Proseminar zu
Einführung in die Analysis

Sommersemester 2014

SEBASTIAN BANERT
THOMAS GLATZ
ARMIN RAINER
TOBIAS WASSMER
THOMAS WIDLAK
PETER RAITH

1) Berechne:
   a) $(2+5i)(-2-i)+(3+4i)$. b) $(-3+2i)^2$.
   c) $(1+i)^3$. d) i^7. e) $\dfrac{7+11i}{5+3i}$.
   f) $\dfrac{34-13i}{2-7i}$. g) $\sqrt{45+28i}$.

2) Finde alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $(5+3i)z^2+(-13-35i)z+(16+98i)=0$ erfüllen.

3) Berechne:
   a) $|3+4i|$. b) $|15-8i|$. c) $\overline{4+17i}$.
   d) $e^{\pi i}$. e) $\left(e^{\frac{2\pi i}{23}}\right)^{23}$.

4) Berechne $g \circ f$ für folgende Funktionen.
   a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3+1$, $g(x) = x^2$.
   b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3+1$.
   c) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$, $g(x) = e^x$.
   d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2$, $g(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 2x \\ \sin x \end{pmatrix}$.
   e) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3-x_4 \\ {x_1}^2 \\ 7x_1+x_2+3x_5 \end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1-x_2+2x_3} \\ 3x_1+\sin x_2 \end{pmatrix}$.

Für die folgenden Beispiele betrachte die folgende Intervallschachtelung für die $\sqrt{2}$ als Musterbeispiel. Hier werden auch einige zusätzliche theoretische Erklärungen gegeben.

Definiere $a_0 := 2$ und $b_0 := 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere
$$a_n := \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{2}{a_n}\,.$$
Behauptung. *Es sind $a_n > 0$ und $b_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.*
Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 0$ gelten $a_0 = 2 > 0$ und $b_0 > 1$. Damit ist der Induktionsanfang gezeigt, und wir werden jetzt den Induktionsschritt von $n-1$ nach n zeigen.
Sei $n > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gelten $a_{n-1} > 0$ und $b_{n-1} > 0$. Somit gilt auch $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} > 0$. Weil $a_n > 0$ ist, ist auch $b_n = \frac{2}{a_n} > 0$. □
Behauptung. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_n b_n = 2$.*
Beweis. Im Fall $n = 0$ ist $a_0 b_0 = 2 \times 1 = 2$. Wenn $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ergibt sich wegen $b_n = \frac{2}{a_n}$, dass $a_n b_n = 2$ gilt. □

Behauptung. *Es gilt $a_n - b_n = \dfrac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{2(a_{n-1} + b_{n-1})}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*
Beweis. Es ist
$$a_n - b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \frac{2}{a_n} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \underbrace{\frac{2}{\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}}}_{=\frac{4}{a_{n-1}+b_{n-1}}} =$$
$$= \frac{{a_{n-1}}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1} + {b_{n-1}}^2 - 8}{2(a_{n-1} + b_{n-1})} = \frac{{a_{n-1}}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1} + {b_{n-1}}^2 - 4 \times 2}{2(a_{n-1} + b_{n-1})}\,.$$
Da $a_{n-1}b_{n-1} = 2$ gilt können wir den Zweier aus 4×2 durch $a_{n-1}b_{n-1}$ ersetzen, und erhalten
$$a_n - b_n = \frac{{a_{n-1}}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1} + {b_{n-1}}^2 - 4a_{n-1}b_{n-1}}{2(a_{n-1} + b_{n-1})} =$$
$$= \frac{{a_{n-1}}^2 - 2a_{n-1}b_{n-1} + {b_{n-1}}^2}{2(a_{n-1} + b_{n-1})} = \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{2(a_{n-1} + b_{n-1})}\,.$$
Dadurch ist die behauptete Aussage bewiesen. □
Behauptung. *Falls $n \in \mathbb{N}$ ist, dann gilt $b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1}$.*
Beweis. Dieser Beweis ist eine Variante des Induktionsbeweises. Für $n = 0$ gilt $b_0 = 1 < 2 = a_0$, und das wäre der Induktionsanfang für die Aussage $b_n < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $b_{n-1} < a_{n-1}$. Daher ist $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} < \frac{a_{n-1}+a_{n-1}}{2} = a_{n-1}$. Deshalb ist $b_n = \frac{2}{a_n} > \frac{2}{a_{n-1}} = b_{n-1}$. Wegen $a_n - b_n = \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})} > 0$ ist somit $b_n < a_n$. □
Es gilt daher
$$b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < a_2 < a_1 < a_0\,.$$
Man spricht von einer *Intervallschachtelung*, weil man diese Aussage auch als
$$[b_0, a_0] \supseteq [b_1, a_1] \supseteq [b_2, a_2] \supseteq \cdots$$
schreiben kann. Der nächste Satz heißt das *Intervallschachtelungsprinzip*, und kann mit Hilfe der Vollständigkeit der reellen Zahlen (Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum) bewiesen werden. Man könnte sogar zeigen, dass das Intervallschachtelungsprinzip gemeinsam mit dem Archimedischen Axiom äquivalent zur Vollständigkeit ist.
Satz. *Sei $[\alpha_0, \beta_0] \supseteq [\alpha_1, \beta_1] \supseteq [\alpha_2, \beta_2] \supseteq \cdots$ eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ (also es gelte die Eigenschaft $\alpha_0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \beta_2 \le \beta_1 \le \beta_0$). Dann gibt es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[\alpha_n, \beta_n]$ (also $\alpha_0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \gamma \le \cdots \le \beta_2 \le \beta_1 \le \beta_0$). Falls $\lim_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$ gilt, dann gibt es genau ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[\alpha_n, \beta_n]$ (dieses γ ist also eindeutig bestimmt).*
Beweis. Setze $A := \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Fixiere $j \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\alpha_n \le \beta_j$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Also β_j ist eine obere Schranke von A.
Weil $\alpha_0 \in A$ ist $A \neq \emptyset$. Weiters ist A nach oben beschränkt, da wir ja obere Schranken (nämlich β_j) gefunden haben. Deshalb besitzt A ein Supremum. Setze $\gamma := \sup A$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

