# Proseminar zu
# Analysis in einer Variablen
# für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

*Wintersemester 2014/2015*

Sebastian Banert
Calin Iulian Martin
Armin Rainer
Peter Raith

1) Für die Funktion $e^x$ (als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) löse die folgenden Aufgaben.
   a) Bestimme das $n$-te Taylorpolynom von $e^x$ (um 0) und eine Darstellung des entsprechenden Restglieds.
   b) Konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe gegen $e^x$?

2) Verwende Beispiel 1) um Näherungswerte für $e^2$ zu berechnen.
   a) Berechne zunächst $e^2$ mit einem Fehler von höchstens $10^{-10}$ (Taschenrechner oder Computer).
   b) Dann bestimme $e^2$ mit einem Fehler von höchstens $10^{-100}$ (Computer).

   *Hinweis*: Um das Restglied abzuschätzen verwende, dass $e \leq 3$ ist (Vorlesung), und daher ist $e^2 \leq 9$.

3) Der cos werde als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachtet.
   a) Berechne das $n$-te Taylorpolynom von $\cos x$ (um 0) und eine Darstellung des entsprechenden Restglieds.
   b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe gegen $\cos x$?

4) Beweise durch Induktion nach $n$, dass für jede Menge $A$ mit $n$ Elementen die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ $2^n$ Elemente besitzt.

5) Mittels vollständiger Induktion zeige, dass die folgenden Formeln für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,.$
   b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$
   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\,.$

6) Es seien $M_1$, $M_2$ und $M_3$ Mengen, und es seien $f : M_1 \to M_2$ und $g : M_2 \to M_3$ Funktionen. Zeige, dass $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\big(g^{-1}(A)\big)$ für alle Teilmengen $A$ von $M_3$ gilt.

7) Seien $M_1$ und $M_2$ Mengen und $f : M_1 \to M_2$ sei eine Funktion. Weiters sei $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie von Teilmengen von $M_2$. Beweise, dass $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(A_j)$ gilt.

8) Es seien $M_1$ und $M_2$ Mengen, $f : M_1 \to M_2$ sei eine Funktion, und es sei $A \subseteq M_2$.
a) Zeige, dass $f\big(f^{-1}(A)\big) \subseteq A$ gilt.
b) Finde ein Beispiel, bei dem $f\big(f^{-1}(A)\big) \neq A$ gilt.

9) Beweise den folgenden *Satz*:
Es seien $M_1$ und $M_2$ Mengen und $f : M_1 \to M_2$ sei eine Funktion. Dann ist $f$ genau dann surjektiv, wenn $f\big(f^{-1}(A)\big) = A$ für alle Teilmengen $A$ von $M_2$ gilt.

10) Bei den folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestimme $f'(x)$ für alle $x$, in denen $f$ differenzierbar ist. Weiters skizziere den Graphen von $f$.
a) $f(x) := \begin{cases} 4x^2 - 24x + 43\,, & \text{falls } x \geq 3, \\ 7\,, & \text{falls } x < 3. \end{cases}$
b) $f(x) := \begin{cases} x^2 + 4x + 8\,, & \text{falls } x \geq -3, \\ 5\,, & \text{falls } x < -3. \end{cases}$

11) Beweise, dass $\sqrt[7]{31}$ eine reelle Zahl ist.

12) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{1}{x^4 + 1}$.
a) Bestimme die Maxima und Minima von $f$.
b) Untersuche Monotonieintervalle, Wendepunkte und Intervalle, auf denen $f$ konvex, bzw. konkav ist. Weiters skizziere den Graphen von $f$.
c) Ist $f$ gleichmäßig stetig (Beweis!)?

13) Berechne (bzw. zeige die Divergenz) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}\right)$.

14) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $a_1 := \sqrt{2}$ und $a_n := \sqrt{2 + a_{n-1}}$ für $n > 1$ definiert. Berechne (bzw. zeige die Divergenz) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

15) Nachdem $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, und daher auch $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ abzählbar ist, gibt es eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n := f(n)$. Bestimme die Menge aller Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiters berechne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

16) Bei einem radioaktiven Stoff sei die Abnahme zum Zeitpunkt $t$ das dreifache der vorhandenen Stoffmenge. Bezeichnet man mit $x(t)$ die zum Zeitpunkt $t$ vorhandene Stoffmenge, so gilt also $\dot{x}(t) = -3x(t)$. Zum Zeitpunkt 0 seien 24 Einheiten (eine „Einheit" ist eine sehr sehr große Anzahl von Atomen dieses Stoffes) vorhanden.
  a) Bestimme $x(t)$ (explizit).
  b) Berechne jenen Zeitpunkt $T$, zu dem genau die Hälfte der ursprünglichen Stoffmenge (Stoffmenge zum Zeitpunkt 0) vorhanden ist.
  *Bemerkung*: Man nennt $T$ die Halbwertszeit dieses Stoffes.

17) Betrachte einen radioaktiven Stoff. Es sei $x(t)$ die zum Zeitpunkt $t$ vorhandene Stoffmenge. Unser Stoff erfülle die Zerfallsgleichung $\dot{x}(t) = -kx(t)$, wobei $k > 0$ eine reelle Zahl ist. Die zum Zeitpunkt 0 vorhandene Stoffmenge sei $x_0$, wobei $x_0 > 0$. Weiters sei $T$ die Halbwertszeit dieses Stoffes, also $T$ ist so gewählt, dass $x(T) = \dfrac{x_0}{2}$ gilt (wir betrachten $k$ und $x_0$ als bekannt, $T$ als vorläufig noch unbekannt).
  a) Berechne $x(t)$.
  b) Bestimme $T$.
  c) Hängt $T$ von $x_0$ ab?
  d) Zeige, dass $x(t+T) = \dfrac{x(t)}{2}$ für alle $t$ gilt.

18) Die allgemeine Situation sei wie in Beispiel 17), jedoch betrachten wir jetzt $x_0$ und $T$ als bekannt, $k$ hingegen als vorläufig unbekannt.
  a) Bestimme $k$.
  *Hinweis*: Verwende Beispiel 17).
  b) Lässt sich in der Praxis eher $k$ oder $T$ durch direkte Messungen bestimmen?

19) Bei einer physikalischen Schwingung (mit Reibung) eines Körpers der Masse 1 betrage die Reibungskraft das 14-fache der Geschwindigkeit des Körpers, und die „zurückziehende Kraft" das 53-fache des Abstands des Körpers von der Ruhelage. Bezeichnet man mit $x(t)$ den Abstand des Körpers von der Ruhelage, so gilt daher

$$\ddot{x}(t) = -14\dot{x}(t) - 53x(t)\,.$$

Bestimme $x(t)$.

20) Löse die folgenden Differenzialgleichungen.
  a) $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = 0\,.$
  b) $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) - 21x(t) = 0\,.$
  c) $\ddot{x}(t) - 11\dot{x}(t) + 28x(t) = 0\,.$
  d) $\dot{x}(t) - 6x(t) = 0\,.$

21) Bestimme die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
  a) $\ddot{x}(t) - 9x(t) = 0\,.$
  b) $\ddot{x}(t) + 49x(t) = 0\,.$
  c) $\ddot{x}(t) = 0\,.$
  d) $\dot{x}(t) + 23x(t) = 0\,,\ x(0) = 42\,.$

22) Finde die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
  a) $\ddot{x}(t) + 11\dot{x}(t) + 24x(t) = 0\,.$
  b) $\ddot{x}(t) - 6\dot{x}(t) + 34x(t) = 0\,,\ x(0) = 6\,,\ \dot{x}(0) = 3\,.$
  c) $\ddot{x}(t) - 16\dot{x}(t) + 48x(t) = 0\,.$
  d) $\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 25x(t) = 0\,,\ x(0) = 2\,,\ \dot{x}(0) = -3\,.$

23) Berechne die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
a) $\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) + 40x(t) = 0\,.$ b) $\ddot{x}(t) - 12\dot{x}(t) + 36x(t) = 0\,.$
c) $\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) - 85x(t) = 0\,,\ x(0) = 9\,,\ \dot{x}(0) = 1\,.$

