamma_5\delta_{ij} + \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}\alpha_k\,,\quad [\alpha_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}\alpha_k\,,\ [L_i,P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k$$

$$\frac{1}{2}\beta[\bar{H},\bar{K}] = -\vec{\alpha}\cdot\vec{P} - 2\left(\cancel{\tfrac{1}{2}\gamma_5\delta_{ij}} + \tfrac{i}{2}\varepsilon_{ijk}\alpha_k\right)P_iL_j$$
$$+ i\varepsilon_{ijk}\alpha_k P_i L_j + \cancel{S_j i\varepsilon_{ijk}\alpha_k}\ S_i\alpha_j(-i\varepsilon_{ijk}P_k)$$
$$= -\vec{\alpha}\cdot\vec{P} + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}\gamma_5\delta_{ij}} + \tfrac{i}{2}\varepsilon_{ij\ell}\alpha_\ell\right)(-i\varepsilon_{ijk}P_k)$$
$$= -\vec{\alpha}\cdot\vec{P} + \frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon_{ij\ell}\varepsilon_{ijk}}_{2\delta_{\ell k}}\alpha_\ell P_k = 0$$

Gesucht:
gleichzeitige Eigenzustände zu $\bar{H}, \vec{J}^2, J_z, K$

Einschub: Vektoroperatoren

Def.: $\vec{V}$ Vektoroperator, wenn $[J_k, V_\ell] = i\varepsilon_{k\ell m} V_m$

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ Drehimpuls

Wichtige Vektoroperatoren:

$\vec{J}, \vec{L}, \vec{S}, \vec{X}, \vec{P}$

Beh.: $\vec{V}, \vec{V}'$ Vektoroperatoren $\Rightarrow [J_k, \vec{V}\cdot\vec{V}'] = 0$

Beweis:

$$[J_k, V_\ell V_\ell'] = V_\ell [J_k, V_\ell'] + [J_k, V_\ell] V_\ell' =$$

$$= V_\ell \, i\varepsilon_{k\ell m} V_m' + i\varepsilon_{k\ell m} V_m V_\ell'$$

$$= i\varepsilon_{k\ell m} V_\ell V_m' + i\varepsilon_{km\ell} V_\ell V_m' = 0 \quad \square$$

$$\Rightarrow [J_k, \vec{S}\cdot\vec{L}] = 0$$

Eigenwerte von K:

$$K^2 = \beta(2\vec{S}\cdot\vec{L}+1)\,\beta(2\vec{S}\cdot\vec{L}+1) = (2\vec{S}\cdot\vec{L}+1)^2 =$$

$$= 4(\vec{S}\cdot\vec{L})^2 + 4\vec{S}\cdot\vec{L} + 1 \quad = \vec{L}^2 + 2\vec{S}\cdot\vec{L} + 1$$

$$S_i L_i S_j L_j = \left(\frac{1}{4}\mathbb{1}\delta_{ij} + \frac{1}{2} i \varepsilon_{ijk} S_k\right) L_i L_j = \frac{1}{4}\vec{L}^2 +$$

$$+ \frac{1}{4} i \varepsilon_{ijk} \underbrace{[L_i, L_j]}_{i\varepsilon_{ij\ell}L_\ell} S_k = \frac{1}{4}\vec{L}^2 - \frac{1}{2}\vec{S}\cdot\vec{L}$$

$$K^2 = \vec{J}^2 - \vec{S}^2 + 1 \quad = \vec{J}^2 + \frac{1}{4}\mathbb{1}, \quad \vec{S}^2 = \frac{3}{4}\mathbb{1}$$

$$\boxed{K^2 = \vec{J}^2 + \frac{1}{4}\mathbb{1}}$$

Eigenwerte von K: $-\varkappa$

$$\varkappa^2 = j(j+1) + \frac{1}{4} \Rightarrow \varkappa = \pm\left(j + \frac{1}{2}\right)$$

NRL-Basis: $K = \begin{pmatrix} 2\vec{S}\cdot\vec{L}+1 & 0 \\ 0 & -2\vec{S}\cdot\vec{L}-1 \end{pmatrix}$

$$K\psi = -\varkappa\psi \Rightarrow \quad (2\vec{S}\cdot\vec{L}+1)\psi_1 = -\varkappa\psi_1$$

