IV. Drehungen und Lorentztransformationen von physikalischen Objekten

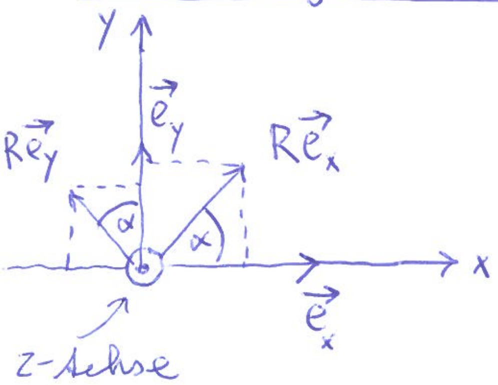
1) Der Zusammenhang zwischen SO(3) und SU(2)

a) Drehungen im $\mathbb{R}^3$

SO(3) = Gruppe der (reellen) orthogonalen 3×3 Matrizen R mit $\det R = 1$

$R^T R = 1$, $\det R = 1 \Rightarrow$ Drehung

Drehung um z-Achse:



$$R\vec{e}_x = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R\vec{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

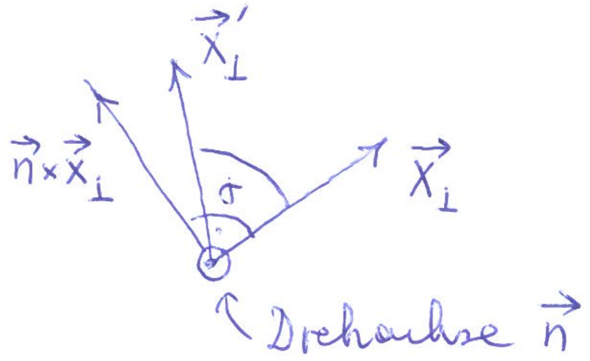
aktive Drehung

Transformation auf gedrehtes Koordinatensystem: $x_i' = (R\vec{e}_i)\cdot\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y \\ -\sin\alpha\, x + \cos\alpha\, y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\bar{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\bar{R} = R^{-1}}$$

Allgemeine Drehung:



$$\vec{x}\,' = \cancel{\vec{n}\,\vec{n}\cdot\vec{x}}\ \vec{x}_{\parallel} + \cos\alpha\, \vec{x}_\perp + \sin\alpha\, \vec{n}\times\vec{x}_\perp$$

Projektion auf Ebene $\perp \vec{n}$, $\vec{x}_{\parallel} = \vec{n}\,\vec{n}\cdot\vec{x}$

$$\vec{x}\,' = \vec{n}\,\vec{n}\cdot\vec{x} + \cos\alpha\left(\vec{x} - \vec{n}\,\vec{n}\cdot\vec{x}\right) + \sin\alpha\, \vec{n}\times\vec{x}$$

$$\boxed{R(\alpha,\vec{n})_{ij} = \cos\alpha\, \delta_{ij} + (1-\cos\alpha)\, n_i n_j + \sin\alpha\, \varepsilon_{ikj}\, n_k}$$

Drehachse $\vec{n}$ $(\vec{n}^2 = 1)$, Drehwinkel α (Rechtsschraubenregel)

b) SU(2)

SU(2) = Gruppe der unitären 2×2-Matrizen U mit $\det U = 1$

Jedes $U \in SU(2)$ läßt sich schreiben als

$$\boxed{U(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\ ,\ \vec{\alpha}\in\mathbb{R}^3} \qquad \vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma} \equiv \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3$$

$\sigma_{1,2,3}$ Paulimatrizen

$$\boxed{\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\,1_2 + i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k \Rightarrow \left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\frac{\sigma_k}{2}}$$

$\to \operatorname{Sp}(\sigma_i\sigma_j) = 2\,\delta_{ij}$

Drehimpuls-
vertauschungsrelationen

$\vec{\alpha} = \alpha \vec{n}$ mit $\vec{n}^2 = 1$, $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = 1_2$

$$U(\vec{\alpha}) = e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^{2k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-i)(-1)^{2k}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^{2k+1}$$

$$\boxed{U(\vec{\alpha}) = \cos\frac{\alpha}{2}\, 1_2 - i\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$$

c) Drehungen von Spinoren

Spinor $\psi \in \mathbb{C}^2$

$\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$ Spin $\Rightarrow$ $\langle\psi|\vec{S}\psi\rangle$ Vektor unter Drehungen