Nachdem $\alpha_n \in A$ ist und γ eine obere Schranke von A ist, gilt $\alpha_n \le \gamma$. Wir haben gezeigt, dass β_n eine obere Schranke von A ist. Daher ist $\gamma \le \beta_n$ (γ ist ja die kleinste obere Schranke von A). Somit ist $\gamma \in [\alpha_n, \beta_n]$. Da $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig war, ist $\gamma \in [\alpha_n, \beta_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und daher $\gamma \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[\alpha_n, \beta_n]$.
Jetzt gelte $\lim_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$. Weiters seien $\gamma \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[\alpha_n, \beta_n]$ und $\widehat{\gamma} \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[\alpha_n, \beta_n]$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann liegen sowohl γ als auch $\widehat{\gamma}$ in $[\alpha_n, \beta_n]$. Daher muss $|\widehat{\gamma} - \gamma| \le \beta_n - \alpha_n$ gelten. Weil $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig war, gilt das für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\lim_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$ muss $|\widehat{\gamma} - \gamma| = 0$ gelten, und somit $\widehat{\gamma} = \gamma$, womit die Eindeutigkeit gezeigt ist. ☐

Behauptung. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_n + b_n \ge 2$.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass $a_n > b_n \ge 1$. Daher ist $a_n + b_n \ge 1 + 1 = 2$. ☐

Behauptung. *Es gilt $a_n - b_n \le \dfrac{1}{2^{2^n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Wieder führen wir den Beweis durch Induktion nach n. Im Fall $n = 0$ ist $\frac{1}{2^{2^0-1}} = 1 \ge 1 = 2 - 1 = a_0 - b_0$.
Sei $n > 0$. Dann ist $a_n - b_n = \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})}$. Wegen $a_{n-1} + b_{n-1} \ge 2$, ergibt sich daraus $a_n - b_n \le \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{4}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $a_{n-1} - b_{n-1} \le \frac{1}{2^{2^{n-1}-1}}$ und daher

$$(a_{n-1} - b_{n-1})^2 \le \left(\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}}\right)^2 = \frac{1}{2^{2\times 2^{n-1}-2}} = \frac{1}{2^{2^n-1-1}} = \frac{1}{2^{-1}2^{2^n-1}} = \frac{2}{2^{2^n-1}} \,.$$

Somit ist $a_n - b_n \le \frac{\frac{2}{2^{2^n-1}}}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2^n-1}} \le \frac{1}{2^{2^n-1}}$. ☐

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2^n-1}} = 0$ gibt es eine eindeutig bestimmte reelle Zahl γ mit

$$b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < \gamma < \cdots < a_2 < a_1 < a_0 \,.$$

Wir wollen jetzt γ bestimmen. Es gelten $b_n \to \gamma$ und $a_n \to \gamma$. Wegen $a_n b_n = 2$ erhalten wir

$$2 = \underbrace{a_n}_{\to\gamma}\underbrace{b_n}_{\to\gamma} \to \gamma^2 \,,$$

also $\gamma^2 = 2$, und daher $\gamma = \sqrt{2}$. Unsere Intervallschachtelung ist also eine Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$.
Für $n = 1$ erhalten wir $a_1 = \frac{3}{2}$ und daher $b_1 = \frac{4}{3}$. Somit gilt für $n = 2$, dass $a_2 = \frac{17}{12}$ und $b_2 = \frac{24}{17}$.
Mit Hilfe dieser Intervallschachtelung können wir Näherungswerte für $\sqrt{2}$ berechnen. Dazu verwenden wir Mathematica. Zunächst wollen wir die ersten 6 Intervalle auf 20 Stellen nach dem Komma angeben. Dazu geben wir

```
n=6;a=2;b=1;Do[a=N[(a+b)/2,1000];b=N[2/b,1000];
Print[N[{b,a},21]],{j,1,n}]
```

ein. Wir haben dabei die Zwischenergebnisse auf 1000 Stellen gerundet, um zu verhindern, dass Mathematica zu viel Zeit verbraucht um mit exakten Brüchen zu rechnen. So eine Vorgangsweise ist bei vielen numerischen Berechnungen sinnvoll. Das Ausgeben der Ergebnisse auf 21 Stellen ist deshalb notwendig, weil unsere Werte eine Stelle vor dem Komma haben, und wir dadurch 20 Stellen nach dem Komma erreichen. Ähnlich funktioniert das mit Maple durch Eingabe von

```
n:=6:a:=2:b:=1:to n do a:=evalf[1000]((a+b)/2);b:=evalf[1000](2/a);
print(evalf[21]([b,a])) end do:
```

und mit Maxima, wo man (die erste Zeile setzt die Genauigkeit der internen Rechnung und der Ausgabe)

```
fpprec:1000$ fpprintprec:21$
n:6$a:2$b:1$ for k:1 thru n do (a:bfloat((a+b)/2),b:bfloat(2/a),
disp(bfloat([b,a])))$
```

eingibt. Wir erhalten

$$1.33333333333333333333 \le \sqrt{2} \le 1.50000000000000000000\,,$$
$$1.41176470588235294118 \le \sqrt{2} \le 1.41666666666666666667\,,$$
$$1.41421143847487001733 \le \sqrt{2} \le 1.41421568627450980392\,,$$
$$1.41421356237150018698 \le \sqrt{2} \le 1.41421356237468991063\,,$$
$$1.41421356237309504880 \le \sqrt{2} \le 1.41421356237309504880\,,$$
$$1.41421356237309504880 \le \sqrt{2} \le 1.41421356237309504880\,.$$

Man sieht, dass man bereits nach 5 Schritten $\sqrt{2}$ auf 20 Stellen nach dem Komma genau erhält. Jetzt wollen wir $\sqrt{2}$ mit einem Fehler von höchstens 5×10^{-101} genau bestimmen (also auf 100 Stellen nach dem Komma). Weil $a_n - b_n \le \frac{1}{2^{2^n-1}}$ ist, ist $|\sqrt{2} - a_n| \le \frac{1}{2^{2^n-1}}$. Der Ausdruck $\frac{1}{2^{2^n-1}}$ liefert also eine *Fehlerabschätzung*, also einen Wert, von dem wir wissen, dass er größer oder gleich dem Abstand von $\sqrt{2}$ zur n-ten Näherung ist. Um das zu verwenden geben wir in Mathematica

```
fehler[n_]:=1/2^(2^n-1)
```

ein (in Maple `fehler:=n->1/2^(2^n-1);` und in Maxima `fehler(n):=1/2^(2^n-1);`). Jetzt probieren wir aus, wann dieser Wert das erste Mal kleiner als 5×10^{-101} wird. Bei Eingabe von `N[fehler[8]]` (in Maple gibt man `evalf(fehler(8));` ein, und in Maxima wird `bfloat(fehler(8));` eingegeben) erhalten wir 1.72723×10^{-77} und bei `N[fehler[9]]` erhalten wir 1.49167×10^{-154}. Also bereits nach 9 Schritten können wir $\sqrt{2}$ auf 100 Stellen nach dem Komma angeben. Geben wir jetzt in Mathematica

```
n=9;a=2;b=1;Do[a=N[(a+b)/2,1000];b=N[2/a,1000],{j,1,n}];N[{b,a},101]
```

oder in Maple

```
n:=9:a:=2:b:=1:to n do a:=evalf[1000]((a+b)/2);b:=evalf[1000](2/a) end do:
evalf[101]([b,a]);
```

oder in Maxima

```
fpprintprec:101$n:9$a:2$b:1$ for k:1 thru n do (a:bfloat((a+b)/2),
b:bfloat(2/a))$ bfloat([b,a]);
```

ein, so erhalten wir

$$\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769\,4807317667973799073247846210703885038753432764157\,27\,.$$