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \qquad (2\vec{S}\cdot\vec{L}+1)\psi_2 = \varkappa\psi_2$$

$$\vec{J}^2\psi_{1,2} = j(j+1)\psi_{1,2}$$

$$J_z\psi_{1,2} = m\psi_{1,2}$$

$$2\vec{S}\cdot\vec{L}+1 = \vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2 + 1 \quad = \vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} -\varkappa &= j(j+1) - \ell_1(\ell_1+1) + \frac{1}{4} \\ \varkappa &= j(j+1) - \ell_2(\ell_2+1) + \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \quad \psi_{\substack{1\\2}} \text{ Eigenzustand zu } \vec{L}^2 \text{ mit Ew. } \ell_{\substack{1\\2}}(\ell_{\substack{1\\2}}+1)$$

$\varkappa = j+\frac{1}{2}$: $\quad -\left(j+\frac{1}{2}\right) = j(j+1) + \frac{1}{4} - l_1(l_1+1) \Rightarrow l_1 = j+\frac{1}{2}$

$$j+\frac{1}{2} = j(j+1) + \frac{1}{4} - l_2(l_2+1) \Rightarrow l_2 = j-\frac{1}{2}$$

$\varkappa = -j-\frac{1}{2}$: $\quad l_1 = j-\frac{1}{2}, \quad l_2 = j+\frac{1}{2}$

	l_1	l_2
$\varkappa = j+\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$	$j-\frac{1}{2}$
$\varkappa = -\left(j+\frac{1}{2}\right)$	$j-\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$

$\vec{L}^2$ keine Erhaltungsgröße: $|l_1 - l_2| = 1$

Bahndrehimpulse in „großer" Komponente ψ_1 und „kleiner" Komponente verschieden!

ψ_1: $\quad l_1 = j+\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{L} \uparrow\downarrow \vec{S}$

$\quad\quad l_1 = j-\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{L} \uparrow\uparrow \vec{S}$

Ansatz: $\quad \psi_1 = g(r)\, \mathcal{Y}^m_{jl_1} \longleftarrow \underline{l_1} \otimes \underline{\tfrac{1}{2}}$

$$\psi_2 = i f(r)\, \mathcal{Y}^m_{jl_2} \longleftarrow \underline{l_2} \otimes \underline{\tfrac{1}{2}}$$

$$\vec{J}^2 \mathcal{Y}^m_{jl} = j(j+1)\, \mathcal{Y}^m_{jl}, \quad \vec{S}^2 \mathcal{Y}^m_{jl} = \frac{3}{4} \mathcal{Y}^m_{jl}$$

$$J_z \mathcal{Y}^m_{jl} = m\, \mathcal{Y}^m_{jl} \quad\quad \vec{L}^2 \mathcal{Y}^m_{jl} = l(l+1)\, \mathcal{Y}^m_{jl}$$

$$l = j - \tfrac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{Y}^{j}_{jl} = Y_{ll} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y_{lm} Kugelflächenfunktionen mit $\vec{L}^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$

$$L_z Y_{lm} = m Y_{lm}$$

Dirac-Gl.: $$E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\mathbb{1} & 0 \\ 0 & -m\mathbb{1} \end{pmatrix} + V \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\psi_2 = (E - m - V(r))\,\psi_1$$
$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\psi_1 = (E + m - V(r))\,\psi_2$$

Weitere Schritte:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{x}}{r^2}\left(-ir\frac{\partial}{\partial r} + i\vec{\sigma}\cdot\vec{L}\right)$$

$$\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{x}}{r}\mathcal{Y}^{m}_{jl_1} = -\mathcal{Y}^{m}_{jl_2}$$

$$F(r) \equiv r f(r), \quad G(r) \equiv r g(r)$$

$\Rightarrow$ Gekoppeltes System:

$$\boxed{\begin{aligned} F' - \frac{\varkappa}{r}F &= -(E - V - m)\,G \\ G' + \frac{\varkappa}{r}G &= (E - V + m)\,F \end{aligned}}$$

gilt allgemein für $V(r)$

ersetzt Radialgl. im NR Fall

c) H-Atom und H-ähnliche Ionen

H, He^+, Li^{++}, ...

Itzykson, Zuber, QFT

$$\boxed{V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi r}}$$

Eigenwerte E hängen nur von Hauptquantenzahl n und Gesamtdrehimpuls j ab

$$\delta_j \equiv j + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2} \qquad \alpha \simeq \frac{1}{137.036}$$

$$\boxed{E_{nj} = \frac{m}{\left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{(n-\delta_j)^2}\right]^{1/2}} = \underbrace{m}_{e^-\text{-Masse}} - \underbrace{\frac{m(Z\alpha)^2}{2n^2}}_{NRQM} - \underbrace{\frac{m(Z\alpha)^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)}_{\text{Feinstruktur}} - \ldots}$$

$$\boxed{j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, n-\frac{1}{2}}$$ → alle Zustände zweifach entartet außer $j = n - \frac{1}{2}$

$$1\,\text{GHz} \mathrel{\hat{=}} \underbrace{6.58212 \times 10^{-16}}_{\hbar \text{ in eVs}} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{10^9}_{\nu \text{ in } s^{-1}} \text{eV} = 4.1357 \times 10^{-6}\,\text{eV}$$