$\Rightarrow$ zu einer Drehung R muss es mindestens eine Matrix $U \in SU(2)$ geben, so dass

$$\boxed{\langle U\psi|\vec{S}\,U\psi\rangle = R\,\langle\psi|\vec{S}\psi\rangle}$$

Mathem. Problem: gegeben R, gesucht U, welches Gl. erfüllt

Satz: A linearer Operator auf unitärem Raum V,

$$\langle v|Av\rangle = 0 \;\forall v \in V \Rightarrow A = 0$$

$$U^\dagger \sigma_i U = R_{ij}\sigma_j \quad \forall i \quad \Big| \cdot R_{ik}$$

$$\sigma_i R_{ik} = U \sigma_k U^\dagger \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}\cdot(R\vec{x}) = U\,\vec{\sigma}\cdot\vec{x}\,U^\dagger}$$

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{x}\cdot\vec{\sigma} = X \Rightarrow \vec{\sigma}\cdot(R\vec{x}) = U X U^\dagger \quad \text{Konsistenz?}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Sp}\, X = 0,\ \det X = -\vec{x}^2$$

$$X' = U X U^\dagger \Rightarrow \mathrm{Sp}\, X' = 0,\ \det X' = \det X$$

$$\Rightarrow \exists\, \vec{x}':\ X' = \vec{x}'\cdot\vec{\sigma} \text{ und } \vec{x}'^2 = \vec{x}^2 = (R\vec{x})^2$$

$$\boxed{X \to U X U^\dagger \text{ induziert lineare Abb. } \vec{x} \to R_U \vec{x} \text{ mit } R_U \in O(3)}$$

$$U = \pm 1 \Rightarrow R_U = 1 \in SO(3)$$

$$SU(2) \text{ zhgd.} \Rightarrow R_U \in SO(3)$$

$$\boxed{\begin{matrix} U \to R_U \\ SU(2) \to SO(3) \end{matrix}}$$

Durch Nachrechnen:

$$\boxed{U = U(\alpha,\vec{n}) \Rightarrow R_U = R(\alpha,\vec{n})}$$

<u>Satz:</u> $U \to R_U$ ist ein Gruppenhomomorphismus, d.h. $U_1 U_2 \to R_{U_1} R_{U_2}$ mit Kern $\{1_2, -1_2\}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \{U(\alpha,\vec{n}), -U(\alpha,\vec{n})\} \longleftrightarrow R(\alpha,\vec{n}) \\ SU(2) / \{1_2, -1_2\} \cong SO(3) \end{matrix}}$$

Naturgesetze invariant unter $SU(2)$!

Beweis: $(U_1 U_2) X (U_2 U_1)^\dagger = U_1 (U_2 X U_2^\dagger) U_1^\dagger =$

$= U_1 \ \vec{\sigma}\cdot(R_{U_2}\vec{x}) \ U_1^\dagger = \vec{\sigma}\cdot(R_{U_1} R_{U_2}\vec{x})$

Ang. $U X U^\dagger = U' X U'^\dagger \Rightarrow (U'^\dagger U) X (U'^\dagger U)^\dagger = X \ \forall \vec{x}$

$U'^\dagger U \equiv V \in SU(2)$, $V \sigma_i V^\dagger = \sigma_i \ \forall i = 1,2,3$

$V = a 1_2 - i \vec{b}\cdot\vec{\sigma}$

$\Rightarrow [V, \sigma_i] = 0 \ \forall i$ bzw. $-i b_j \varepsilon_{jik} \sigma_k = 0 \ \forall i$

$\varepsilon_{ijk} b_j \sigma_k = 0 \ \forall i \qquad b_2\sigma_3 - b_3\sigma_2 = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{0}$

$a^2 = 1 \Rightarrow V = \pm 1_2$, $U' = \pm U$ □

2) Drehungen von physikalischen Objekten

Vektoren: $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{A} \to R(\alpha,\vec{n})\vec{A}$