24) Bestimme die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
a) $(1+t)\dot{x}(t) = 2x(t)\,,\ x(0) = 7\,.$ b) $(1+t)\dot{x}(t) = -5x(t)\,.$
c) $(1+t)\dot{x}(t) = \dfrac{1}{3}x(t)\,.$ d) $(1+t)\dot{x}(t) = -\dfrac{7}{4}x(t)\,,\ x(0) = -2\,.$

25) Welche zweimal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen folgende Bedingungen?
a) $f''(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
b) $f''(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0\,,\ f'(0) = 1\,.$
c) $f''(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1\,,\ f'(0) = 0\,.$

26) Finde alle zweimal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen.
a) $f''(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
b) $f''(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0\,,\ f'(0) = 1\,.$
c) $f''(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1\,,\ f'(0) = 0\,.$

27) a) Zeige, dass $\sin\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ für $x \in [0, 2\pi]$ gilt.
b) Beweise, dass für $x \in [-\pi, \pi]$ die Eigenschaft $\cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ gilt.

28) Beweise, dass $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ und $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\,.$

29) Berechne die exakten Werte von $\sin\frac{\pi}{12}$ und $\cos\frac{\pi}{12}$ ($\frac{\pi}{12}$ ist $15^\circ$).
*Anleitung*: Verwende die Beispiele 27) und 28).

30) Für die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ finde einen konkreten Wert, der den Mittelwertsatz erfüllt (also finde $\zeta \in (0, 2)$ mit $f(2) - f(0) = f'(\zeta)(2-0)$.

31) Finde konkrete Werte, an denen der Mittelwertsatz für die Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x + \sin x$ gilt.

32) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ definiert. Für welche $x$ ist $f$ differenzierbar (Beweise!)? Berechne $f'(x)$ für alle $x$, in denen $f$ differenzierbar ist.

33) Beweise mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $x \mapsto |x|$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

34) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer, und es seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : A \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Mit der Definition der Stetigkeit zeige, dass die Funktionen

$$\max(f,g) : A \to \mathbb{R}\,, \quad \max(f,g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$$

und

$$\min(f,g) : A \to \mathbb{R}\,, \quad \min(f,g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

stetig sind.

35) a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ beweise, dass

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \text{und} \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

gelten.

b) Verwende Beispiel a) um einen anderen Beweis für Beispiel 34) zu geben.

36) Es seien $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ und $g : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ Funktionen. Weiters gebe es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in (a,+\infty)$ und es gelte $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$. Zeige, dass $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ gilt.

37) Berechne $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x-14}$.
*Hinweis*: Verwende Beispiel 36).

38) Für $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ löse folgende Aufgaben.

a) Bestimme das $n$-te Taylorpolynom von $\cosh x$ (um 0) und eine Darstellung des entsprechenden Restglieds.

b) Gib alle $x \in \mathbb{R}$ an, für die die Taylorreihe gegen $\cosh x$ konvergiert.

39) Ein Leopard wird bei einer Wanderung in der Savanne beobachtet. Zwischen dem Zeitpunkt 0 und dem Zeitpunkt 10 beträgt zum Zeitpunkt $t$ die Entfernung des Leoparden vom Beobachtungspunkt $t^3 - 12t^2 + 45t + 17$. Zu welchem Zeitpunkt ist der Leopard dem Beobachtungspunkt am nächsten, und wie groß ist dabei seine Entfernung vom Beobachtungspunkt?

40) Berechne die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^x - 1}{\log(1+x)}$.

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{e^{x-\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{e^{x-3} - 1}{\log \frac{x}{3}}$.

41) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^7}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$, wobei $a \in \mathbb{R}$.

42) Betrachte die Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x):=x^2$, die Partition $P:=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$ und die Zwischenwerte $\tilde{P}:=\left(\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{9}{10}\right)$.
- a) Berechne die Untersumme $\underline{S}(f,P)$ und die Obersumme $\overline{S}(f,P)$.
- b) Welchen Wert hat die Riemannsumme $S(f,P,\tilde{P})$?
- c) Berechne eine weitere Riemannsumme von $f$ bezüglich $P$.

43) Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ durch $f(x):=x^2$ definiert. Für $n\in\mathbb{N}$ definiere die Partition $P_n$ durch $P_n:=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\right\}$.
- a) Fixiere $n\in\mathbb{N}$ und bestimme $\underline{S}(f,P_n)$ und $\overline{S}(f,P_n)$.
- b) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S}(f,P_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}(f,P_n)$.
  *Hinweis*: Verwende Beispiel 5) a), also die Formel $\sum_{k=1}^n k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
- c) Für $n\in\mathbb{N}$ seien $\tilde{P}_n$ beliebige Zwischenwerte von $P_n$. Was kann man über
  $$\lim_{n\to\infty}S(f,P_n,\tilde{P}_n)$$
  aussagen?
- d) Folgt unmittelbar aus den Beispielen a)–c), dass $x^2$ auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist? Kann man die Beispiele a)–c) verwenden, um $\int_0^1 x^2\,dx$ auszurechnen?

44) Für $n\in\mathbb{N}$ definiere $f_n:[0,5]\to\mathbb{R}$ durch
$$f_n(x):=\begin{cases}0\,, & \text{falls } x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\cup[1,5],\\ 4n^2x-4n^2+4n\,, & \text{falls } x\in\left[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{2n}\right],\\ 4n^2-4n^2x\,, & \text{falls } x\in\left[1-\frac{1}{2n},1\right].\end{cases}$$
- a) Skizziere $f_n$.
- b) Zeige, dass $f_n$ punktweise gegen 0 konvergiert.
- c) Berechne $\int_0^5 f_n(x)\,dx$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^5 f_n(x)\,dx$ und $\int_0^5 0\,dx$.

45) Für $x\in[0,1]$ beweise, dass $\arccos\sqrt{\frac{x+1}{2}}=\frac{1}{2}\arccos x$ gilt.

46) Leite eine explizite Formel für $\operatorname{arcsinh} x$ her.

47) Betrachte für $n\in\mathbb{N}$ die durch
$$f_n(x):=\begin{cases}0\,, & \text{falls } x\in\left[1+\frac{2}{n},3\right],\\ n^4x-n^4\,, & \text{falls } x\in\left[1,1+\frac{1}{n}\right],\\ n^4+2n^3-n^4x\,, & \text{falls } x\in\left[1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n}\right],\end{cases}$$
definierte Funktion $f_n:[1,3]\to\mathbb{R}$.
- a) Skizziere $f_n$.
- b) Zeige, dass $f_n$ punktweise gegen 0 konvergiert.
- c) Bestimme $\int_1^3 f_n(x)\,dx$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3 f_n(x)\,dx$ und $\int_1^3 0\,dx$.

48) Falls $n \in \mathbb{N}$, dann definiere $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x = 0, \\ \left(\frac{k}{n}\right)^2\,, & \text{falls } \frac{k-1}{n} < x \leq \frac{k}{n} \text{ für ein } k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \end{cases}$$

(Dieses Beispiel ist ohne Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, zu lösen. Ebenso soll auch der Satz, dass jede monotone Funktion Riemann-integrierbar ist, nicht verwendet werden).

a) Skizziere $f_n$.

b) Berechne $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ (passende Sätze aus der Vorlesung verwenden, genaue Begründungen geben!).

c) Zeige, dass $f_n$ gleichmäßig gegen die Funktion $x^2$ (als Funktion $[0,1] \to \mathbb{R}$) konvergiert.

d) Bestimme $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ (passende Sätze aus der Vorlesung verwenden, genaue Begründungen geben!).

49) Definiere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2^n}\,, & \text{falls } x \in \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right) \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0\,, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

a) Gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen $f$ konvergiert? (Begründung!)

b) Gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen $f$ konvergiert? (Begründung!)

c) Ist $f$ Riemann-integrierbar? (Begründung!)

d) Berechne $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, soferne $f$ Riemann-integrierbar ist.

50) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $e^{-2x} + 7\sin x - 4x$ definiert. Beweise, dass es ein offenes Intervall $I$ mit $0 \in I$ gibt, sodass $f$ auf $I$ invertierbar ist.

51) Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^3$. Zeige, dass $f'(0) = 0$ gilt, aber $f$ trotzdem in einem offenen Intervall, das 0 enthält, invertierbar ist.

52) Zwei SpielerInnen $A$ und $B$ spielen das folgende Spiel mit einem Würfel. Wenn der/die SpielerIn $A$ einen Sechser würfelt, dann hat er/sie gewonnen. Ansonsten ist $B$ mit dem Würfeln an der Reihe. Dabei gewinnt $B$, falls er/sie eine ungerade Augenzahl würfelt. Andernfalls ist wieder $A$ mit dem Würfeln an der Reihe. Dabei beginnt $A$ mit dem Würfeln, und das Spiel wird so lange fortgesetzt, bis einE SpielerIn gewonnen hat. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass $A$ gewinnt.

53) Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Bestimme $f'(x)$ für alle $x$, in denen $f$ differenzierbar ist, und bestimme $f''(x)$ für alle $x$, in denen $f$ 2-mal differenzierbar ist. Weiters untersuche die Stetigkeit von $f'$ und $f''$.

54) Finde drei verschiedene Beispiele von Funktionen $f : [1,7] \to \mathbb{R}$ mit $f(1) > 0$ und $f(7) < 0$, für die es kein $x \in [1,7]$ gibt, das $f(x) = 0$ erfüllt. Kann man auch eine stetige Funktion mit dieser Eigenschaft finden?

55) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

definiert.

a) Gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen $f$ konvergiert? (Begründung!)

b) Ist $f$ Riemann-integrierbar? (Begründung!)

c) Berechne $\int_0^1 f(x)\,dx$, soferne $f$ Riemann-integrierbar ist.

56) Bestimme die folgenden Integrale.

a) $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx\,.$

b) $\int_0^2 x^7\,dx\,.$

c) $\int_0^\pi \sin x\,dx\,.$

d) $\int_2^7 \frac{1}{x^2}\,dx\,.$

57) Finde die Lösungen der folgenden Integrale.

a) $\int \frac{1}{x}\,dx\,.$

b) $\int e^{-5x}\,dx\,.$

c) $\int 48(4x-17)^3\,dx\,.$

d) $\int_{-2}^{12} \frac{1}{x}\,dx\,.$

58) Suche die Stammfunktionen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) := 35\cos(5x+2)\,.$

b) $f(x) := \dfrac{12}{\sqrt{1-(4x+3)^2}}\,.$

c) $f(x) := \dfrac{1}{(x-16)^2+1}\,.$

d) $f(x) := \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}}\,.$

59) Berechne die folgenden Integrale.

a) $\int x^2\cos x^3\,dx\,.$

b) $\int_2^8 \frac{1}{x\log x}\,dx\,.$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx\,.$

d) $\int 20(7x^6+15x^4-8x)(x^7+3x^5-4x^2+6)^3\,dx\,.$

60) Finde die Stammfunktionen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) := \dfrac{x^2-2x}{x^2+4x+5}\,.$

b) $f(x) := \dfrac{e^{\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[5]{x^4}}\,.$

c) $f(x) := \dfrac{4x+7}{\sqrt{x^2-6x+15}}\,.$

d) $f(x) := \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$

61) Finde die Stammfunktionen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) := \dfrac{2x^3+3x^2-2x-1}{x^2-1}$.  b) $f(x) := x\sqrt[8]{5x+3}$.

c) $f(x) := \dfrac{83}{(x^2+37)^2}$.  d) $f(x) := \dfrac{2x^3+12x^2+25x+9}{x^3+5x^2+3x-9}$.

62) Bestimme die folgenden Integrale.

a) $\int \arctan x\,dx$.  b) $\int \cos^2 x\,dx$.  c) $\int x\log x\,dx$.

d) $\int xe^{4x+1}\,dx$.  e) $\int x^3e^{x^2}\,dx$.  f) $\int \dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\,dx$.

63) Löse folgende Integrale.

a) $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$.  b) $\int_0^\pi x\sin x\,dx$.  c) $\int_0^{2\pi} \tan x\,dx$.

d) $\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{9}{4}} \dfrac{1}{\sqrt{-36x^2-180x-216}}\,dx$.