ψ_1 große Komponenten → $l = l_1$

$$1s\tfrac{1}{2} \qquad \underbrace{2s\tfrac{1}{2} \quad 2p\tfrac{1}{2}}_{\text{entartet}} \qquad 2p\tfrac{3}{2} \qquad \underbrace{3s\tfrac{1}{2} \quad 3p\tfrac{1}{2}}_{\text{entartet}} \quad \underbrace{3p\tfrac{3}{2} \quad 3d\tfrac{3}{2}}_{\text{entartet}} \quad 3d\tfrac{5}{2}$$

Schrödinger → Dirac: Entartung teilweise aufgehoben

Eigenwerte entartet
$\forall l = 0, \ldots, n-1$

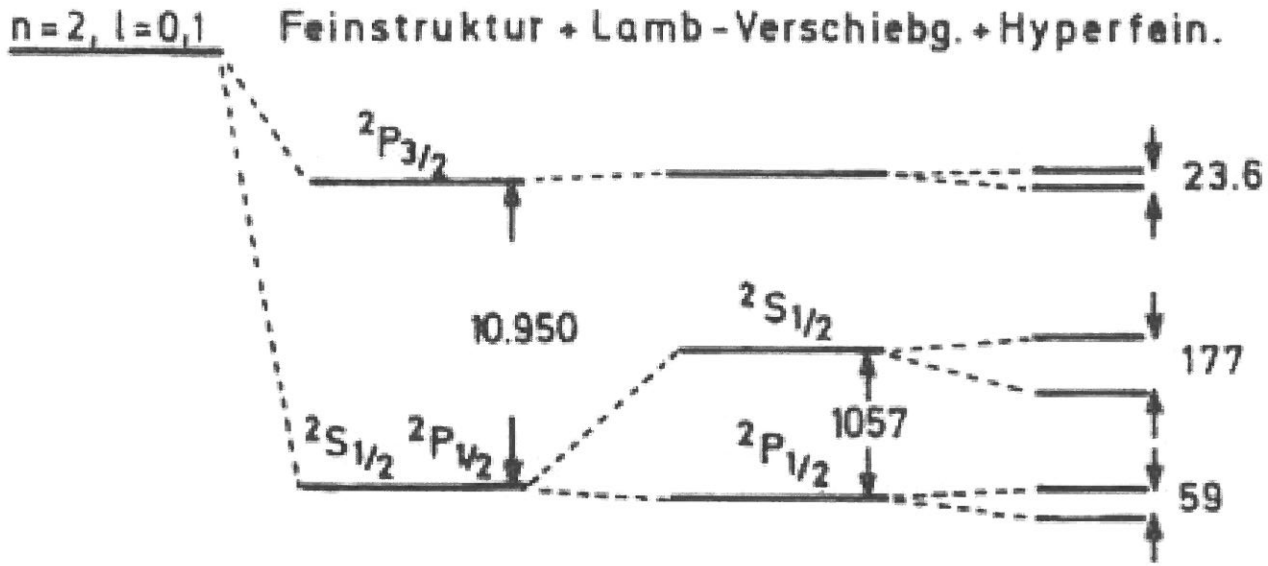


Abb. 8.4. Aufspaltung der Energieniveaus des Wasserstoffatoms in MHz auf Grund der relativistischen Terme (Feinstruktur, (Abb. 8.3)), der Lamb-Verschiebung und der Hyperfeinstruktur.

Korrekturen zum Dirac-Resultat:

1) Radiative Korrekturen (QED): $Z^4 \alpha^5 \ln \frac{1}{\alpha}$

Lamb-Verschiebung $E(2s\frac{1}{2}) - E(2p\frac{1}{2}) \mathrel{\hat{=}} 1057\,MHz$

Entartung bei gleichem j, verschiedenem l aufgehoben

2) Endliche Größe des Kerns: $Z^4 \alpha^4 m^2 \langle r^2 \rangle_{Kern}$

3) 2-Teilchen-relativistische Korrekturen:

