VI. Quantisierung des em. Feldes

1) Die Energie des em. Feldes

MG: $\vec\nabla\cdot\vec E = \rho\,,\quad \vec\nabla\cdot\vec B = 0$

$$\vec\nabla\times\vec E + \frac{1}{c}\dot{\vec B} = \vec 0\,,\quad \vec\nabla\times\vec B - \frac{1}{c}\dot{\vec E} = \frac{1}{c}\vec j$$

$$\boxed{\begin{aligned}\eta &\equiv \frac{1}{2}\left(\vec E^2 + \vec B^2\right) \\ \vec S &\equiv c\,\vec E\times\vec B\end{aligned}}$$

Energiedichte (η)

Poynting-Vektor (Energiestromdichte) ($\vec S$)

$$\dot\eta + \vec\nabla\cdot\vec S = \vec E\cdot\dot{\vec E} + \vec B\cdot\dot{\vec B} + c\,\nabla_i\,\varepsilon_{ijk}\left(E_j B_k\right)$$

$$= \vec E\cdot\left(c\vec\nabla\times\vec B - \vec j\right) + \vec B\cdot\left(-c\vec\nabla\times\vec E\right) \cancel{- c\vec E\cdot(\vec\nabla\times\vec B)}$$

$$+ c\,\varepsilon_{ijk}\left(\nabla_i E_j\right)B_k + c\,\varepsilon_{ijk}E_j\nabla_i B_k = -\vec j\cdot\vec E + c\vec E\cdot(\vec\nabla\times\vec B) - c\vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec E)$$

$$+ c\vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec E) - c\vec E\cdot(\vec\nabla\times\vec B) = -\vec j\cdot\vec E$$

$$\boxed{\dot\eta + \vec\nabla\cdot\vec S = -\vec j\cdot\vec E}$$

„Energieerhaltung"

Raumgebiet V:

$$\cancel{\int_V d^3x\,\dot\eta + \int_{\partial V} d\vec F\cdot\vec S + \int_V}$$

$$\int_V d^3x\,\dot\eta + \int_V d^3x\,\vec j\cdot\vec E + \overbrace{\int_{\partial V} d\vec F\cdot\vec S}^{\text{Em. Energie, die aus } V \text{ hinausströmt}} = 0$$

$\underbrace{\int_V d^3x\,\dot\eta}_{\frac{dE_{em}}{dt}}$, $\underbrace{\int_V d^3x\,\vec j\cdot\vec E}_{\frac{dE_{kin}}{dt}}$, falls alle Teilchen in V bleiben

Feldenergie: $\boxed{E_{em} = \frac{1}{2}\int d^3x\left(\vec E^2 + \vec B^2\right)}$

2) Das freie em. Feld

~~Vakuum: $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$~~

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$ ⟵ löst hom. MG

Eichtransformation: $\Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\dot{\Lambda}$, $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$

Coulomb-Eichung: $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}$

MG im Vakuum: $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$ (freie em. Felder)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta\Phi = 0 \Rightarrow \Phi = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = \vec{0}$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} = 0}$$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$

Betrachten Volumen Ω: $0 \leq x \leq L_1$, $0 \leq y \leq L_2$, $0 \leq z \leq L_3$

$V = L_1 L_2 L_3$

ON-Basis $e_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}$ mit $k_i = \frac{2\pi n_i}{L_i}$, $n_i \in \mathbb{Z}$

auf Ω

Ansatz: $\vec{A}(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} e_{\vec{k}}(\vec{x})\, \vec{C}_{\vec{k}}(t)$

Ab jetzt $c = 1$

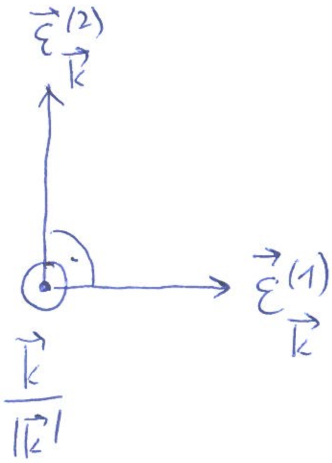
$$\vec A = \vec A^*, \quad \Box \vec A = 0, \quad \vec\nabla \cdot \vec A = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$c_{-\vec k} = c^*_{\vec k} \qquad \ddot{\vec c}_k(t) + \vec k^2\, \vec c_k(t) = 0 \qquad \vec k \cdot \vec c_k(t) = 0$$

