Aufgaben zu "Biomathematik und Spieltheorie"

WS 2018/19

Reinhard Bürger

1. (a) Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\int_0^\infty \ell(x)b(x)\,dx > 1$$

notwendig und hinreichend für die Existenz einer positiven Wachstumsrate m ist, dh. für ein $m > 0$, das

$$\int_0^\infty e^{-mx}\ell(x)b(x)\,dx = 1$$

erfüllt (dabei seien $\ell(x)$ und $b(x)$ als stetig bis auf höchstens endlich viele Stellen vorausgesetzt, und mit Eigenschaften wie in der Vorlesung).

(b) Was kann man über m aussagen wenn Bedingung (1) nicht erfüllt ist? Existiert immer ein m?

(c) Können Sie intuitiv erklären, warum Bedingung (1) erfüllt sein muss, damit es ein positives m gibt?

(d) Berechne m für $\ell(x) = e^{-\alpha x}$ und $b(x) = Be^{-\beta x}$.

2. Studieren Sie das verallgemeinerte Wachstumsmodell von Beverton-Holt:

$$F(N) = \frac{\lambda N}{(1+\alpha N)^\beta}$$

mit $\lambda > 1$, $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass es stets einen eindeutig bestimmten Fixpunkt gibt und bestimmen Sie die Parameterkombinationen für die dieser (asymptotisch) stabil ist.

(b) In welchem Parameterbereich treten stabile Zweierzyklen auf? Beweis!

(c) Stellen Sie die Dynamik für verschiedene Parameterbereiche graphisch dar.

3. Radioaktive Isotope, wie C^{14}, zerfallen im Laufe der Zeit. Je nach Isotop zerfällt jedes Jahr ein fester Anteil des noch vorhandenen Materials. Man charakterisiert Isotope durch ihre Halbwertszeit, das ist der Zeitraum, innerhalb dessen die Hälfte des Materials zerfällt. Die Halbwertszeit von C^{14} ist 5730 Jahre.

   (a) Geben Sie die Iterationsfunktion für die vorhandene Menge (von einem Jahr aufs andere) an und ermitteln Sie den Prozentanteil des noch vorhandenen Materials, der pro Jahr zerfällt.

   (b) Das Mischungsverhältnis des radioaktiven C^{14} und des nichtradioaktiven C^{12} im CO2 der Atmosphäre ist über geologische Zeiträume konstant geblieben. Pflanzen bauen es in demselben atmosphärischen Mischungsverhältnis in ihre organischen Moleküle (z.B. Cellulose, Lignin) ein. Wenn eine Pflanze stirbt, nimmt sie kein neues CO2 mehr auf. Das radioaktive C^{14} im toten Pflanzenmaterial zerfällt (gemäß der uns bekannten Iterationsfunktion), das C^{12} bleibt unverändert. Somit sinkt das Verhältnis C^{14}/C^{12} im Laufe der Zeit. Geben Sie die Iterationsfunktion für dieses Verhältnis an.

   (c) Bei einer Ausgrabung wird ein alter Holzrest gefunden, dessen C^{14}/C^{12} Verhältnis nur noch 23% desjenigen Wertes beträgt, den man in lebendem Pflanzenmaterial findet. Bestimmen Sie, wann das Holz geschlagen wurde. Benutzen Sie dazu die vorher ermittelte Zerfallsrate.

   (d) Stellen Sie das Bsp. (a) entsprechende Modell in stetiger Zeit auf.

4. Studieren Sie die diskrete logistische Gleichung, $x' = ax(1 - x)$, numerisch und erklären Sie die Resultate (vgl. Vorlesung). Sie können dazu gerne das *Mathematica* notebook auf meiner homepage verwenden sowie die dort gespeicherten pdfs.

5. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 1 über den Galton-Watson Prozess.

6. Gegeben sei das Konkurrenzmodell

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(a_1 - b_1 x_1 - c_1 x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(a_2 - b_2 x_2 - c_2 x_1), \end{aligned}$$

   wobei alle Konstanten positiv seien.

   (a) Bestimmen Sie die lineare Stabilität aller (potentiellen) Gleichgewichte.

   (b) Skizzieren Sie für alle vier Fälle aus der Vorlesung die Lage der Gleichgewichte sowie der Geraden $\bar{S}$ und $\bar{W}$. Bestimmen Sie die Richtung des Fluss auf diesen Geraden. Folgern Sie daraus intuitiv das in der Vorlesung skizzierte Langzeitverhalten der Lösungen.

   (c) Was können Sie über den Fall $\bar{S} = \bar{W}$ aussagen?

7. Bei vielen Krankheiten nimmt die zunächst gewonnene Immunität wieder ab. Startet man mit einem SIR Modell und nimmt man an, dass die Zeit, in der Individuen immun sind, exponentiell mit Rate ρ abnimmt, so kann man das durch folgendes SIRS Modell beschreiben:

$$S \xrightarrow{\beta IS} I \xrightarrow{\gamma I} R \xrightarrow{\rho R} S$$

(Begründung).

(a) Stellen sie das entsprechende System von DGL auf.

(b) Stellen Sie das reskalierte System auf, bei dem $u = S/N$, $v = I/N$, $w = R/N$, $\tau = \gamma t$, sowie $R_0 = \beta N/\gamma$ und $\alpha = \rho/\gamma$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass es folgende Gleichgewichte gibt: $(1, 0, 0)$ und

$$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\alpha(1 - R_0^{-1})}{1 + \alpha}, \frac{1 - R_0^{-1}}{1 + \alpha} \right).$$

(d) Führen Sie eine lineare Stabilitätsanalyse der Gleichgewichte durch und ziehen sie die relevanten Schlussfolgerungen (unter der Annahme, dass ein Gleichgewicht global stabil ist, falls es das einzige stabile ist).

(e) Vergleichen Sie die Resultate mit dem SIR Modell.

8. Ein endemisches SEIR Modell. In diesem Modell werden Individuen nicht sofort bei der Infektion infektiös, sondern es dauert im Mittel $1/\delta$ Zeiteinheiten bis sie infektiös sind. Man nennt das den exponierten (E) oder latenten Zustand.

(a) Erklären Sie die folgenden DGL:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= bN - \beta IS - bS, \\ \dot{E} &= \beta IS - (\delta + b)E, \\ \dot{I} &= \delta E - (\gamma + b)I, \\ \dot{R} &= \gamma I - bR. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichte und deren Stabilität. Dazu ist es zweckmäßig

$$R_0 = \frac{\delta}{b + \delta} \frac{\beta N}{b + \gamma}$$

zu setzen.

(c) Warum ist dieses R_0 die Reproduktionsrate der Infektion? (Bestimmen Sie $\dot{I}/I$ für $S = N$.)