Spinoren: $\psi \in \mathbb{C}^2$, $\psi \to U(\alpha,\vec{n})\psi$

Skalare Felder: $\phi(\vec{x}) \to \phi(R(\alpha,\vec{n})^{-1}\vec{x})$

Vektorfelder: $\vec{A}(\vec{x}) \to R(\alpha,\vec{n})\,\vec{A}(R(\alpha,\vec{n})^{-1}\vec{x})$

Spinorfelder: $\psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix}\psi_1(\vec{x})\\ \psi_2(\vec{x})\end{pmatrix} \to U(\alpha,\vec{n})\,\psi(R(\alpha,\vec{n})^{-1}\vec{x})$

Generatoren der Drehungen:

$U(\alpha,\vec{n}) = e^{-i\alpha\vec{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}$, Generatoren $\frac{\vec{\sigma}}{2}$

$\left[\frac{\sigma_k}{2}, \frac{\sigma_l}{2}\right] = i\,\varepsilon_{klm}\frac{\sigma_m}{2}$ Kommutatorrelationen des Drehimpulses

Man kann zeigen:

$$\boxed{R(\alpha,\vec{n}) = e^{-i\alpha\vec{n}\cdot\vec{T}} \quad \text{mit} \quad (T_k)_{ij} = -i\varepsilon_{ijk}}$$

$$\boxed{[T_k, T_\ell] = i\varepsilon_{k\ell m} T_m} \qquad \text{Generatoren } \vec{T}$$

Generatoren für skalare Felder:

Taylor-Reihenentwicklung von $\phi(R(\alpha,\vec{n})^{-1}\vec{x})$ nach α

$$\vec{y}(\alpha) \equiv e^{i\alpha\vec{n}\cdot\vec{T}}\vec{x}, \quad \vec{y}(0) = \vec{x}, \quad \frac{d\vec{y}(\alpha)}{d\alpha} = i\vec{n}\cdot\vec{T}\,\vec{y}(\alpha)$$

$$\frac{d}{d\alpha}\phi(\vec{y}(\alpha)) = (i\vec{n}\cdot\vec{T}\vec{y}(\alpha))\cdot\vec{\nabla}_y\,\phi(\vec{y}(\alpha))$$

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}\phi(\vec{y}(\alpha)) = \left[(i\vec{n}\cdot\vec{T}\,\vec{y}(\alpha))\cdot\vec{\nabla}_y\right]^n\phi(\vec{y}(\alpha))$$

$$\left.\frac{d^n}{d\alpha^n}\phi(\vec{y}(\alpha))\right|_{\alpha=0} = (-i)^n\left[-(\vec{n}\cdot\vec{T}\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\right]^n\phi(\vec{x})$$

$$-(\vec{n}\cdot\vec{T}\,\vec{x})\cdot\vec{\nabla} = -n_k(-i\varepsilon_{ijk})x_j\nabla_i = n_k\varepsilon_{kji}\,x_j(-i\nabla_i)$$

$$= \vec{n}\cdot\vec{L} \quad \text{mit} \quad \boxed{L_k = \varepsilon_{kij}\,x_i(-i\nabla_j)} \quad \text{Bahndrehimpuls}$$

$$\boxed{\phi(R(\alpha,\vec{n})^{-1}\vec{x}) = e^{-i\alpha\vec{n}\cdot\vec{L}}\,\phi(\vec{x})}$$

Generatoren $\vec{L}$ für Drehungen im Ortsraum

Spinorfelder:
$$\boxed{\begin{aligned}&U(\alpha,\vec{n})\,\psi\big(R(\alpha,\vec{n})^{-1}\vec{x}\big) = e^{-i\alpha\vec{n}\cdot(\vec{L}+\frac{1}{2}\vec{\sigma})}\,\psi(\vec{x})\\ &\text{Generatoren } \vec{J} = \vec{L}+\tfrac{1}{2}\vec{\sigma}\end{aligned}}$$

