II. Spezielle Relativitätstheorie und relativistische Kinematik

Landau, Lifschitz, Band II, Klassische Feldtheorie

1) Das Relativitätsprinzip

Inertialsystem: kräftefreie Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$

Relativitätsprinzip: Erfahrung!

Naturgesetze gelten in jedem IS in der gleichen Form → Die Gleichungen, durch die die Naturgesetze ausgedrückt werden, sind invariant gegenüber einer Transformation der Koordinaten und der Zeit von einem IS in ein anderes (Forminvarianz der Gleichungen)

Prinzip der endlichen Wirkungsgeschwindigkeit:

keine Fernwirkung

Maximalgeschwindigkeit der Wirkungsausbreitung w

$\Rightarrow$ Körper bewegen sich mit Geschwindigkeit $\leq w$

Signalgeschwindigkeit $\leq w$

RP $\Rightarrow$ w gleich in jedem IS, universelle Konstante (festgelegt 1983 → SI-Einheit m)

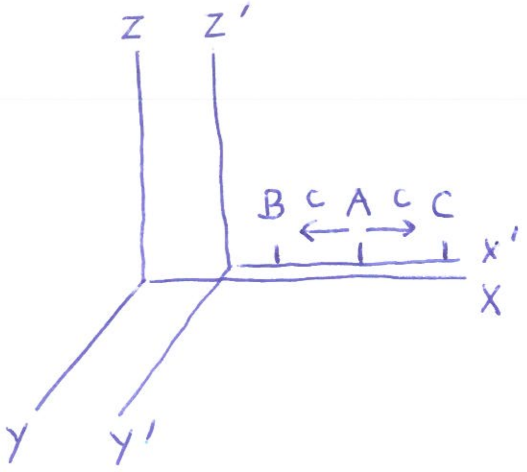
$w \equiv c = 299\,792\,458\ \mathrm{m s^{-1}}$ Lichtgeschwindigkeit

RP + $w < \infty$ → „Einsteinsches Relativitätsprinzip"

Michelson 1881; Michelson, Morley 1887

ERP $\Rightarrow$ Es existiert keine absolute Zeit

(absolute Zeit $\Rightarrow$ Gleichzeitigkeit universell)



Intertialsysteme K, K'

K': $\overline{AB} = \overline{BC}$

Signal bei B und C gleichzeitig

K: K' bewege sich mit v rel. zu K

Signal früher bei B als bei C

$\Rightarrow$ keine absolute Gleichzeitigkeit

2) Der Abstand zweier Ereignisse

4-dimensionaler Raum:

Punkte $(t, \vec{x})$

Ereignis $\rightarrow$ Punkt

Trajektorie $\rightarrow$ Weltlinie eines Punktteilchens

$(t_i, \vec{x}_i) \Rightarrow s_{12}^2 \equiv c^2(t_2-t_1)^2 - (\vec{x}_2-\vec{x}_1)^2$

Abstandsquadrat zwischen zwei Ereignissen

Lichtausbreitung von $(t_1, \vec{x}_1)$ nach $(t_2, \vec{x}_2) \Rightarrow s_{12}^2 = 0$

Gilt in allen ISen!

$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ $\qquad ds^2 \equiv (ds)^2$, etc.

$ds^2 = 0$ in K $\Rightarrow ds^2 = 0$ in K'

$ds^2 \neq 0 \Rightarrow ds^2 = a\, ds'^2$

RP $\Rightarrow$ a hängt nicht von den Weltpunkten ab

Isotropie des Raumes $\Rightarrow$ a hängt nur vom Betrag der Relativ-geschwindigkeit ab

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\vec{v}_1"] \arrow[rr, bend right, "\vec{v}_2"'] & K_1 \arrow[r, "\vec{v}_{12}"] & K_2 \end{tikzcd}$$

$$ds^2 = a(v_1)\, ds_1^2 \qquad v_1 \equiv |\vec{v}_1|, \text{ etc.}$$

$$ds^2 = a(v_2)\, ds_2^2$$

$$ds_1^2 = a(v_{12})\, ds_2^2$$

$$1 = \frac{a(v_2)}{a(v_1)} \frac{ds_2^2}{ds_1^2} \Rightarrow \frac{a(|\vec{v}_2|)}{a(|\vec{v}_1|)} = a(|\vec{v}_{12}|)$$

$|\vec{v}_{12}|$ hängt vom Winkel $\sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ab, $\frac{a(v_2)}{a(v_1)}$ davon unabh.