Bewegung des Kerns → $E = m + M - \frac{mM}{m+M} \frac{\alpha^2}{2n^2} - \dots$

4) Hyperfeinstruktur: magn. Ww. zw. Kern- u. Elektron= gesamtdreh= impuls

H-Atom: pe^- → Gesamtspin $j-\frac{1}{2}$ bzw. $j+\frac{1}{2}$ des H-Atoms

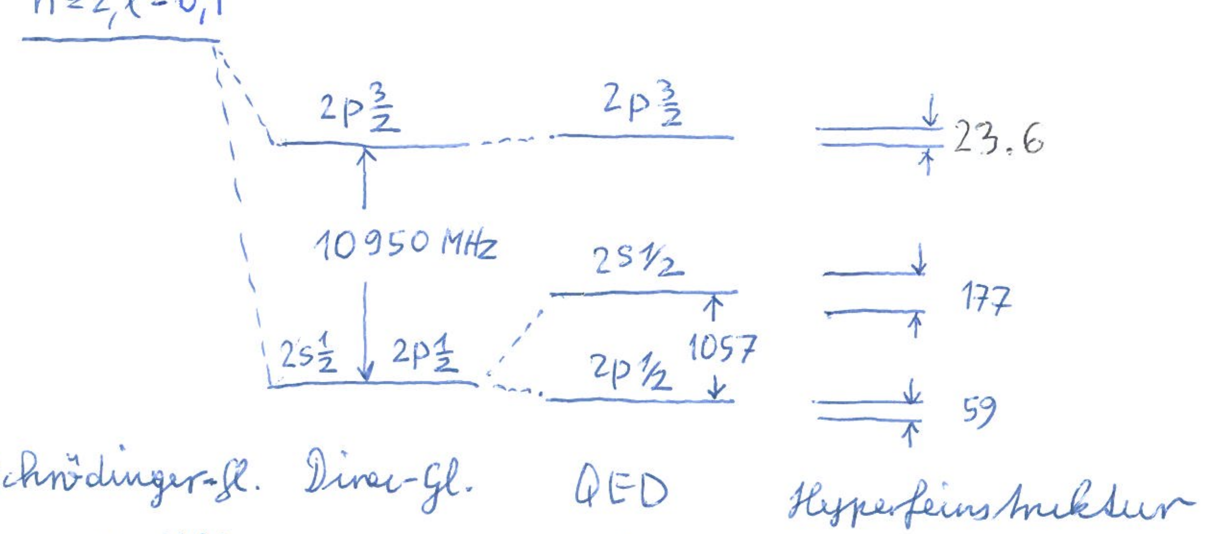
$\Delta E \propto \alpha^4 \frac{m^2}{M}$ → jedes Energieniveau in zwei aufgespaltet

$1s\frac{1}{2}$: $\Delta E \mathrel{\hat{=}} 1420\,MHz \mathrel{\hat{=}} \lambda = 21.4\,cm$

→ Astronomie: Information über interstellaren und intergalaktischen Wasserstoff

(He$^+$ nicht aufgespalten!)

Schwabl, QM, n=2-Niveaus des H-Atoms:



Energiediff. zw. n=1 und n=2: Schrödinger

$\Delta E = \frac{3m\alpha^2}{8} = 10.2043\,eV$

9) Dirac-Gleichung und diskrete Symmetrien (VII.24)

a) Raumspiegelung (Paritätstransformation)

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = Px, \quad P \in \mathcal{L}_-^{\uparrow}$$

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\Psi = 0$$

$$\boxed{\Psi \text{ Lsg. mit } (A^\mu) \Rightarrow \gamma_0 \Psi(Px) \text{ Lsg. mit } (\epsilon(\mu) A^\mu(Px))}$$

$$\epsilon(\mu) = (1,-1,-1,-1)$$

$A(x) \to PA(Px) \Rightarrow \vec{E}(x) \to -\vec{E}(Px),\ \vec{B}(x) \to +\vec{B}(Px)$

Vektor

Raumsp. des em. Feldes

Bem.:

$\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$ Pseudoskalar, $\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$ Pseudovektor

b) Ladungskonjugation

$\{-\gamma_\mu^T, -\gamma_\nu^T\} = 2\eta_{\mu\nu}\mathbb{1}_4 \Rightarrow \exists\, C : C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T$

C Ladungskonjugationsmatrix, man kann zeigen

$C^T = -C$, $C^\dagger = C^{-1}$ $(\Leftarrow \gamma_\mu^\dagger = \epsilon(\mu)\gamma_\mu)$, $C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5^T$

$$\boxed{\Psi \text{ Lsg. mit } A_\mu \Rightarrow \Psi^c(x) \equiv C\gamma_0^T \Psi^*(x) \text{ Lsg. mit } -A_\mu(x)}$$

Ladungskonj.: $j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \to \overline{\Psi^c}\gamma^\mu\Psi^c = -\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$

Komponenten von Ψ antikommutierend!