Vektorfelder:
$$\boxed{\begin{aligned}&R(\alpha,\vec{n})\,\vec{A}\big(R(\alpha,\vec{n})^{-1}\vec{x}\big) = e^{-i\alpha\vec{n}\cdot(\vec{L}+\vec{T})}\,\vec{A}(\vec{x})\\ &\text{Generatoren } \vec{J} = \vec{L}+\vec{T}\end{aligned}}$$

3) Gruppen und Darstellungen

a) Darstellungen

Def.:
$$D:\ \underset{\text{Gruppe}}{G} \longrightarrow \underset{\text{lin. Operatoren auf Vektorraum } V}{L(V)}$$
$$g \longrightarrow D(g) \qquad \text{mit} \quad D(g_1 g_2) = D(g_1)D(g_2),\quad D(e) = 1$$

Matrizengruppen selbst schon Darstellungen:
z. B. $SU(N)$ Darst. auf $V = \mathbb{C}^n$

$V = \mathbb{C}^n$, $D(g)$ $n\times n$-Matrizen $\Rightarrow$
mit $D(g)$ drei weitere Darstellungen gegeben:

$D(g)^*$ komplex konj. Darst.

$D(g)^{-1T}$ kontragrediente Darst.

$D(g)^{-1+}$ komplex konj. kontragred. Darst.

Unitäre Darstellung:

V unitärer Vektorraum, $D(g)$ unitäre Operatoren

In diesem Fall gilt $D(g)^{-1\dagger} = D(g)$, $D(g)^{-1T} = D(g)^*$

Äquivalente Darstellungen:

$$D_{\substack{1\\2}}(g) \in L(V_{\substack{1\\2}})$$

$\exists\, S : V_2 \to V_1$, so dass $\quad D_2(g) = S^{-1} D_1(g)\, S \quad \forall g \in G$

Schreibweise: $D_1 \sim D_2$

Beispiel: $\quad SU(2) \to$ Darst.^{D} auf $\mathbb{C}^2$, $\; D \sim D^*$

$$\varepsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{-1} = \varepsilon^\dagger = -\varepsilon$$

$$\varepsilon^{-1}\, \vec{\sigma}^{\,*}\, \varepsilon = -\vec{\sigma}$$

$$U = \cos\frac{\alpha}{2}\, 1 - i \sin\frac{\alpha}{2}\, \vec{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}$$

$$\varepsilon^{-1} U^* \varepsilon = \varepsilon^{-1}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\, 1 + i \sin\frac{\alpha}{2}\, \vec{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}^{\,*}}{2}\right)\varepsilon$$

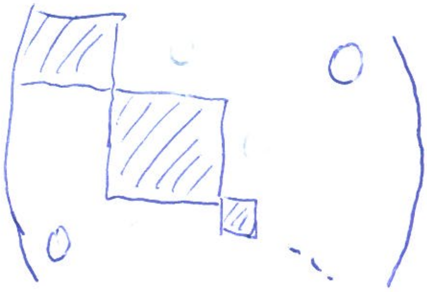
$$= \cos\frac{\alpha}{2}\, 1 + i \sin\frac{\alpha}{2}\, \vec{n}\cdot \varepsilon^{-1}\frac{\vec{\sigma}^{\,*}}{2}\varepsilon = \cos\frac{\alpha}{2}\, 1 - i\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}$$

$$\boxed{\varepsilon^{-1} U^* \varepsilon = U}$$

Irreduzible Darstellung:

Es gibt keinen nichttrivialen invarianten Teilraum von V. D.h., nur V und $\{0\}$ invariant.

Typischer Fall: reduzible, unitäre Darstellung

$D(g) =$  irred. Blöcke

b) Liegruppen und Liealgebren

Liealgebra: $\mathbb{K} =$

Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit einem Produkt $[X,Y]$, so dass

1) $[X,Y] = -[Y,X]$, (Antisymmetrie),
2) $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha [X,Y] + \beta [X,Z]$. (Linearität),
3) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (Jacobi-Identität)

gilt. $[\,.\,,\,.\,] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$

Betrachten im Weiteren nur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (reelle Liealgebren).
Jacobi-Identität für Matrizen immer erfüllt

Liegruppe:

Eine r-parametrige Liegruppe G (Matrizengruppe) ist eine Gruppe, deren Elemente sich in einer Umgebung von 1 als $g = e^{\sum_{k=1}^{r} \alpha_k X_k}$ schreiben lassen, wobei $\{X_k\}$ eine Basis der zur Liegruppe G gehörenden Liealgebra ist.