Lsg.: $$\vec c_{\vec k}(t) = e^{-i\omega_{\vec k} t}\, \vec b_{\vec k} + e^{i\omega_{\vec k} t}\, \vec b^*_{-\vec k}$$

mit $\omega_{\vec k} = |\vec k|$, $\vec k \cdot \vec b_{\vec k} = 0$



$$\vec\varepsilon^{(1)}_{\vec k} \times \vec\varepsilon^{(2)}_{\vec k} = \frac{\vec k}{|\vec k|}$$

$$\left\{ \vec\varepsilon^{(1)}_{\vec k},\ \vec\varepsilon^{(2)}_{\vec k},\ \frac{\vec k}{|\vec k|} \right\} \text{ ON-Basis}$$

reelle Pol. vektoren (i.A. komplex, z.B. zirkulare Pol.)

$$\vec b_k = b^{(1)}_{\vec k}\, \vec\varepsilon^{(1)}_{\vec k} + b^{(2)}_{\vec k}\, \vec\varepsilon^{(2)}_{\vec k}$$

$$\boxed{\vec A(t,\vec x) = \sum_{\vec k,\lambda} \frac{1}{\sqrt V} \left[e^{i\vec k\cdot\vec x} e^{-i\omega_{\vec k} t}\, b^{(\lambda)}_{\vec k}\, \vec\varepsilon^{(\lambda)}_{\vec k} + e^{-i\vec k\cdot\vec x} e^{i\omega_{\vec k} t}\, b^{(\lambda)*}_{\vec k}\, \vec\varepsilon^{(\lambda)}_{\vec k} \right]}$$

Energie des em. Feldes auf Ω:

$$\boxed{E_{em} = \frac{1}{2}\int_\Omega d^3x\, \left(\vec E^2 + \vec B^2\right) = \sum_{\vec k,\lambda} 2\, |\vec k|^2\, |b^{(\lambda)}_{\vec k}|^2}$$ ohne Rechnung

Reelle Variable für Freiheitsgrade des Feldes:

$$q_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) \equiv b_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) + b_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t)^* \quad \text{mit } b_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) = e^{-i\omega t}\, b_{\vec{k}}^{(\lambda)}$$

$$p_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) \equiv -i\omega_{\vec{k}} \left[b_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) - b_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t)^* \right] = \dot{q}_{\vec{k}}^{(\lambda)}$$

$$\dot{p}_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) = \boxed{\ddot{q}_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) = -\omega_{\vec{k}}^2\, q_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t)}$$

∞ viele ungekoppelte harmonische Oszillatoren!

Umkehrung: $b_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) = \frac{1}{2}\left[q_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) + \frac{i}{\omega_{\vec{k}}} p_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) \right]$

$$\sum_{\vec{k},\lambda} 2\omega_{\vec{k}}^2 \left| b_{\vec{k}}^{(\lambda)} \right|^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_{\vec{k}}^2 \left[\left(q_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) \right)^2 + \frac{1}{\omega_{\vec{k}}^2} \left(p_{\vec{k}}^{(\lambda)}(t) \right)^2 \right]$$

unabh. von t

Hamiltonfunktion:

$$\boxed{H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},\lambda} \left(\left(p_{\vec{k}}^{(\lambda)}\right)^2 + \omega_{\vec{k}}^2 \left(q_{\vec{k}}^{(\lambda)}\right)^2 \right)} = E_{em}$$

Probe: Hamiltonsche Bew.gleichung $H(p,q)$

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \implies$$

$$\dot{q}_{\vec{k}}^{(\lambda)} = p_{\vec{k}}^{(\lambda)}, \quad \dot{p}_{\vec{k}}^{(\lambda)} = -\omega_{\vec{k}}^2\, q_{\vec{k}}^{(\lambda)} \quad ✓$$

3) Quantisierung $(\hbar = 1)$

$\vec{A}, \vec{E}, \vec{B} \longrightarrow$ Feldoperatoren

Komm.relationen des harm. Oszillators:

$$\boxed{\left[q_{\vec{k}}^{(\lambda)}, q_{\vec{k}'}^{(\lambda')}\right] = 0, \left[p_{\vec{k}}^{(\lambda)}, p_{\vec{k}'}^{(\lambda')}\right] = 0, \left[q_{\vec{k}}^{(\lambda)}, p_{\vec{k}'}^{(\lambda')}\right] = i\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,\delta_{\lambda\lambda'}}$$

Vernichtungsoperator:

$$\boxed{a_{\vec{k}}^{(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left(\omega_{\vec{k}}\, q_{\vec{k}}^{(\lambda)} + i\, p_{\vec{k}}^{(\lambda)}\right)}$$

$$\boxed{\left[a_{\vec{k}}^{(\lambda)}, a_{\vec{k}'}^{(\lambda')}\right] = 0, \left[a_{\vec{k}}^{(\lambda)}, a_{\vec{k}'}^{(\lambda')\dagger}\right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,\delta_{\lambda\lambda'}}$$