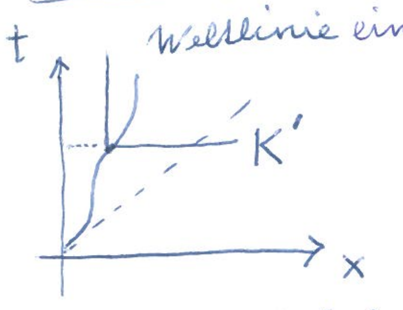
$\Rightarrow a(v) = \text{konst.} \Rightarrow \boxed{a(v) = 1}$

$\Rightarrow ds^2 = ds'^2$ bzw. $\boxed{s^2 = s'^2}$

D.h. $(t_1, \vec{x}_1), (t_2, \vec{x}_2)$ in $K \longleftrightarrow (t_1', \vec{x}_1'), (t_2', \vec{x}_2')$ in K'

$$\Rightarrow c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 - (\vec{x}_2' - \vec{x}_1')^2$$

3) Die Eigenzeit und die Zeitdilatation



K(B)

K': $dt' > 0, d\vec{x}' = \vec{0}$ (momentan mitbewegtes IS)

K: $dt > 0, d\vec{x} \neq \vec{0}$ i. A.

$$c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2 = c^2(dt')^2$$

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}}$$

<u>Eigenzeit</u>: Zeit, die auf der auf der Weltlinie mitgeführten Uhr angezeigt wird

K': $dt' \equiv d\tau$

$$\boxed{d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}}}$$

$$\tau_2-\tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}} \qquad B \text{ in IS !}$$

Beispiel: Myonen in der Atmosphäre

Primäre kosm. Strahlung $p, \alpha, \ldots$ (Viktor Hess 1912)

Streuung an N, O-Kernen $\Rightarrow \pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, $\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu$

$\tau_{\pi^\pm} = 2.603 \times 10^{-8}\,s$, $\tau_\mu = 2.197 \times 10^{-6}\,s$

$\mu^+ \to e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$

$\mu^- \to e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$

Produktion $\mu^\pm$ in ~~Zerfall~~ ~ 10 km Höhe

Die Distanz zw. Produktionspunkt des Myons und dem Schnittpunkt seiner Trajektorie mit der Erdoberfläche sei l, seine Energie sei E. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Myon die Erdoberfläche erreicht?

Ruhendes Myon: $\frac{1}{\tau_\mu} e^{-t/\tau_\mu} dt$ = Wahrscheinlichkeit des Zerfalls im Intervall $[t, t+dt]$ $(t>0)$

τ_μ = Lebensdauer

Bewegtes Myon: $t_\mu = \gamma \tau_\mu = \cancel{\frac{E}{m}\tau_\mu}$ Zeitdilatation

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{1}{\gamma\tau_\mu v} e^{-\frac{tv}{\gamma\tau_\mu v}} v\,dt = \frac{1}{\gamma\tau_\mu v} e^{-\frac{x}{\gamma\tau_\mu v}} dx$$

Wahrscheinlichkeit $P(l,v)$, dass Myon Erdoberfläche erreicht:

$$\boxed{P(l,v) =} \frac{1}{\gamma\tau_\mu v}\int_l^\infty dx\, e^{-\frac{x}{\gamma\tau_\mu v}} = -e^{-\frac{x}{\gamma\tau_\mu v}}\Big|_l^\infty \boxed{= e^{-\frac{l}{\gamma v\tau_\mu}}}$$

$$\gamma v = \frac{p}{m} = c\sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1}$$

Vorwegnahme! Siehe Unterkap. 5

$$\boxed{P(\ell, E) = \exp\left(- \frac{\ell}{\tau_\mu c \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1}} \right)}$$

$\tau_\mu c = 658.654\,m$

$mc^2 = 105.66\,MeV$

typische Flug-länge ohne Zeitdilatation für $v \simeq c$

Beispiel: $\ell = 10\,km$, $E = 1\,GeV$

$$\frac{\ell}{\tau_\mu c \sqrt{\ldots}} \simeq \frac{10^4}{659 \times 10} \simeq 1.52$$

$$P \simeq e^{-1.52} \simeq 0.22$$

$\ell = 10\,km$, $E = 10\,GeV$ $\Rightarrow P \simeq e^{-0.152} \simeq 0.86$

4) Lorentz-Transformationen

$$\underset{(t, \vec{x})}{K} \xrightarrow{L} \underset{(t', \vec{x}\,')}{K'}$$

$x^0 \equiv ct$, $x'^0 \equiv ct'$

$x \equiv (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ 4-Vektor

$$\eta \equiv (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Def.: Bilinearform $\boxed{x \cdot y \equiv x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu}$, $x \cdot y = y \cdot x$

$x^2 \equiv x \cdot x$

$$\boxed{\text{Invarianter Abstand: } x^2 = x'^2}$$

$$x \cdot y = \frac{1}{4}\left[(x+y)\cdot(x+y) - (x-y)\cdot(x-y)\right]$$

$\Rightarrow$ für zwei beliebige 4-Koordinatenvektoren gilt

$$x \cdot y = x' \cdot y'$$

L lineare Transformation:

gleichförmig geradlinige Bewegung bleibt erhalten

Sexl, Urbantke, Relativität, Gruppen, Teilchen

L 4×4-Matrix, $x' = Lx$ bzw. $x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$

$$x \cdot y = (Lx)\cdot(Ly) \quad \forall x,y$$

Matrizenschreibweise: $x \cdot y = x^T \eta y$

$$\underset{1\times 4}{x^T}\ \underset{4\times 4}{\eta}\ \underset{4\times 1}{y} = (Lx)^T \eta (Ly) = x^T (L^T \eta L) y \quad \forall x,y$$