64) Suche die Lösungen der folgenden Integrale.

a) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.  b) $\int \cos^5 x\,dx$.  c) $\int \arcsin x\,dx$.

d) $\int \dfrac{2x+1}{\sqrt{6+6x-x^2}}\,dx$.  e) $\int \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+16x+59}}\,dx$.

f) $\int \dfrac{8x-41}{x^2-14x+58}\,dx$.  g) $\int x^{15}\sin x^4\,dx$.

65) Löse die folgenden Integrale.

a) $\int \dfrac{5x^4+98x^3+1720x^2+462x-8829}{x^5+25x^4+90x^3-582x^2-2043x+6669}\,dx$.

b) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$.  c) $\int \dfrac{x^3-13x^2+100x-306}{x^3-15x^2+87x-153}\,dx$.

66) Suche die Lösungen der folgenden Integrale.

a) $\int (36x^3+96x)\cos(3x^2+8)\,dx$.  b) $\int \dfrac{5x^2-14x-223}{x^3+2x^2-53x+90}\,dx$.

c) $\int \dfrac{2x^2+2x+5}{\sqrt{27-4x-x^2}}\,dx$.  d) $\int \dfrac{7x^2-6x-8}{x^3-10x^2-52x-56}\,dx$.

67) Bestimme die folgenden Integrale.

a) $\int \dfrac{1}{\sin x}\,dx$.  b) $\int \dfrac{9\sin x+12\cos x+13}{3\sin x+4\cos x+3}\,dx$.

c) $\int \dfrac{174}{19\sin x-121\cos x-119}\,dx$.  d) $\int \dfrac{14}{13\sin x+6\cos x+3}\,dx$.

68) Löse folgenden Aufgaben.

a) Bestimme die Nullstellen (in $\mathbb{C}$) von $z^4+1$.

b) Verwende Beispiel a) um die Zerlegung von $z^4+1$ in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$ zu finden.

c) Unter Verwendung von Beispiel b) finde eine Zerlegung von $x^4+1$ über $\mathbb{R}$.

69) Berechne die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{x^4+1}$ (über $\mathbb{R}$).
*Anleitung*: Verwende Beispiel 68) c).

70) Untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Integrale. Weiters berechne den Wert jener Integrale, die konvergieren.
a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^4}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x^4}\,dx\,.$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^7}\,dx\,.$
d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)^2}\,dx\,.$ e) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,dx\,.$

71) Finde den Wert der folgenden Integrale, soferne sie konvergieren.
a) $\displaystyle\int_5^\infty \frac{1}{x\log x}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^2+x}\,dx\,.$ c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx\,.$
d) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{4}{x^3-4x^2+4x}\,dx\,.$ e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx\,.$

72) Untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Integrale.
a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+21x}}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x^5+3x^2}}\,dx\,.$
c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\,.$ d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx\,.$ e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^{34}+1}\,dx\,.$

73) Konvergieren die folgenden Integrale?
a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[6]{x^6+2}}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{x^7+1}\,dx\,.$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx\,.$

74) Bestimme den Wert der folgenden Integrale, soferne sie konvergieren.
a) $\displaystyle\int_{37}^\infty \frac{101x^2+1206x-10376}{x^4+15x^3-222x^2+676x-600}\,dx\,.$
b) $\displaystyle\int_7^\infty \frac{26x^2-268x+1178}{x^4-16x^3+94x^2-144x+65}\,dx\,.$

75) Gib ein Beispiel einer Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, für die $\displaystyle\int_1^\infty f_n(x)\,dx$ konvergiert, und die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ konvergiert, wobei $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ divergiert.

76) Definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \dfrac{1}{n}$.
a) Zeige, dass $f_n$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.
b) Berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f_n(x)\,dx\,,\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f_n(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty 0\,dx\,.$

77) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$ definiert.

a) Berechne $\int_0^\infty f_n(x)\, dx$.

b) Zeige, dass $f_n$ gleichmäßig gegen 0 (als Funktion auf $[0, +\infty)$) konvergiert.

c) Bestimme $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx$ und $\int_0^\infty 0\, dx$.

d) Widerspricht das Ergebnis aus Beispiel c) nicht einem Satz aus der Vorlesung?