5) Es sei $a_0 := 3$ und $b_0 := 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $a_n := \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ und $b_n := \dfrac{3}{a_n}$.
   a) Beweise, dass $a_n b_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
   b) Zeige, dass $a_n - b_n = \dfrac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{2(a_{n-1} + b_{n-1})}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   c) Beweise, dass $b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   d) Welche reelle Zahl γ erfüllt $b_n < \gamma < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$?

6) Es seien a_n, b_n wie in Beispiel 5) definiert.
   a) Was bedeutet $b_0 = 1 < b_1 < b_2 < \cdots < a_2 < a_1 < a_0 = 3$? Wie kann man diese Aussage beweisen?
   Hinweis: Für den Beweis verwende Beispiel 5) c).
   b) Welche reelle Zahl γ erfüllt $b_0 = 1 < b_1 < b_2 < \cdots < \gamma < \cdots < a_2 < a_1 < a_0 = 3$ (Was bedeutet das überhaupt?)?
   Hinweis: Verwende Beispiel 5) d).

c) Beweise, dass $0 < a_n - b_n \leq \dfrac{4}{2^{(2^n)}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

d) Finde alle reellen Zahlen γ, die die Beziehung in Beispiel b), bzw. in Beispiel 5) d) erfüllen.

7) Definiere a_n, b_n wie in Beispiel 5).

a) Bestimme b_1 und a_1 (als Bruchzahlen).

b) Finde b_2 und a_2 (als Bruchzahlen).

c) Berechne (mit dem Taschenrechner oder dem Computer) (b_1, a_1), (b_2, a_2), (b_3, a_3), (b_4, a_4) und (b_5, a_5) (als Dezimalzahlen mit jeweils mindestens 10 Stellen hinter dem Komma).

d) Bestimme (mit dem Computer) (b_n, a_n) für ein passendes n so, dass man γ aus Beispiel 5) d) (bzw. Beispiel 6) b)) auf 100 Stellen nach dem Komma genau (als Dezimalzahl) angeben kann. Wie groß muss man n wählen?

8) Man definiert π als die Fläche des Kreises mit Radius 1. Sei f_n die Fläche des dem Kreis eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks, und sei F_n die Fläche des dem Kreis umgeschriebenen regelmässigen n-Ecks. Dann gilt $f_n \leq \pi \leq F_n$. Man kann die folgenden Formeln beweisen, die es ermöglichen aus den Flächen der regelmässigen n-Ecke die Flächen der regelmässigen $2n$-Ecke zu berechnen:

$$f_{2n} = \sqrt{f_n F_n}\,, \qquad F_{2n} = \frac{2 f_{2n} F_n}{f_{2n} + F_n}\,.$$

Für die regelmässigen Dreiecke erhält man $f_3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ und $F_3 = 3\sqrt{3}$.

Verwende die angegebenen Formeln um (mit Hilfe eines Computers) Näherungswerte für π zu bestimmen.

Hinweis: Um nicht unnötig lange Rechenzeiten am Computer zu benötigen verwende für alle Zwischenergebnisse auf 1000 Stellen gerundete Werte.

9) Ein Körper führe zwischen dem Zeitpunkt 0 und dem Zeitpunkt 8 eine Bewegung aus. Falls t zwischen 0 und 8 liegt, dann ist die Entfernung unseres Körpers vom Ausgangspunkt zum Zeitpunkt t gleich $t^3 - 15t^2 + 63t$. Zu welchem Zeitpunkt ist dieser Körper am weitesten vom Ausgangspunkt entfernt, und wie groß ist dann seine Entfernung vom Ausgangspunkt?

10) Zwischen dem Zeitpunkt 0 und dem Zeitpunkt 12 sei die Geschwindigkeit eines Flugzeugs zum Zeitpunkt t gleich $t^3 - 15t^2 + 48t + 76$. Zu welchem Zeitpunkt hat dieses Flugzeug die höchste Geschwindigkeit, und wie hoch ist diese Geschwindigkeit?

11) Für die folgenden Funktionen f gib jeweils „vernünftige“ Teilmengen von $\mathbb{R}$ an, auf denen sie definiert sind. Weiters skizziere ihre Graphen.

a) $f(x) := \dfrac{1}{x}$. b) $f(x) := \sin x$. c) $f(x) := \sqrt{x}$.

d) $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$. e) $f(x) := e^x$. f) $f(x) := \dfrac{1}{x^2+1}$.

g) $f(x) := \dfrac{1}{x^2-25}$. h) $f(x) := \sqrt{x^4-4}$.

i) $f(x) := \dfrac{12}{x^2-14x+49}$. j) $f(x) := \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

12) Welche der folgenden Funktionen ist injektiv, bzw. surjektiv, bzw. bijektiv?
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
b) $f : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
c) $f : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $f(x) = x^2$.
d) $f : \mathbb{Q} \to \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$, $f(x) = x^2$.
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.
f) $f : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $f(x) = x^3$.

13) Durch vollständige Induktion nach n beweise, dass $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

14) Mittels vollständiger Induktion zeige, dass die folgenden Formeln für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.
a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.
b) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
c) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$.

15) Zeige mit vollständiger Induktion, dass
$$\sum_{j=1}^{n} j^2(j+1) = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + n^2(n+1) = \frac{1}{12}(n+2)(n+1)n(3n+1)$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

16) Verwende vollständige Induktion um
$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$
für alle $n \geq 2$ zu beweisen.

17) Beweise die *Bernoulli'sche Ungleichung*:
Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
Anleitung: Verwende vollständige Induktion.

18) Für $n \in \mathbb{N}$ berechne:
a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$. c) $\sum_{k=0}^{n} 5^k \binom{n}{k}$.
Hinweis: Verwende den binomischen Lehrsatz.

19) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\frac{2x-9}{x-6} > x - 2$ gilt.