$\Rightarrow$ Lorentztransformationen erfüllen $\boxed{L^T \eta L = \eta}$

Eigenschaften der Lorentztransformation

$$\mathcal{L} = \{ L \mid 4\times 4\text{-Matrizen mit } L^T \eta L = \eta \}$$

$\mathcal{L}$ bildet Gruppe:

1) Abgeschlossenheit

$$(L_1 L_2)^T \eta (L_1 L_2) = L_2^T (L_1^T \eta L_1) L_2 = L_2^T \eta L_2 = \eta$$

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L} \Rightarrow L_1 L_2 \in \mathcal{L}$$

2) Einheitselement $= 1$

$$1 \eta 1 = \eta$$

3) Inverses Element

$$(L^T)^{-1} \cdot \big| L^T \eta L = \eta \big| \cdot L^{-1} \Rightarrow \eta = (L^T)^{-1} \eta L^{-1} = (L^{-1})^T \eta L^{-1}$$

$$L \in \mathcal{L} \Leftrightarrow L^{-1} \in \mathcal{L}$$

4) Assoziativität: $(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3)$
für Matrizenmultiplikation immer erfüllt

$T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \in \mathcal{L}$ Zeitumkehr

$P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) \in \mathcal{L}$ Raumspiegelung

$L \in \mathcal{L} \Rightarrow L^T \in \mathcal{L}$ wegen $L^T = P L^{-1} P$

$L^{-1} = \eta L^T \eta$ bzw. $L^{-1} = P L^T P$

$\mathcal{L} \to$ 6 dim. Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{16}$

$L^\rho{}_\mu \, \eta_{\rho\lambda} \, L^\lambda{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \longrightarrow$ 10 Bedingungen

$\mathcal{L}$ zerfällt in 4 nichtzhgde Teile:

$\boxed{(\det L)^2 = 1, \quad (L^0{}_0)^2 \geq 1} \Rightarrow$ 4 Zhgskomponenten

Beweis: $\det(L^T \eta L) = (\det L)^2 \det \eta = \det \eta$

$L^\rho{}_0 \, \eta_{\rho\lambda} \, L^\lambda{}_0 = (L^0{}_0)^2 - (L^1{}_0)^2 - (L^2{}_0)^2 - (L^3{}_0)^2 = \eta_{00} = 1$

$\Rightarrow (L^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (L^i{}_0)^2 \geq 1 \quad \square$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}_+^\uparrow &= \{ L \in \mathcal{L} \mid \det L = 1, \; L^0{}_0 \geq 1 \} \\ &= \text{eigentliche orthochrone Lorentzgruppe} \end{aligned}}$$

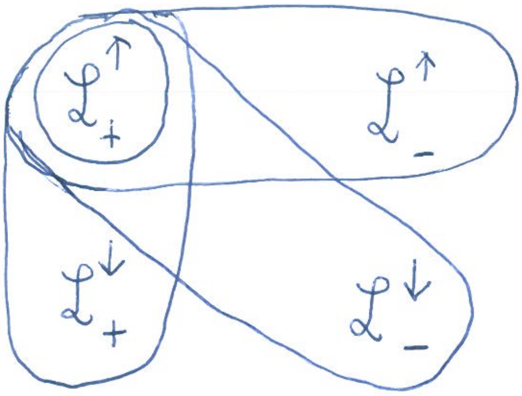
$\mathcal{L}_+ = \{ L \in \mathcal{L} \mid \det L = 1 \}$ = eigentliche Lorentzgruppe

$\mathcal{L}^\uparrow = \{ L \in \mathcal{L} \mid L^0{}_0 \geq 1 \}$ = orthochrone Lorentzgruppe

Gruppeneigenschaft: z.z. Abgeschlossenheit, $1 \in \mathcal{L}^\uparrow \Rightarrow$

$L \in \mathcal{L}^\uparrow \Rightarrow L^{-1} \in \mathcal{L}^\uparrow$

$\mathcal{L}_+^\uparrow = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}^\uparrow$



$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}^{\uparrow}_{-} &= P\,\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \\ \mathcal{L}^{\downarrow}_{-} &= T\,\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \\ \mathcal{L}^{\downarrow}_{+} &= PT\,\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \end{aligned}}$$

Gruppe der Drehung kann als Untergruppe von $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ aufgefasst werden:

$$R \in SO(3) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1\times 1 & 1\times 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} 3\times 1 & 3\times 3 \end{array} \end{array} \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$$

$L \in \mathcal{L}$, $L^0{}_0 = 1 \Rightarrow L$ ist Drehung oder Drehspiegelung

Eigentliche orthochrone Lorentzgruppe:

Spezialfall $y' = y$, $z' = z$, $\quad K \xrightarrow{L} K'$

$$L = \begin{pmatrix} L_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_x \text{ 2x2-Matrix}$$

$$L_x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} L_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Konvention

Analogie zu Drehungen: $L_x = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$

Beweis:

$$L_x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} L_x = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wegen $\operatorname{ch}^2\psi - \operatorname{sh}^2\psi = 1$

Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich K' relativ zu K?