78) Zeige, dass $\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \frac{(2n)!}{n!\, 2^{2n}}\, \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Unter Verwendung eines Computers (z. B. mit Mathematica, Maple oder Maxima) bestimme $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)$ und setze das in die obige Formel ein.

79) Beweise, dass $\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$ gilt.
*Anleitung*: Setze $\frac{1}{2}$ in die Definition der Gamma-Funktion ein, und substituiere $u = t^{\frac{1}{2}}$. Schließlich zeige, dass $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$ gilt.

80) Welchen Wert ergibt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots :=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-3)}{(2n-2)} \cdot \frac{(2n-1)}{(2n-2)} \cdot \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n+1)}{2n} \right) ?$$

81) Verwende einen Computer um (z. B. mit Hilfe von Mathematica, Maple oder Maxima) die Werte von $n!$ und $\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \sqrt{2\pi n}$ für $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$ und $n = 10000$ zu vergleichen.

82) Berechne das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn

$$\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 2 - \sqrt{1 - x^2} \le y \le 2 + \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

um die $x$-Achse gedreht wird. Skizziere diese Figur.
*Bemerkung*: Es wird also der Kreis $\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \le 1 \right\}$ um die $x$-Achse gedreht.

83) Es seien $a, r \in \mathbb{R}$, $0 < r < a$. Betrachte den Kreis

$$K := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-a)^2 \le r^2 \right\},$$

$$\text{also } K = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : -r \le x \le r,\ a - \sqrt{r^2 - x^2} \le y \le a + \sqrt{r^2 - x^2} \right\}.$$

Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn $K$ um die $x$-Achse gedreht wird.

84) Es sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, für die $\int_0^1 f(x)\,dx$ konvergiert.

a) Für eine Riemann-integrierbare Funktion $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ gäbe es ein $r \in \mathbb{R}$ $(r \geq 0)$ mit $\|g - f\|_\infty \leq r$. Beweise, dass $\int_0^1 g(x)\,dx$ konvergiert und dass

$$\left| \int_0^1 g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq r$$

gilt.

b) Sei $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Beweise, dass $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$ gilt.

85) Berechne folgende Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,dx$.

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+1}\,dx$.

*Anleitung*: Verwende Beispiel 69).

86) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $b > 0$ berechne das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn

$$\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right\}$$

um die $x$-Achse gedreht wird. Was für eine Figur ist das?

87) Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn

$$\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 5,\ \frac{3}{\sqrt{x^2+4x+11}} \leq y \leq \frac{4}{\sqrt{x^2+4x+11}} \right\}$$

um die $x$-Achse gedreht wird.

88) Berechne die Bogenlänge des Graphen von $f(x) := \dfrac{\sqrt{(x-2)^3}}{3}$ zwischen 2 und 34.

89) Finde den Wert der Bogenlänge des Graphen von $x^2$ zwischen 0 und 1.

90) Betrachte $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

a) Berechne einen Näherungswert für dieses Integral mit Hilfe der (einfachen) Trapezregel.

b) Bestimme einen Näherungswert dieses Integrals mit Hilfe der (einfachen) Simpsonregel (Kepler'schen Fassregel).

91) Es sei $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$.

a) Berechne $f''(x)$ und $f^{(4)}(x)$.

b) Zeige, dass $\left|f''(x)\right| \leq 6$ für alle $x \in [1,2]$ gilt.

c) Indem man die Maxima und Minima von $4x^3 - 24x$ und $x^4 - 12x^2 + 24$ bestimmt, zeige, dass $\left|4x^3 - 24x\right| \leq 23$ und $\left|x^4 - 12x^2 + 24\right| \leq 13$ für alle $x \in [1,2]$ gilt.

d) Verwende Beispiel c) um $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 36$ für alle $x \in [1,2]$ zu beweisen.