20) Von den folgenden Teilmengen A von $\mathbb{R}$ bestimme das Supremum und Infimum (soferne sie existieren). Gib weiters an in welchen Fällen ein Maximum, bzw. Minimum vorliegt.
a) $A := [2, 5]$.
b) $A := (3, 4)$.
c) $A := [-7, 12)$.
d) $A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$.
e) $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ und } x^2 \leq 2\}$.
f) $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ und } x^3 > 7\}$.
g) $A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 5\}$.

21) Betrachte die Menge $A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$. Ist A nichtleer und nach oben beschränkt (letzteres heißt, dass es in $\mathbb{Q}$ eine obere Schranke von A gibt)? Besitzt A ein Supremum (in $\mathbb{Q}$)?

22) Löse die folgenden Ungleichungen (in $\mathbb{R}$).
a) $(x+1)^2 < x^2$.
b) $\dfrac{21}{x-4} \leq x$.
c) $\dfrac{x+2}{x-3} < \dfrac{x+2}{2}$.

23) Finde alle reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen.
a) $|x-4| \leq 2$.
b) $|2x-5| < |x+3|$.

24) Löse die folgenden Ungleichungen (in $\mathbb{R}$).
a) $\dfrac{7x-20}{x-4} \leq x+1$.
b) $\dfrac{8x+23}{x-5} < 3x+5$.

25) a) Es seien $a \in \mathbb{C}$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass $\big(a^n\big)^m = a^{nm}$ gilt.
b) Seien $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ und $n, m \in \mathbb{Z}$. Beweise, dass dann $\big(a^n\big)^m = a^{nm}$ gilt.

26) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die (übliche) Fibonacci-Folge, also $a_1 := 1$, $a_2 := 1$ und $a_n := a_{n-2} + a_{n-1}$ für $n > 2$. Beweise durch Induktion nach n, dass

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

27) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch $x_n := \dfrac{3n+1}{n+2}$ definiert.
a) Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
b) Beweise das Ergebnis aus Beispiel a) mit der Definition des Grenzwerts.
c) Mit Hilfe der Definition des Grenzwerts zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \dfrac{29}{10}$.

28) Bestimme den Grenzwert der folgenden Folgen und beweise das Ergebnis mit Hilfe der Definition des Grenzwerts.
a) $a_n := \dfrac{2n^2+5n+6}{n^2+n+4}$.
b) $x_n := \dfrac{4n^2+7n-2}{n^3+6n^2+3n+8}$.
c) $b_n := \dfrac{3n^3+9n^2+7n+8}{n^3+3n^2+2n+7}$.

29) a) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2+12n+48}{n^2+5n+6}$ und beweise dieses Ergebnis mit der Definition des Grenzwerts.

b) Zeige mit Hilfe der Definition des Grenzwerts, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^2+18n+29}{n^2+2n+4} \neq \dfrac{801}{100}$ gilt.

30) Von den folgenden Folgen bestimme den Grenzwert und beweise das Ergebnis mit der Definition des Grenzwerts.

a) $a_n := \dfrac{5n^3+7n^2+12n+19}{n^3+2n^2+5n+3}$.

b) $a_n := \dfrac{2n^2+3n-1}{n^2+4}$.

c) $x_n := \dfrac{7n^2+10n+5}{3n^2+4n+6}$.

31) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$. Es gebe ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters gelte $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Beweise, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ gilt.

32) Berechne (bzw. zeige die Divergenz) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n^2}$.
Hinweis: Verwende Beispiel 31).

33) Es sei $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ gilt.

34) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$. Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ gilt.

35) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(5+\dfrac{1}{n}\right)^3 - 5^3\right)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 5^n\left(3\left(2+\dfrac{1}{5^n}\right)^2 - 12\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\left(6\left(4+\dfrac{1}{2^n}\right)^3 - 384\right)$.

Hinweis: Verwende den binomischen Lehrsatz.

36) Die Zahl e wurde durch $e := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} := \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ definiert.

a) Verwende diese Definition um mit Hilfe eines Computers oder Taschenrechners Näherungswerte für e zu bestimmen.

Hinweis: Falls man Mathematica verwendet, kann man $\sum\limits_{n=0}^{10} \dfrac{1}{n!}$ durch

```
Sum[1/n!,{n,0,10}]
```

berechnen, in Maple durch

```
sum(1/n!,n=0 ... 10);
```

und in Maxima, wenn

```
sum(1/n!,n,0,10);
```

eingegeben wird. Also bekommt den Zahlenwert auf 20 Stellen indem man

```
N[Sum[1/n!,{n,0,10}],20]
```

eingibt. Übrigens kann man auch in Mathematica

```
Sum[1/n!,{n,0,Infinity}]
```
oder in Maple
```
sum(1/n!,n=0 ... infinity);
```
oder in Maxima
```
load(simplify_sum)$ simplify_sum(sum(1/n!,n,0,inf));
```
(in diesem Fall funktioniert hier `sum(1/n!,n,0,inf),simpsum;` jedoch nicht) eingeben um $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ zu berechnen (in diesem Fall ist dann aber das Ergebnis nicht sehr überraschend).

b) Bekanntlich gilt $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Unter Verwendung eines Computers oder Taschenrechners verwende diese Folge um Näherungswerte für e zu bestimmen.

c) Welche der beiden Methoden liefert bessere Näherungswerte, bzw. welches der beiden Verfahren konvergiert schneller?

37) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{7^n - 4^n}{7^n + 2^n}$.

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{12^n + 9^n + 5^n}$.

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n + 15 + \frac{\sin n}{8^n}}{n + \frac{n^3}{3^n}}$.

38) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$. Es gebe ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Beweise, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ gilt.

39) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $a_1 := \sqrt{2}$ und $a_n := \sqrt{2 + a_{n-1}}$ für $n > 1$ definiert. Berechne (bzw. zeige die Divergenz) $\lim_{n\to\infty} a_n$.

40) Bestimme die folgenden Grenzwerte (bzw. zeige die Divergenz).

a) $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi n)$.

b) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$.

c) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{17} n\right)$.

41) Berechne die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1} - \sqrt{n}}$.

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+12n+3} - \sqrt{n^2-4n+7}\right)$.

42) Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $a_n := \frac{n^{10}}{\left(1+\frac{1}{10}\right)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

a) Mit Hilfe eines Computers (oder Taschenrechners) berechne a_5, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{40} und a_{50}.
Hinweis: Verwendet man Mathematica so kann man durch
```
folge[n_]=(n^10)/(1+(1/10))^n
```
die Folge (a_n) definieren. Indem man
```
N[folge[10]]
```
eingibt, erhält man dann den Wert von a_{10}. Ähnlich funktioniert das in Maple mit

den Befehlen

```
folge:=n->(n^10)/(1+(1/10))^n;
evalf(folge(10));
```

und in Maxima, indem man

```
folge(n):=(n^10)/(1+(1/10))^n;
bfloat(folge(10));
```

eingibt.

b) Welche Vermutung über den Grenzwert von (a_n) würde Beispiel a) nahelegen?

c) Bestimme $\lim_{n\to\infty} a_n$.

d) Unter Verwendung eines Computers berechne a_{2000}.
Hinweis: Wenn man Mathematica verwendet, dann kann $\lim_{n\to\infty} a_n$ durch

```
Limit[folge[n],n->Infinity]
```

berechnet werden. Ebenso geht das in Maple mit

```
limit(folge(n),n=infinity);
```

und in Maxima kann man

```
limit(folge(n),n,inf);
```

eingeben. Zur Lösung von Beispiel c) ist diese „Methode“ selbstverständlich nicht zulässig, also bitte Beispiel c) vorher lösen.

43) Berechne (bzw. zeige die Divergenz) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

44) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$. b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{1000^n}$. c) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{n!}$.

45) Berechne die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1000n^4}$. b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}$.

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2^n+n}}{\sqrt[n]{n!}}$. d) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3-n^2-7n+15}$.

46) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $a_n := 2+(-1)^n\frac{2n^2+5n-1}{2n^2-4n+3}$ definiert. Bestimme alle Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiters berechne $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

47) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$, die sowohl $a_n \neq 4$ für alle $n\in\mathbb{N}$ als auch $\frac{3{a_n}^2+6a_{n+1}-9(a_n+4)}{a_n-4}-3a_n \leq 7$ für alle $n\in\mathbb{N}$ erfüllt. Berechne $\lim_{n\to\infty} a_n$.

48) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die (übliche) Fibonacci-Folge (siehe Beispiel 26)). Bestimme $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

49) Weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, gibt es eine bijektive Funktion $g:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$. Definiere die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_n := g(n)$. Wie sieht die Menge aller Häufungswerte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus? Welche Werte erhält man für $\limsup_{n\to\infty} x_n$ und $\liminf_{n\to\infty} x_n$?

50) Für die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimme alle Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiters berechne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_n := (-1)^n \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \dfrac{5n+3}{n+1}$.

b) $a_n := \sqrt[n]{17^n + n^2}$.

c) $a_n := \dfrac{4n\cos\frac{\pi n}{3} + \frac{n^2}{4^n} + 1}{n + \sin\frac{\pi n}{7} + \sqrt[n]{2n+5}}$.

51) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Für jedes $r \in \mathbb{R}$ gebe es einen Häufungswert $\tilde{b} \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($+\infty$ und $-\infty$ sind als Häufungswerte zugelassen) mit $\tilde{b} < r$. Zeige, dass $-\infty$ ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

52) Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{4n^2+1}{n^2-3n+4} + \frac{3}{\sqrt[n]{n!+6n}}\,, & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \frac{n^2}{8^n} + \frac{3n^2-2n-5}{n^2+2}\,, & \text{falls } n = 6k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2\sqrt[n]{n^3+3} + \frac{8n^2+1}{2n^2-3n+4}\,, & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \frac{3-2n^2}{n^2-2n+6}\,, & \text{falls } n = 6k+4 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bestimme die Menge aller Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiters berechne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

53) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei folgendermaßen definiert. Falls $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $2^k \le n < 2^{k+1}$, und es sei $a_n := \dfrac{1 + \frac{1}{k+1}}{n - 2^k + 1}$.

a) Fixiere ein beliebiges $j \in \mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $n_k := 2^k + j - 1$ (offensichtlich ist dann $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Sei jetzt $k > j$ (dann ist $2^k > j$). Berechne a_{n_k}.

b) Es seien j und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie in Beispiel a). Berechne $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

c) Bestimme die Menge aller Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Berechne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

54) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) := 14x + 5$ definiert ist.

a) Zeige mit der Definition der Stetigkeit, dass f stetig in 2 ist.

b) Mit Hilfe der Definition der Stetigkeit beweise, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

55) Definiere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0\,, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Beweise mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f nicht stetig in x ist.

56) Die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sei durch

$$f(x) := \begin{cases} -1\,, & \text{falls } x^2 < 2, \\ 1\,, & \text{falls } x^2 > 2, \end{cases}$$

definiert. Mit Hilfe der Definition der Stetigkeit beweise, dass die Funktion f stetig auf $\mathbb{Q}$ ist.

57) Berechne $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ und beweise das Ergebnis mit Hilfe der Definition des Grenzwerts.

58) Bestimme $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^6-117\,649}{x-7}$.

59) Berechne die folgenden Grenzwerte.
a) $\lim\limits_{x\to 12} \dfrac{x^2-8x-48}{x-12}$.
b) $\lim\limits_{x\to 12^+} \dfrac{x^2-8x-48}{|x-12|}$.
c) $\lim\limits_{x\to 12^-} \dfrac{x^2-8x-48}{|x-12|}$.
d) $\lim\limits_{x\to 12} \dfrac{x^2-8x-48}{|x-12|}$.

60) Gib die folgenden Definitionen.
a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.
b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$.
c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$.
d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\alpha$.
e) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=+\infty$.
f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$.

61) Betrachte die Funktion f, die durch $f(x):=\dfrac{1}{x-3}$ definiert ist. Berechne die folgenden Grenzwerte (führe die Beweise mit den entsprechenden Definitionen).
a) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.
b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.
c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.
d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
e) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$.
f) Formuliere analoge Resultate für $x\mapsto \dfrac{1}{x-a}$. Was ändert sich an den Beweisen?

62) Sei $x_0\in[a,b)$, und seien $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ und $g:[a,b)\to\mathbb{R}$ Funktionen. Es gebe ein $C\in\mathbb{R}$ mit $|f(x)|\le C$ für alle $x\in[a,b)$ und es gelte $\lim\limits_{x\to {x_0}^+} g(x)=0$. Beweise, dass $\lim\limits_{x\to {x_0}^+} f(x)g(x)=0$ gilt.

63) Bestimme die folgenden Grenzwerte.
a) $\lim\limits_{x\to 17^+} (x-17)\cos\frac{1}{x-17}$.
b) $\lim\limits_{x\to 17^+} \dfrac{(x-17)^4}{x^2+5}$.
c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}$.
d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\sin\frac{1}{x}$.
e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{21}\sin\frac{1}{x}$.
Hinweis: Verwende Beispiel 62).

64) Was ergibt $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\dfrac{1}{x}$?

65) Zeige, dass die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig sind.
a) $f(x):=\sin\big(x^2\big)$.
b) $f(x):=e^{\sin x}$.
c) $f(x):=\cos\dfrac{3x-5}{x^2+6}$.
Anleitung: Die Funktionen sin, cos und e^x können als stetig vorausgesetzt werden.