K': $ct', x'=y'=z'=0$ Punkt im Koordinatenursprung

$K' \xrightarrow{L^{-1}} K, \quad L_x^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$

K: $\cancel{ct' = \operatorname{ch}\psi x, \; x' = \operatorname{sh}\psi ct, \; y'=y, \; z'=z}$

$t = \operatorname{ch}\psi \, t', \; x = \operatorname{sh}\psi \, ct'$

$\frac{x}{t} = c \operatorname{th}\psi = v$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Koordinatenursprung von K' bewegt sich mit Geschw. } \frac{v}{c} = \operatorname{th}\psi \text{ entlang x-Achse}}$

$\beta \equiv \frac{v}{c}$

$\operatorname{ch}^2\psi - \operatorname{sh}^2\psi = \operatorname{ch}^2\psi(1 - \operatorname{th}^2\psi) = 1$

$\operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \operatorname{sh}\psi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\boxed{L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

„Geschw. transformation" (boost) entlang x-Achse

Allgemein: K' bewegt sich mit $\vec{v}$ relativ zu K

~~(Achsen parallel)~~

$\vec{n}_v \equiv \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$ct' = \gamma ct - \gamma\beta \, \vec{n}_v \cdot \vec{x}$

$\vec{x}' = (-\gamma\beta ct + \gamma \, \vec{n}_v \cdot \vec{x})\vec{n}_v + (1 - \vec{n}_v \vec{n}_v^T)\vec{x}$

$\cancel{(1-\vec{n}_v\vec{n}_v^T)\vec{x}' = (1-\vec{n}_v\vec{n}_v^T)\vec{x}}$

II.10

$$\boxed{L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^T \\ -\gamma\vec{\beta} & 1 + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\vec{\beta}\vec{\beta}^T \end{pmatrix}}$$

$$\frac{\gamma-1}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}$$

$$L(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overset{\#}{R}(\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$$

$\overset{\#}{R}'(\vec{\alpha})$ Transformation auf das um den Drehvektor $\vec{\alpha}$ gedrehte System

Allgemein: $L(\vec{\alpha},\vec{v}) = L(\vec{\alpha})\,L(\vec{v}) \rightarrow$ 6 Parameter

<u>Geschwindigkeitsaddition:</u>

Einfachster Fall: K' mit v entlang x-Achse, in K' gleichförmige Bewegung entlang x'-Achse

$$x' = wt'$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = L_x^{-1}\begin{pmatrix} ct' \\ wt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct' \\ wt' \end{pmatrix}$$

$$ct = \gamma(ct' + \beta wt') = \gamma(c+\beta w)t'$$

$$x = \gamma(\beta c + w)t'$$

$$u \equiv \frac{x}{t} = \cancel{\gamma(1+\beta\frac{w}{c})} \;\; \frac{\gamma(v+w)t'}{\gamma(1+\frac{\beta w}{c})t'} \Rightarrow \boxed{u = \frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}}$$

Geschw. in K

Dopplereffekt:

Vorbereitung:

Transformation einer Funktion ϕ von K nach K'

$$\phi'(x') = \phi(x) = \phi(L^{-1}x')$$

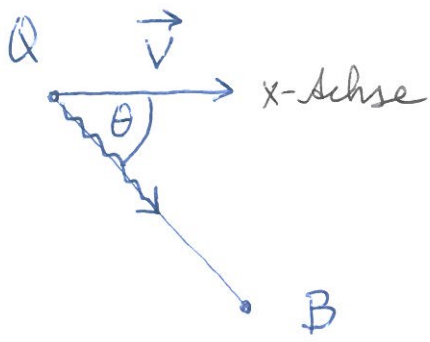
$$x' = Lx$$

Ebene Welle: $e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} = e^{-i\left(\frac{\omega}{c}x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} = e^{-ik\cdot x}$

Wellengl.: $\frac{\omega}{c} = |\vec{k}|$, $\boxed{\text{4-Vektor } \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \equiv k}$

Ebene Welle in K': $e^{ik\cdot(L^{-1}x')} = e^{i(Lk)\cdot x'}$

$$\boxed{k' = Lk}$$



Quelle Q bewegt sich relativ zum Beobachter B, sendet z.B. bekannte Spektrallinie mit Kreisfrequenz ω_0 aus

B mit θ in <u>seinem</u> System

Welche Frequenz sieht B?

K: Ruhesystem von B, K' bewege sich mit v entlang x-Achse

K': — " — Q

$$\omega_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta' \\ \sin\theta' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \omega \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wellengl.

$$\frac{\omega}{c} = |\vec{k}| \Rightarrow \boxed{\text{4-Vektor } k = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \vec{k} \end{pmatrix}} \boxed{= \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n} \end{pmatrix}}$$

mit $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$

0-te Koordinate: $\omega_0 = \gamma(1-\beta\cos\theta)\,\omega$

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}}$$

$Q \rightarrow B$: $\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_0 > \omega_0$

Blauverschiebung

$\leftarrow Q \quad B$: $\omega = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega_0 < \omega_0$

Rotverschiebung

Transversaler Dopplereffekt: $\overset{\uparrow}{Q} \quad B$: $\omega = \sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0 \Rightarrow$ kleine Rotverschiebung (Effekt der Zeitdilatation)