Beispiel: $\mathcal{L} = \{X \mid$ komplexen $n \times n$-Matrizen, $X^\dagger = -X$, $\mathrm{Sp}\, X = 0\}$

$n=2$: $\mathcal{L} = \left\{ \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \left(-i \frac{\sigma_k}{2}\right) \right\} \longrightarrow$ zu $SU(2)$ gehörig

$X, Y \in \mathcal{L} \Rightarrow [X,Y] \equiv XY - YX$

$$[X,Y]^\dagger = Y^\dagger X^\dagger - X^\dagger Y^\dagger = -[X,Y]$$

$\mathrm{Sp}[X,Y] = 0 \Rightarrow \mathcal{L}$ abgeschlossen $\Rightarrow$ Liealgebra

__Baker-Campbell-Hausdorff-Formel:__ A, B Matrizen

A, B genügend „klein" $\Rightarrow$

$$e^A e^B = e^C \quad \text{mit } C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{12}[B,[B,A]] + \ldots$$

Die Punkte stehen für eine unendliche Reihe aus Kommutatoren

BCH $\Rightarrow$ Liegruppe tatsächlich abgeschlossen unter Multiplikation

$X, Y \in \mathcal{L}, \quad e^X e^Y = e^{C(X,Y)}$ in genügend kleiner Umgebung von 1

__Darstellungen von Liegruppen:__

Darstellungen der Liealgebra $\Rightarrow$ Darstellungen der Gruppe durch Exponentiation

Beispiel $SU(2)$: $\left[-i\frac{\sigma_k}{2}, -i\frac{\sigma_l}{2}\right] = \varepsilon_{klm}\left(-i\frac{\sigma_m}{2}\right)$

bzw. $\left[\frac{\sigma_k}{2}, \frac{\sigma_l}{2}\right] = i\,\varepsilon_{klm}\frac{\sigma_m}{2}$ Drehimpulskomm.relationen

Darstellung $\frac{\sigma_k}{2} \to J_k$ mit $[J_k, J_l] = i\,\varepsilon_{klm} J_m$

Darstellung eindeutig charakterisiert durch $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\}$

$\underline{j}$: Dimension $2j+1$ $\quad \vec{J}^2$

Basisvektoren $|j,m\rangle$ mit $m = j, j-1, \dots, -j+1, -j$

$J_z |jm\rangle = m |jm\rangle$

$J_\pm = \frac{1}{2}(J_1 \pm i J_2)$, $\quad J_\pm |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\, |j\, m\pm 1\rangle$

$\Rightarrow J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$, $J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$ gegeben

$\underline{0}$: $\quad U \to 1$

$\underline{\frac{1}{2}}$: $\quad U \to U$

$\underline{1}$: $\quad U \to \tilde{R} = W^+ R W$ (W ist Basistransf., R gewöhnliche Drehung im $\mathbb{R}^3$)

4) Der Zusammenhang zw. $SL(2,\mathbb{C})$ und $\mathcal{L}_+^\uparrow$

$\boxed{SL(2,\mathbb{C}) = \text{Gruppe der komplexen } 2\times 2\text{-Matrizen mit Determinante } +1}$

$SL(2,\mathbb{C}) \supset SU(2)$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $A \in SL(2,\mathbb{C}) \Rightarrow \det A = ad - bc = 1$

zwei reelle Bedingungen!

$8 - 2 = 6$ reelle Parameter zur Festlegung von $A \in SL(2,\mathbb{C})$

$SL(2,\mathbb{C})$ zhgd.