Erzeugungsoperator: $a_{\vec{k}}^{(\lambda)\dagger}$

$$\boxed{H = \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_{\vec{k}}\left(a_{\vec{k}}^{(\lambda)\dagger} a_{\vec{k}}^{(\lambda)} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{Hamiltonoperator des em. Feldes}}$$

$$\left[H, a_{\vec{k}}^{(\lambda)\dagger}\right] = \omega_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}}^{(\lambda)\dagger}$$

Grundzustand: $|0\rangle$ (Vakuumzustand)

$a_{\vec{k}}^{(\lambda)}|0\rangle = 0 \;\forall \vec{k},\lambda$

$$H|0\rangle = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\vec{k},\lambda} \omega_{\vec{k}}}_{\text{Grundzustandsenergie (Energie des Vakuums)} = \infty}|0\rangle$$

$\Rightarrow$ Subtraktion, $H \rightarrow \boxed{H = \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}}^{(\lambda)\dagger} a_{\vec{k}}^{(\lambda)}}$ $\quad H|0\rangle = 0$

Besetzungszahloperator: $N_{\vec{k}}^{(\lambda)} = a_{\vec{k}}^{(\lambda)+} a_{\vec{k}}^{(\lambda)}$

Gesamtteilchenzahloperator: $N = \sum_{\vec{k},\lambda} N_{\vec{k}}^{(\lambda)}$

Photonzustände: $[a^+a, a^+] = a^+$

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}_i}^{(\lambda_i)}!}} \left(a_{\vec{k}_i}^{(\lambda_i)+}\right)^{n_{\vec{k}_i}^{(\lambda_i)}} |0\rangle \equiv | n_{\vec{k}_1}^{(\lambda_1)}, \dots, n_{\vec{k}_r}^{(\lambda_r)} \rangle$$

$$N_{\vec{k}}^{(\lambda)} | n_{\vec{k}_1}^{(\lambda_1)}, \dots, n_{\vec{k}_r}^{(\lambda_r)} \rangle = \sum_{i=1}^{r} n_{\vec{k}_i}^{(\lambda_i)} \delta_{\vec{k}\vec{k}_i} \delta_{\lambda\lambda_i} |\dots\rangle$$

$$N |\dots\rangle = \sum_{i=1}^{r} n_{\vec{k}_i}^{(\lambda_i)} |\dots\rangle$$

Vektorpotentials als Feldoperator:

$$b_{\vec{k}}^{(\lambda)} \to \frac{1}{2} \underbrace{\left(q_{\vec{k}}^{(\lambda)} + \frac{i}{\omega_{\vec{k}}} p_{\vec{k}}^{(\lambda)} \right)}_{\text{Operatoren}}{}_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}}^{(\lambda)}$$

$$a + a^+ = \sqrt{2\omega}\, q \Rightarrow q = \frac{a+a^+}{\sqrt{2\omega}}$$

$$a - a^+ = \sqrt{\frac{2\cancel{\omega}}{\omega}}\, i p \Rightarrow p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a-a^+)$$

$$\boxed{\vec{A}(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}} V}} \left[e^{-ik\cdot x} \vec{\varepsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} a_{\vec{k}}^{(\lambda)} + e^{ik\cdot x} \vec{\varepsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} a_{\vec{k}}^{(\lambda)+} \right]}$$

(reelle Pol. vektoren)

4) <u>Kontinuumslimes:</u> $\Omega \to \mathbb{R}^3$ Volumen $(\Omega) = L_1 L_2 L_3 = V$

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L_i}, \quad \sum_{\vec{k}} \to \int dn_1 \int dn_2 \int dn_3 = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$$

$$\left[a_{\vec{k}}^{(\lambda)}, a_{\vec{k}'}^{(\lambda')+} \right] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} = \delta_{\lambda\lambda'} \frac{1}{V} \int_\Omega d^3x \, e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}$$

$$\longrightarrow \delta_{\lambda\lambda'} \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$a_{\vec{k}}^{(\lambda)} \to \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}} a(\vec{k},\lambda) \quad \text{mit} \quad \boxed{\left[a(\vec{k},\lambda), a^+(\vec{k}',\lambda') \right] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k}-\vec{k}')}$$

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \sum_\lambda \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \, \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}} V}} \left[e^{-ik\cdot x} \varepsilon_{\vec{k}}^{(\lambda)} \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}} a(\vec{k},\lambda) + h.c. \right]$$

$$\boxed{\vec{A}(t,\vec{x}) = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega(\vec{k})}} \left(e^{-ik\cdot x} \vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda) \, a(\vec{k},\lambda) + h.c. \right)}$$