5) Energie und Impuls in der speziellen Relativitätstheorie

Newton: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

Naheliegende Verallgemeinerung von $\vec{p}$:

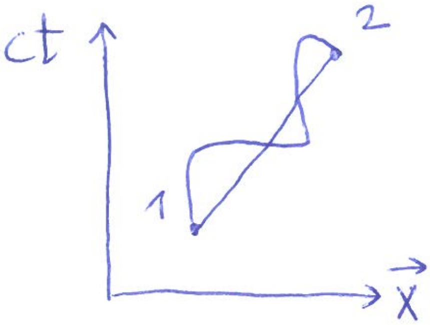
Lorentz-Kovarianz $\rightarrow$ 4-Impuls

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} \Rightarrow \boxed{p = m\gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}}$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = \frac{1}{c}\sqrt{ds^2} \quad \text{invariant}$$

Herleitung des 4-Impulses aus dem Wirkungsprinzip:

Freies Teilchen, Forderung: Wirkung S Lorentz-invariant



Minimum von S

$\rightarrow$ Euler-Lagrange-Gl.

$\rightarrow$ Gerade

$$S = -k\int_1^2 ds = -kc\int_1^2 d\tau = -kc\int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}}$$

k = Konstante

Bem.: $\mathcal{L}$ nicht Lorentz-invariant!

$$L = -kc\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

NR Limes: $L = -kc\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\vec{v}^2}{c^2} + \dots\right)$

$$\frac{k\vec{v}^2}{2c} = \frac{m\vec{v}^2}{2} \Rightarrow k = mc$$

$$\boxed{L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

Kanon. Impuls: $p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial v^i} = mc^2 \gamma \frac{v^i}{c^2}$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}}$$

Euler-Lagrange: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\right) = \vec{0}$

$$\dot{\vec{v}}\gamma - \frac{1}{2}\gamma^3 \vec{v}\left(-\frac{2\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}}{c^2}\right) = \vec{0}$$

$$\dot{\vec{v}}\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2}\vec{v}\,\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) + \frac{\vec{v}^2}{c^2}\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = \vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{v}} = \vec{0}} \Rightarrow$ Gerade $(|\vec{v}| < c)$

Energie: $E = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L = \vec{v}\cdot\vec{p} + mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$

$$= \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}} \Rightarrow \boxed{p = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}}$$

$\frac{E}{mc^2} = \gamma, \quad \frac{|\vec{p}|}{m} = \gamma v$

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{m^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m^2c^2$$

$$\boxed{p^2 \equiv p \cdot p = m^2c^2}$$

$$\boxed{E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}}$$

NR Limes: $E = mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \ldots$

$m \neq 0$: $E, \vec{p}$ divergieren für $v \to c$

$m = 0$: $\boxed{E = c|\vec{p}|}$

Andrerseits $E = \vec{v} \cdot \vec{p} - \underbrace{L}_{0} \Rightarrow \boxed{v = c}$

~~Ungleichung: $p_i^2 = m_i^2 \; (i = 1, \ldots, n) \Longrightarrow$~~

$$\cancel{\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 c^2}}$$

~~Beweis: vollständige Induktion~~ $(c=1)$

~~$n=1$: $p_1^2 = m_1^2$~~

~~$n-1$: $(p_1 + \ldots + p_{n-1})^2 \geq (m_1 + \ldots + m_{n-1})^2$~~

~~$P = p_1 + \ldots + p_{n-1}$~~

$$\boxed{E = mc^2 + T \quad \text{mit} \quad T = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^{\,2}} - mc^2}$$

mc^2 = Ruheenergie, T = kinetische Energie

4-Impulserhaltung in Teilchenprozessen:

z.B. $A_1 + A_2 \longrightarrow B_1 + B_2 + \ldots + B_n$

$$p_1 + p_2 = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

Ab jetzt $\underline{\underline{c=1}}$.

Wichtige Ungleichung:

$$\boxed{p_1^2 = m_1^2 \neq 0,\ p_2^2 = m_2^2 \Rightarrow p_1 \cdot p_2 \geq m_1 m_2,\ p_1 \cdot p_2 = m_1 m_2 \Leftrightarrow m_1 p_2 = m_2 p_1}$$

Beweis: $m_1 \neq 0 \Rightarrow \exists$ Inertialsystem K', in dem Teilchen 1 ruht, d.h. $p_1' = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$.

$$p_1 \cdot p_2 = p_1' \cdot p_2' = m_1 E_2' = m_1 \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^{\,2}} \geq m_1 m_2 .$$

$m_2 \neq 0 \Rightarrow$ Min. bei $p_2' = \begin{pmatrix} m_2 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow m_2 p_1 = m_1 p_2$

$m_2 = 0 \Rightarrow$ Min bei $E_2' = 0 \Rightarrow p_2' = 0$, $m_2 p_1 = m_1 p_2$ gilt ebenfalls! ✓

Spezialfälle:

$m_1 \neq 0,\ m_2 = 0 \Rightarrow$ Min. $p_1 \cdot p_2 = 0$ bei $p_2 = 0$

$m_1 = m_2 = 0 \Rightarrow$ Min. $p_1 \cdot p_2 = 0$ bei $p_2 \propto p_1$

Folgerung:

$$\boxed{p_i^2 = m_i^2 \quad (i=1,\dots,n) \Rightarrow (p_1+p_2+\dots+p_n)^2 \geq (m_1+m_2+\dots+m_n)^2}$$

Beweis: $(p_1+p_2+\dots+p_n)^2 =$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + 2 \sum_{i<j} p_i \cdot p_j \geq \sum_{i=1}^{n} m_i^2 + 2 \sum_{i<j} m_i m_j$$

$$= (m_1+\dots+m_n)^2 \quad \checkmark$$

Bemerkung:

$m_1 \neq 0 \Rightarrow$ am Min. kann $p_1+p_2+\dots+p_n$ als 4-Impuls eines Teilchens mit Masse $m_1+m_2+\dots+m_n$ aufgefasst werden.

Beweis: Am Min. ist $p_i = \frac{m_i}{m_1} p_1$

$$\Rightarrow (p_1+p_2+\dots+p_1)^2 = \left(p_1 + \frac{m_2}{m_1} p_1 + \dots + \frac{m_n}{m_1} p_1\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{m_1+\dots+m_n}{m_1}\right)^2 \cdot m_1^2 = (m_1+\dots+m_n)^2$$

$m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0 \Rightarrow$ am Min. sind alle p_i zueinander proportional, $(p_1+\dots+p_n)^2 = 0$

6) Teilchenprozesse und relativistische Kinematik

a) 2-Teilchenzerfall

$$A \to B_1 + B_2$$

$$p = p_1 + p_2 \qquad p^2 = m^2,\ p_1^2 = m_1^2,\ p_2^2 = m_2^2$$

Problemstellung: Was sind die Energien von B_1 und B_2 im Ruhesystem von A?

$$p = \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (p-p_1)^2 = m^2 + m_1^2 - 2mE_1 = m_2^2$$

$$\boxed{E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m}, \quad E_2 = \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m}}$$

Impuls: $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| \equiv q \Leftarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$

$$E_1^2 - q^2 = m_1^2 \Rightarrow q^2 = E_1^2 - m_1^2 =$$

$$= \frac{m^4 + 2m^2(m_1^2 - m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 \cdot 4m^2}{4m^2}$$

$$\boxed{q^2 = \frac{1}{4m^2}\left[m^4 - 2m^2(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2\right]}$$

Energien und Betrag des Impulses völlig fixiert!

Notwendige Bed.: $m > m_1 + m_2$

b) β-Zerfall und Grenzen des Elektronspektrums

$$(Z, A) \rightarrow (Z+1, A) + e^- + \bar{\nu}_e$$

i = initial, f = final

$$p_i = p_f + p_e + p_\nu$$

Gesucht: Maximale Elektronenergie

$$p_i = \begin{pmatrix} M_i \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Nehmen ν-Masse ≠ 0 an

$$p_i - p_e = p_f + p_\nu \Rightarrow (p_i - p_e)^2 = M_i^2 - 2M_i E_e + m_e^2$$

$$= (p_f + p_\nu)^2 \geq (M_f + m_\nu)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_e \leq \frac{M_i^2 + m_e^2 - (M_f + m_\nu)^2}{2M_i}}$$

Obere Schranke wird tatsächlich angenommen

für $p_\nu = \frac{m_\nu}{M_f} p_f \rightarrow p_\nu + p_f \equiv P$ 4-Vektor mit Masse $M_f + m_\nu$

→ eff. 2-Teilchenzerfall

Unlere Schranke: $E_e \geq m_e$

$p_e = \begin{pmatrix} m_e \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ mögl. Lsg. der Energie-Impuls-Bilanz

Achtung: nur Kinematik, keine Dynamik, d.h. Theorie des β-Zerfalls

Näherungen für E_{max}:

i ~~a~~) $m_\nu \lesssim 1\,eV$, $\boxed{E_0 \equiv \frac{M_i^2 + m_e^2 - M_f^2}{2M_i}}$

$$E_e \lesssim E_0 - \frac{M_f}{M_i} m_\nu \simeq E_0 - m_\nu$$

$$\boxed{E_e \lesssim E_0 - m_\nu}$$

$^3H \to {}^3He + e^- + \bar{\nu}_e$

Suche nach m_ν

$T_{1/2} = 12.32\,a$, $M_i - M_f - m_e \simeq 19\,keV$

ii ~~b~~) $m_\nu \to 0 \Rightarrow E_{max} = E_0$

$$E_0 = (M_i - M_f)(M_i + M_f)\frac{1}{2M_i} + \frac{m_e^2}{2M_i} =$$

$$= (M_i - M_f)\left[1 - \frac{M_i - M_f}{2M_i} + \frac{m_e^2}{2M_i(M_i - M_f)}\right]$$