$\sigma^0 \equiv 1_2$, $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \{\sigma^\mu\}$

$\sigma_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} \sigma^\nu \qquad (\sigma_\mu) = (1, -\vec{\sigma})$

$x \in \mathbb{R}^4$: $X \equiv x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + i x^2 \\ -x^1 - i x^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} = X^\dagger$

Jede hermitische 2x2-Matrix X lässt sich als $x^\mu \sigma_\mu$ schreiben

$A \in SL(2,\mathbb{C})$: $X \to X' = \underbrace{A X A^\dagger}_{\text{hermitisch}} = x'^\mu \sigma_\mu$

$\det X = (x^0)^2 - \vec{x}^2 = \det X' = (x'^0)^2 - \vec{x}'^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{A \text{ induziert Lorentztransf. } L_A}$

$$A x^\mu \sigma_\mu A^\dagger = (L_A)^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu$$

Man kann zeigen:
(Fast) jedes $A \in SL(2,\mathbb{C})$ lässt sich schreiben als

$$\boxed{A = e^{-i(\vec{\alpha} - i\vec{u})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}}$$

Wegen $\det e^B = e^{\mathrm{Sp}\, B}$ gilt $\det A = 1$

Fall A: $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow A = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \in SU(2)$,

$L_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_A \end{pmatrix}$ Drehung der räumlichen Komp. von (x^μ)

Fall B: $\vec{\alpha} = \vec{0}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = e^{-u\sigma^1/2} = \cosh\frac{u}{2}\, 1_2 - \sinh\frac{u}{2}\, \sigma^1$

$$A X A^\dagger = \left(\mathrm{ch}\tfrac{u}{2}\,1_2 - \mathrm{sh}\tfrac{u}{2}\,\sigma^1\right)\left(x^0 1_2 - \vec{x}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\mathrm{ch}\tfrac{u}{2}\,1_2 - \mathrm{sh}\tfrac{u}{2}\,\sigma^1\right)$$

$$= \left(x^0 1_2 - x^1\sigma^1\right)\left(\mathrm{ch}\tfrac{u}{2}\,1_2 - \mathrm{sh}\tfrac{u}{2}\,\sigma^1\right)^2 - \left(x^2\sigma^2 + x^3\sigma^3\right)\left(\mathrm{ch}^2\tfrac{u}{2} - \mathrm{sh}^2\tfrac{u}{2}\right)$$

$$= \left(x^0 1_2 - x^1\sigma^1\right)\left(\left(\mathrm{ch}^2\tfrac{u}{2} + \mathrm{sh}^2\tfrac{u}{2}\right)1_2 - 2\,\mathrm{ch}\tfrac{u}{2}\,\mathrm{sh}\tfrac{u}{2}\,\sigma^1\right) - \left(x^2\sigma^2 + x^3\sigma^3\right)$$

$$= \left(x^0 1_2 - x^1\sigma^1\right)\left(\mathrm{ch}\,u\,1_2 - \mathrm{sh}\,u\,\sigma^1\right) - \left(x^2\sigma^2 + x^3\sigma^3\right)$$

$$= \left(x^0\,\mathrm{ch}\,u + x^1\,\mathrm{sh}\,u\right)1_2 - \left(x^0\,\mathrm{sh}\,u + x^1\,\mathrm{ch}\,u\right)\sigma^1 - \left(x^2\sigma^2 + x^3\sigma^3\right)$$

$$\Rightarrow L_A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,u & \mathrm{sh}\,u & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\,u & \mathrm{ch}\,u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformation ~~auf~~ auf mit $\vec{v} = -c\vec{e}_x \tanh u$ bewegtes Koordinatensystem

$$A = e^{-i(\vec{\alpha} - i\vec{u})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}$$

„aktive Transformation"

Aus Fällen A, B folgt $SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$ ist surjektiv

Ang. $A x^\mu \sigma_\mu A^\dagger = x^\mu \sigma_\mu \;\; \forall x$

$\Rightarrow AA^\dagger = 1$, d. h. A unitär, $A\sigma^i A^\dagger = \sigma^i \Rightarrow A = \pm 1_2$

$$\boxed{SL(2,\mathbb{C}) / \{1_2, -1_2\} \cong \mathcal{L}_+^\uparrow}$$

$SL(2,\mathbb{C})$-Invarianz der Naturgesetze

Spinoren transformieren sich nach $SL(2,\mathbb{C})$

$SL(2,\mathbb{C})$ nicht unitär $\Rightarrow$ inkonsistent mit Interpretation von ψ als Zustand $\longrightarrow$ QFT