66) Untersuche, ob die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind.

a) $f(x) := \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$ b) $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

c) $f(x) := \begin{cases} x^8 \sin\frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$ d) $f(x) := \begin{cases} \cos\frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

67) Zeige, dass $\sqrt{5}$ eine reelle Zahl ist.

68) Beweise, dass $\sqrt[7]{31}$ eine reelle Zahl ist.

69) Betrachte die Funktion $f(x) := x^5 - 12$.

a) Fasse f zunächst als Funktion $f : [0,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ auf. Ist f stetig? Bestimme $f(0)$ und $f(2)$. Gibt es ein $x \in [0,2] \cap \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$ (kein Beweis notwendig)? Wenn ja, welches?

b) Jetzt fasse f als Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ auf. Ist f stetig? Gibt es ein $x \in [0,2]$ mit $f(x) = 0$? Wenn ja, welches?

70) Finde ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : [0,1) \to [0,1)$, die keinen Fixpunkt besitzt.

71) Sei $f : [0,1) \to [0,1)$ eine stetige surjektive Funktion. Beweise, dass f einen Fixpunkt besitzt.

72) Gib drei verschiedene Beispiele von stetigen Funktionen $f : [-3,5] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, die die Bedingungen $f(-3) < 0$ und $f(5) > 0$ erfüllen, aber für die es kein $x \in [-3,5] \cap \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$ gibt.

73) Berechne folgende Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$. b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n}$.

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n}\right)$.

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7}\right)^2 - \left(\frac{1}{7}\right)^3 + \cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{7}\right)^n\right)$.

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(\frac{5}{12}\right) + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{5}{12}\right)^n\right)$.

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \left(\frac{5}{12}\right) + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{5}{12}\right)^n\right)$.

74) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n^2]{e} - 1\right)$. b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3n]{e} - 1\right)$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n\left(e^{\frac{1}{2^{n-1}}} - 1\right)$. d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{7} - 1\right)$.

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 8^n\left(5^{\frac{17}{8^n}} - 1\right)$. f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^5\left(\sqrt[n^5]{12} - 1\right)$.

75) Berechne:

a) $e^{2\log x}$. b) $e^{x\log 15}$. c) $e^{\log x+\log 3}$.

d) $e^{8\log x+\log 19}$. e) $5e^{3\log x^7}$. f) $e^{x^3\log x}$.

76) Vereinfache die folgenden Ausdrücke.

a) $\log 15-\log 3$. b) $\log x^6$. c) $\log x+\log 11$.

d) $3\log 2+\log 3$. e) $\log e^{3x}$. f) $\frac{1}{2}\log 25$.

77) Schreibe die folgenden Funktionen als Linearkombination von $\sin x$ und $\cos x$.

a) $\sin\Big(x-\dfrac{\pi}{4}\Big)$. b) $\cos\Big(x+\dfrac{\pi}{3}\Big)$.

c) $\sin\Big(x+\dfrac{\pi}{6}\Big)$. d) $\cos\Big(x-\dfrac{5\pi}{3}\Big)$.

78) Berechne:

a) $\tan\dfrac{\pi}{4}$. b) $\tan\Big(-\dfrac{\pi}{4}\Big)$. c) $\tan\dfrac{3\pi}{4}$.

d) $\tan\dfrac{\pi}{6}$. e) $\tan\dfrac{\pi}{3}$. f) $\tan 2\pi$.

g) $\tan\dfrac{16\pi}{3}$. h) $\tan\dfrac{3\pi}{2}$. i) $\tan\dfrac{33\pi}{4}$.

79) Berechne die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 5^n\sin\dfrac{1}{5^n}$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{2n}$. c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\sin\dfrac{5\pi}{6n^3}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^4\Big(\cos\dfrac{1}{n^2}-1\Big)$. e) $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n\Big(\cos\dfrac{\pi}{2^n}-1\Big)$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\cos\dfrac{2\pi}{n}-1\Big)$. g) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{2\pi}{n^2}$.

80) Gib ein Beispiel einer beschränkten, stetigen Funktion $f:[0,1)\to\mathbb{R}$, die weder ein Minimum noch ein Maximum besitzt.

81) Welche der folgenden Funktionen sind gleichmäßig stetig. Gib dabei auch jeweils exakte Beweise (für die gleichmäßige Stetigkeit, bzw. dafür, dass die Funktion nicht gleichmäßig stetig ist).

a) $f:[3,7]\to\mathbb{R},\ f(x):=x^{1000}$. b) $f:(-6,3)\to\mathbb{R},\ f(x):=5^x$.

c) $f:(0,4]\to\mathbb{R},\ f(x):=\dfrac{x^3}{x+1}$. d) $f:(1,6]\to\mathbb{R},\ f(x):=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

e) $f:[-2,8)\to\mathbb{R},\ f(x):=x^7-x^3+5x^2+2$.

82) Definiere $C\big([0,1]\big)$ als die Menge aller stetigen Funktionen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Für $f\in C\big([0,1]\big)$ definiere $\|f\|_\infty$ durch $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

a) Sei $f\in C\big([0,1]\big)$. Zeige, dass es ein $x\in[0,1]$ mit $|f(x)|=\|f\|_\infty$ gibt.

b) Begründe, dass für verschiedene Funktionen im Allgemeinen das in Beispiel a) gefundene x verschieden ist. Genauer gesagt, gib Beispiele für $f,g\in C\big([0,1]\big)$ mit $\{x\in[0,1]:|f(x)|=\|f\|_\infty\}\cap\{x\in[0,1]:|g(x)|=\|g\|_\infty\}=\emptyset$.

83) Es seien $C\big([0,1]\big)$ und $\|f\|_\infty$ wie in Beispiel 82) definiert. Beweise, dass die folgenden Eigenschaften gelten.
a) $\|f\|_\infty \geq 0$ für alle $f \in C\big([0,1]\big)$.
b) $\|f\|_\infty = 0$ gilt genau dann, wenn $f = 0$.
c) $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle $f \in C\big([0,1]\big)$.
d) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ für alle $f, g \in C\big([0,1]\big)$.
Bemerkung: Auf Grund der obigen Eigenschaften nennt man $\|.\|_\infty$ eine Norm auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$.

84) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ berechne $f'(3)$ mit Hilfe der Definition der Ableitung.

85) Beweise (ohne e^x und log zu verwenden):
a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x^n)' = nx^{n-1}$.
Anleitung: Verwende die Produktregel und Induktion.
b) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $(x^n)' = nx^{n-1}$.
Anleitung: Quotientenregel.