Üblicherweise $\boxed{E_0 \simeq M_i - M_f}$ ausreichend

$$\underbrace{M_i - M_f}_{MeV} \ll \underbrace{M_i}_{GeV}$$

II.19

c) Compton-Streuung

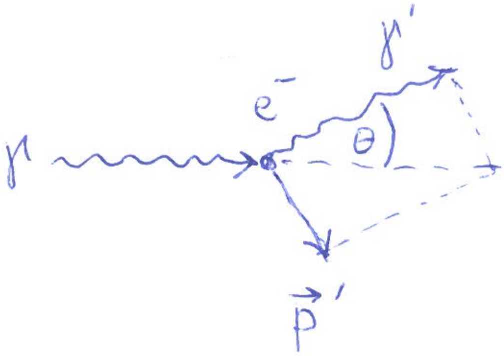
Elastische Photon-Elektron-Streuung

$\gamma + e^- \to \gamma' + e^-$

$k + p = k' + p'$

Ruhesystem des einlaufenden Elektrons:

$p = \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix} \qquad m \equiv m_e$



Ziel: ω' als Funktion von ω und θ

$k = \omega \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n} \end{pmatrix}$ wegen $k^2 = 0$!

$k' = \omega' \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n}' \end{pmatrix} \qquad [\hbar = c = 1]$

$(k + p - k')^2 = p'^2 = m^2$

$\cancel{k^2} + \cancel{k'^2} + \cancel{p^2} + 2k\cdot p - 2k'\cdot p - 2k\cdot k' = \cancel{m^2}$

$(\omega - \omega')\, m = \omega\omega'\,(1 - \cos\theta)$

$\omega m = \omega'\,(m + \omega(1 - \cos\theta))$

$$\boxed{\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}}$$

$\omega' \leq \omega$!

$\frac{\hbar\omega}{mc^2} = \frac{2\pi\hbar\nu}{mc^2} = 2\pi\,\frac{\lambda_c}{\lambda}\,, \quad \lambda_c = \frac{\hbar}{mc} = 3.861\times 10^{-13}\,\mathrm{m}$

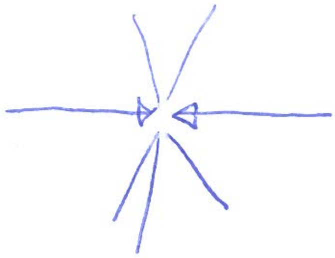
Compton-Wellenlänge

$\lambda \gg \lambda_c \Rightarrow \omega' \simeq \omega$

bzw. $\hbar\omega \ll mc^2$

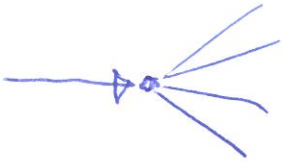
d) Collider vs. Fixed Target

Collider:



Schwerpunktsystem

Fixed Target:



Laborsystem

pp-Streuung:

Collider: $p_1 = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \; p_2 = \begin{pmatrix} E \\ -\vec{p} \end{pmatrix}$

Laborsystem: $p_{1L} = \begin{pmatrix} E_L \\ \vec{p}_L \end{pmatrix}, \; p_{2L} = \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix}$

Im Schwerpunktsystem steht Energie 2E zur Verfügung. Wie groß muß E_L sein, dass im Schwerpunktsystem 2E vorhanden ist?

$$(p_1 + p_2)^2 = (2E)^2 = (p_{1L} + p_{2L})^2 = 2m^2 + 2\, p_{1L} \cdot p_{2L} =$$

$$= 2(m^2 + E_L m)$$

$$\boxed{E_L = \frac{2E^2 - m^2}{m}}$$

LHC: $E = 7\,\text{TeV} \Rightarrow E_L \simeq \dfrac{2 \times 49\ \text{TeV}^2}{0.938 \times 10^{-3}\,\text{TeV}} =$

[Zur Zeit: $2E = 13\,\text{TeV}$]

$$= 1.045 \times 10^5\ \text{TeV} \ !$$

$$E_L \simeq 10^{17}\ \text{eV}$$

e) Der Cherenkov-Effekt

Strahlung eines geladenen Teilchens mit $v > \frac{c}{n}$ (n = Brechungsindex in einem Medium, $n \simeq 1.33$ in Wasser)

$$\left(\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E} = \vec{0}$$

Ebene Welle: $e^{ik\cdot x}$, $k = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{n^2\omega^2}{c^2} = \vec{k}^2$

4-Impuls des Photons im Medium:

$$\boxed{k = \begin{pmatrix} \omega \\ n\omega\hat{k} \end{pmatrix}, \quad \hat{k}^2 = 1} \quad (\text{„}\hbar = c = 1\text{"})$$

Beispiel: $e^- \to e^- + \gamma$ Gesucht: ω als Funktion von θ und E_{e^-}

$$p = p' + k \Rightarrow (p-k)^2 = m^2 - 2p\cdot k + k^2 = p'^2 = m^2$$

$$k^2 = -\omega^2(n^2-1) < 0 \qquad p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad |\vec{p}| \equiv q$$

$$-2(E\cancel{\omega} - n\cancel{\omega} q\cos\theta) - \omega^{\cancel{2}}(n^2-1) = 0$$

$$\theta = \sphericalangle(\vec{p}, \hat{k})$$

$$\omega = \frac{2}{n^2-1}\left(qn\cos\theta - E\right) > 0$$

Bedingung für Abstrahlung: $qn > E$

$$\frac{q}{E} = v > \frac{1}{n} \qquad \boxed{\frac{v}{c} > \frac{1}{n}}$$

Abstrahlungswinkel: $\beta \equiv \frac{v}{c}$

$$\cos\theta = \frac{1}{qn}\left(E + \frac{(n^2-1)\omega}{2}\right)$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{\beta n}\left(1 + \frac{(n^2-1)\omega}{2E}\right)}$$