92) Um Näherungswerte für $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ mit Hilfe eines Computers zu bestimmen löse folgende Aufgaben.

a) Unter Verwendung von Beispiel 91) finde Fehlerabschätzungen für die Trapezregel und die Simpsonregel (jeweils mit $n$ äquidistanten Stützstellen).

b) Zunächst berechne mit Hilfe der Trapezregel $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ mit einem Fehler von höchstens $10^{-5}$.

c) Bestimme $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ mit einem Fehler von höchstens $10^{-10}$ unter Verwendung der Simpsonregel.

93) Untersuche die Konvergenz der folgenden Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\,.$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,.$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\,.$

94) Sind die folgenden Reihen konvergent?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\frac{3}{4}}\,.$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^2}{5^n}\,.$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\,.$

95) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}\,.$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}\,.$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log n)^n}\,.$

96) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{504}{n^2+13n+40}$? Im Falle der Konvergenz berechne den Wert von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{504}{n^2+13n+40}\,.$

97) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,.$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\,.$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\,.$

98) Bei den folgenden Reihen ist die Konvergenz zu untersuchen, sowie der Wert derjenigen Reihen, die konvergieren, zu bestimmen.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\,.$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\,.$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,,$ wobei $a_n := \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ -\left(\frac{1}{5}\right)^n, & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$

99) Untersuche die Konvergenz der folgenden Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{3}-1\right).$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}\,.$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^2+4n+5}\,.$

100) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. Untersuche die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$.

101) Es sei $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters konvergiere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Beweise, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ konvergiert.

102) Gib ein Beispiel einer Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ konvergiert, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

103) Bekanntlich gilt $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x > 0$, und daher ist der Tangens streng monoton wachsend. Warum ist dann $\tan\frac{\pi}{4} > \tan\frac{3\pi}{4}$, obwohl $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ gilt?

104) Untersuche die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\frac{\pi}{6})}{n}$.

105) Bestimme die Konvergenzradien und die Konvergenzgebiete der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{5^n}$. b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$. c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n}$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-5)^n}{7^n}$. f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 4^n (x-3)^n$.

106) Von den folgenden Potenzreihen bestimme die Konvergenzradien und die Konvergenzgebiete.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+4)^n}{n^n}$. b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(x-8)^n$. c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3}{6^n}(x+3)^n$.

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{(2n)!}$. e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{5n}}{(n^2+n)2^n}$. f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-7)^n}{17^n}$.

107) Entwickle die folgenden Funktionen in Potenzreihen, und bestimme deren Konvergenzradius und Konvergenzgebiet.

a) $f(x) := e^{x+2}$ um 5. b) $f(x) := \dfrac{1}{x-4}$ um $-3$.

c) $f(x) := \sin x$ um $\frac{\pi}{2}$. d) $f(x) := \cosh x$ um 0.

108) Bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\dfrac{\sin x}{x}$ um 0, und gib ihren Konvergenzradius an.

109) Berechne die Potenzreihenentwickung von $\operatorname{arcsinh} x$ um 0, und gib deren Konvergenzradius an.

110) a) Entwickle $\arctan x$ in eine Potenzreihe um 0, und gib ihren Konvergenzradius an.

b) Berechne $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

111) a) Entwickle $\log(x+1)$ in eine Potenzreihe um 0, und gib ihren Konvergenzradius an.

b) Berechne $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

112) Berechne die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1} - \sqrt{n}}$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+12n+3} - \sqrt{n^2-4n+7}\right)$.

113) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$, die sowohl $a_n \neq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als auch $\dfrac{3{a_n}^2 + 6a_{n+1} - 9(a_n+4)}{a_n - 4} - 3a_n \leq 7$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Berechne $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$.

114) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \dfrac{1}{n!} x^n \operatorname{sgn} x$.

a) Skizziere die Graphen der Funktionen $f_n$.

b) Zeige, dass $f_1(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

c) Beweise, dass ${f_{n+1}}' = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

d) Für $n \in \mathbb{N}$ gib ein Beispiel einer Funktion, die $n$-mal differenzierbar ist, aber nicht $n+1$-mal differenzierbar ist.

e) Gib ein konkretes Beispiel einer 4-mal differenzierbaren Funktion, die nicht 5-mal differenzierbar ist.