86) Zeige (ohne e^x und log zu verwenden):
a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in (0, +\infty)$ gilt $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.
Anleitung: Inversenregel.
b) Für alle $q \in \mathbb{Q}$ und alle $x \in (0, +\infty)$ gilt $(x^q)' = qx^{q-1}$.
Anleitung: Kettenregel.

87) Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen.
a) $f(x) := x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 8$.
b) $f(x) := \dfrac{1}{x^3+2}$.
c) $f(x) := 3\log x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{17}{x^2} - \dfrac{2}{x^6}$.
d) $f(x) := \sin(3x) + \tan^2 x - 3e^{2x}$.
e) $f(x) := \Big(1 + \big(2 + (3 + (4 + x^6)^2)^3\big)^4\Big)^5$.

88) Für die folgenden Funktionen bestimme die Ableitungen.
a) $f(x) := 2^x$.
b) $f(x) := x^{x^7+3x}$.
c) $f(x) := x^x$.
d) $f(x) := \sin\left(\log\left(\dfrac{x^2+14}{(x-3)^5}\right)\right) + 6^{5x}$.
e) $f(x) := (\log x)^{-7x}$.
f) $f(x) := (x + x^4)^x$.
g) $f(x) := x^{x^2\cos(4x)}$.
h) $f(x) := \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

89) Differenziere die folgenden Funktionen.
a) $f(x) := \log\dfrac{1+x}{1-x}$.
b) $f(x) := \sqrt[7]{x^2 + \cos^3\sqrt{2x+6}}$.
c) $f(x) := \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$.
d) $f(x) := \dfrac{\sqrt[6]{x} - \sqrt{x}}{x^2+1}$.
e) $f(x) := \sqrt[5]{8^x + x^x}$.
f) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{\tan x}}}$.

90) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \dfrac{1}{n!} x^n \operatorname{sgn} x$.

a) Skizziere die Graphen der Funktionen f_n.

b) Zeige, dass $f_1(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

c) Beweise, dass ${f_{n+1}}' = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

d) Für $n \in \mathbb{N}$ gib ein Beispiel einer Funktion, die n-mal differenzierbar ist, aber nicht $n+1$-mal differenzierbar ist.

e) Gib ein konkretes Beispiel einer 4-mal differenzierbaren Funktion, die nicht 5-mal differenzierbar ist.

91) Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Bestimme $f'(x)$ für alle x, in denen f differenzierbar ist, und bestimme $f''(x)$ für alle x, in denen f 2-mal differenzierbar ist. Weiters untersuche die Stetigkeit von f' und f''.

92) EinE Bauer/Bäurin möchte auf seinem/ihrem (ebenen) Grundstück eine Viehweide einrichten und mit einem Zaun umgeben. Diese Viehweide soll rechteckig sein. Es stehen 260 m Zaun zur Verfügung. Welche Abmessungen soll diese Viehweide haben, wenn die Tiere möglichst viel Weidefläche haben sollen (und wie groß ist dann die Weidefläche)?

93) Der Ellipse $\dfrac{{x_1}^2}{18} + \dfrac{{x_2}^2}{2} \leq 1$ soll das größte achsenparallele Rechteck eingeschrieben werden. Welche Abmessungen muss dieses Rechteck haben, und wie groß ist dann die Fläche?

94) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Für welche reelle Zahl x nimmt $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (x - a_j)^2$ den kleinstmöglichen Wert an?

95) Einer Kugel mit Radius r ($r > 0$) soll der volumsgrößte Zylinder eingeschrieben werden. Welche Abmessungen muss dieser Zylinder haben, und wie groß ist dann sein Volumen?

96) Sei $a \in \mathbb{R}$, und $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion, die die Eigenschaft $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ erfüllt. Beweise, dass die Funktion f ein Minimum m besitzt, und dass $m \in \{x \in (a, +\infty) : f'(x) = 0\}$ gilt.

97) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Weiters sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist und $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ erfüllt. Zeige, dass die Funktion f ein Minimum m besitzt, und dass $m \in \{a\} \cup \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$ gilt.

98) Besitzen die folgenden Funktionen Minima (Begründungen angeben!)? Falls sie Minima besitzen, bestimme diese.

a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := e^{x-1} + \dfrac{1}{x}\,.$

b) $f : [2, 7) \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{9}{7-x} - 2x^2 + 15x - 19\,.$

c) $f : [3, 8) \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{1}{8-x} - x^2 + 11x + 3\,.$

Hinweis: Verwende die Beispiele 96) und 97).

99) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} 60000\,x^4 \sin\frac{1}{x} - e^x + x + 2\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ definiert. Zeige, dass f in 0 ein (striktes) lokales Maximum besitzt.

100) Es sei $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$. Bestimme die Abmessungen (und die Fläche) des flächengrößten Rechtecks, das eine Diagonale der Länge d besitzt.

101) Bekanntlich gilt $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x > 0$, und daher ist der Tangens streng monoton wachsend. Warum ist dann $\tan\frac{\pi}{4} > \tan\frac{3\pi}{4}$, obwohl $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ gilt?

102) Untersuche Monotonieintervalle, lokale Extrema und Wendepunkte der folgenden Funktionen. Weiters skizziere ihre Graphen.

a) $f(x) := 6x^3 - 45x^2 - 252x + 169\,.$

b) $f(x) := \cos x\,.$

c) $f(x) := \tan x\,.$

d) $f(x) := \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-4}\,.$

103) Finde die Monotonieintervalle, die lokalen Extrema und Wendepunkte der folgenden Funktionen und skizziere ihre Graphen.

a) $\dfrac{1}{x^2+1}\,.$

b) $\dfrac{3x+29}{21-4x-x^2}\,.$

c) $e^{-x^2}\,.$

104) Für die Funktionen in Beispiel 102) gib Bereiche an, in denen diese Funktionen konvex, bzw. konkav sind.

105) Betrachte die Funktion $\sin x$ (als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

a) Berechne $f'\left(\dfrac{20\pi}{3}\right)$.

b) Was sagt wegen Beispiel a) der Satz über die inverse Funktion aus?

c) Finde ein maximales Intervall I, das $\frac{20\pi}{3}$ enthält, sodass $f|_I$ invertierbar ist. Wie sieht $f(I)$ aus?

d) Bestimme die Umkehrfunktion in Beispiel c).

106) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} -5x - 8\,x^2 \sin\frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ definiert.

Beweise, dass für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Funktion f in einem offenen Intervall, das $\frac{1}{2\pi n}$ enthält, invertierbar ist.