Abstrahlung im sichtbaren Bereich:

$$\frac{qn}{E} > 1 \Rightarrow \frac{E^2-m^2}{E^2} > \frac{1}{n^2} \Rightarrow E > \frac{m}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$ MeV-Bereich!

$$\Rightarrow \frac{\omega}{E} \ll 1, \quad \boxed{\cos\theta = \frac{1}{\beta n}}$$

Wasser: $E > 1.5\, m_e$

$0 < \theta < 41.\cancel{2}5°$

Keine Abstrahlung im Vakuum!

f) Der Greisen-Zatsepin-Kuzmin-Cutoff.

GZK: 1966

Kosmische Hintergrundstrahlung:
Überbleibsel vom Urknall, Hohlraumstrahlung
mit $T_\gamma =$ ~~2.725 ± 0.001 K~~ 2.7255 ± 0.0006 K

$n_\gamma \simeq 411\ \mathrm{cm}^{-3}$

Primäre kosmische Strahlung: $p \sim 90\%$, α, ...
$E_{kin} \lesssim 100$ MeV Sonnenwind (moduliert CR mit $E < 10$ GeV im 11-Jahreszyklus)
einige GeV $\leftrightarrow$ 4×10^{15} eV $= 4\times 10^6$ GeV („Knie"): $E^{-2.7}$
„Knie" bis Knöchel (5×10^{18} eV): $E^{-\gamma}$, $\gamma \simeq 3.0 - 3.3$
Oberhalb Knöchel: $\gamma \sim 2.8$

Extragalaktische Komponente dominiert oberhalb vom „Knöchel"

GZK - Cutoff:

inelastischische p-Streuung an γ_{CMB}

z. B.

$$p + \gamma_{CMB} \rightarrow p + \pi^0 \qquad kT_{CMB} \sim 2.7 \times 8.617 \times 10^{-5}\,eV = 2.35 \times 10^{-4}\,eV$$

Gesucht: Min. Energie des Protons, ab welcher dieser Prozess kinematisch erlaubt ist

$$(p+k)^2 \geq (m_p + m_\pi)^2 \qquad p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix},\ k = \begin{pmatrix} \omega \\ -\omega \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix}$$

← max. Energie für Π-Produktion

$$(E+\omega)^2 - \left(\sqrt{E^2 - m_p^2} - \omega\right)^2 \geq (m_p + m_\pi)^2$$

$$\cancel{E^2} + 2\omega E + \cancel{\omega^2} - \cancel{E^2} + m_p^2 - \cancel{\omega^2} + 2\omega\sqrt{E^2 - m_p^2} \geq (m_p + m_\pi)^2$$

$$\omega\left(E + \sqrt{E^2 - m_p^2}\right) \geq m_\pi (m_p + m_\pi/2)$$

$$\boxed{E + \sqrt{E^2 - m_p^2} \geq \frac{m_\pi (m_p + m_\pi/2)}{\omega}}$$

untere Schranke an E, damit inelastische Streuung stattfindet

$$E_{GZK} \gtrsim \frac{m_\pi m_p}{2\omega}$$

$$\omega \sim 10^{-3}\,eV$$

$$E_{GZK} \gtrsim \frac{100\,MeV \times 1\,GeV}{2 \times 10^{-3}\,eV} = 0.5 \times 10^{20}\,eV$$

Bedeutung: $n_\gamma, \sigma(N + \gamma \rightarrow N' + \pi) \Rightarrow$ Falls $E_p > E_{GZK} \simeq 5 \times 10^{19}\,eV$, dann Quelle näher als $\simeq 100\,Mpc$

($1\,pc \simeq 3.26\,ly$)

Pierre Auger - Observatorium:

Auger 1938: Entdeckung ausgedehnter Luftschauer

Fläche ~ 3000 km^2 (Provinz Mendoza, Argentinien)

1660 Wassertanks mit 12000 l, 11.3 m^2 Grundfläche, Abstand 1.5 km → Detektion durch Cherenkov-Strahlung

~~30~~ 27 Teleskope in 4 Beobachtungsstationen, Spiegelfläche ~ 12 m^2 → Fluoreszenzlicht (N_2) Entwicklung des Luftschauers in klaren mondlosen Nächten

Ergebnisse:

1) GZK-Cutoff bestätigt (Widerspruch zu AGASA) ~ 5×10^{19} eV

2) Korrelation höchstenergetischer Ereignisse mit aktiven Galaxiekernen in näherer Umgebung

http://www.auger.de/ ~~www.auger.org/observatory/~~

AGASA: Akeno Giant Airshower Array
Japan, 100 km^2, 111+27 Detektoren

10^{15} eV = 1 PeV (peta)
10^{18} eV = 1 EeV (exa)