107) Betrachte wieder die Funktion f aus Beispiel 106).
a) Berechne $f'(0)$.
b) Zeige, dass es kein offenes Intervall I mit $0 \in I$ gibt, sodass $f|_I$ injektiv ist.
c) Warum kann man hier den Satz über die inverse Funktion nicht anwenden?

108) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := e^{-x^2}$ gleichmäßig stetig ist.

109) Differenziere die folgenden Funktionen.
a) $\log \arcsin x\,.$ b) $f(x) := x^{\arctan x}\,.$ c) $\sqrt[3]{\arccos(xe^x)}\,.$

110) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \arctan x$ definiert.
a) Untersuche Monotonieintervalle, lokale Extrema, Wendepunkte und Intervalle, auf denen f konvex, bzw. konkav ist. Weiters skizziere den Graphen von f.
b) Ist f gleichmäßig stetig (Beweis!)?

111) Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen.
a) $f(x) := \sqrt[5]{\cosh x}\,.$ b) $f(x) := \arctan\bigl(\tanh x\bigr)\,.$
c) $f(x) := \log\Bigl(\operatorname{arcsinh}\bigl(e^x\bigr)\Bigr)\,.$ d) $f(x) := \sin\bigl(\operatorname{arctanh} x\bigr)\,.$
e) $f(x) := \operatorname{arctanh}\left(\dfrac{1}{\cosh x}\right).$ f) $f(x) := \tanh\Bigl(\sin\bigl(\operatorname{arcsinh} x\bigr)\Bigr)\,.$

112) a) Beweise, dass $\cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$ für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.
b) Zeige, dass $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt.

113) Leite eine explizite Formel für $\operatorname{arcsinh} x$ her.

114) Bei einem radioaktiven Stoff sei die Abnahme zum Zeitpunkt t das dreifache der vorhandenen Stoffmenge. Bezeichnet man mit $x(t)$ die zum Zeitpunkt t vorhandene Stoffmenge, so gilt also $\dot{x}(t) = -3x(t)$. Zum Zeitpunkt 0 seien 24 Einheiten (eine „Einheit" ist eine sehr sehr große Anzahl von Atomen dieses Stoffes) vorhanden.
a) Bestimme $x(t)$ (explizit).
b) Berechne jenen Zeitpunkt T, zu dem genau die Hälfte der ursprünglichen Stoffmenge (Stoffmenge zum Zeitpunkt 0) vorhanden ist.
Bemerkung: Man nennt T die Halbwertszeit dieses Stoffes.

115) Betrachte einen radioaktiven Stoff. Es sei $x(t)$ die zum Zeitpunkt t vorhandene Stoffmenge. Unser Stoff erfülle die Zerfallsgleichung $\dot{x}(t) = -kx(t)$, wobei $k > 0$ eine reelle Zahl ist. Die zum Zeitpunkt 0 vorhandene Stoffmenge sei x_0, wobei $x_0 > 0$. Weiters sei T die Halbwertszeit dieses Stoffes, also T ist so gewählt, dass $x(T) = \dfrac{x_0}{2}$ gilt (wir betrachten k und x_0 als bekannt, T als vorläufig noch unbekannt).
a) Berechne $x(t)$. b) Bestimme T.
c) Hängt T von x_0 ab?
d) Zeige, dass $x(t+T) = \dfrac{x(t)}{2}$ für alle t gilt.

116) Die allgemeine Situation sei wie in Beispiel 115), jedoch betrachten wir jetzt x_0 und T als bekannt, k hingegen als vorläufig unbekannt.
a) Bestimme k.
Hinweis: Verwende Beispiel 115).
b) Lässt sich in der Praxis eher k oder T durch direkte Messungen bestimmen?

117) Bei einer physikalischen Schwingung (mit Reibung) eines Körpers der Masse 1 betrage die Reibungskraft das 14-fache der Geschwindigkeit des Körpers, und die „zurückziehende Kraft“ das 53-fache des Abstands des Körpers von der Ruhelage. Bezeichnet man mit $x(t)$ den Abstand des Körpers von der Ruhelage, so gilt daher

$$\ddot{x}(t) = -14\dot{x}(t) - 53x(t)\,.$$

Bestimme $x(t)$.

118) Löse die folgenden Differenzialgleichungen.
a) $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = 0\,.$
b) $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) - 21x(t) = 0\,.$
c) $\ddot{x}(t) - 11\dot{x}(t) + 28x(t) = 0\,.$
d) $\dot{x}(t) - 6x(t) = 0\,.$

119) Bestimme die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
a) $\ddot{x}(t) - 9x(t) = 0\,.$
b) $\ddot{x}(t) + 49x(t) = 0\,.$
c) $\ddot{x}(t) = 0\,.$
d) $\dot{x}(t) + 23x(t) = 0\,,\ x(0) = 42\,.$

120) Finde die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
a) $\ddot{x}(t) + 11\dot{x}(t) + 24x(t) = 0\,.$
b) $\ddot{x}(t) - 6\dot{x}(t) + 34x(t) = 0\,,\ x(0) = 6\,,\ \dot{x}(0) = 3\,.$
c) $\ddot{x}(t) - 16\dot{x}(t) + 48x(t) = 0\,.$
d) $\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 25x(t) = 0\,,\ x(0) = 2\,,\ \dot{x}(0) = -3\,.$

121) Berechne die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
a) $\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) + 40x(t) = 0\,.$
b) $\ddot{x}(t) - 12\dot{x}(t) + 36x(t) = 0\,.$
c) $\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) - 85x(t) = 0\,,\ x(0) = 9\,,\ \dot{x}(0) = 1\,.$

122) Bestimme die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
a) $(1+t)\dot{x}(t) = 2x(t)\,,\ x(0) = 7\,.$
b) $(1+t)\dot{x}(t) = -5x(t)\,.$
c) $(1+t)\dot{x}(t) = \dfrac{1}{3}x(t)\,.$
d) $(1+t)\dot{x}(t) = -\dfrac{7}{4}x(t)\,,\ x(0) = -2\,.$

123) Welche zweimal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen folgende Bedingungen?
a) $f''(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
b) $f''(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0\,,\ f'(0) = 1\,.$
c) $f''(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1\,,\ f'(0) = 0\,.$

124) Finde alle zweimal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen.
a) $f''(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
b) $f''(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0\,,\ f'(0) = 1\,.$
c) $f''(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1\,,\ f'(0) = 0\,.$

125) Berechne die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{7^x - 1}{\log(1+x)}$.

b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{e^{x-\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}x}$.

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$.

d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{e^{x-3} - 1}{\log \frac{x}{3}}$.

126) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

b) $\lim_{x\to 0^+} x^{x^7}$.

c) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

d) $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$, wobei $a \in \mathbb{R}$.