Proseminar zu Analysis

Wintersemester 2009/2010

Peter Raith

1) a) Zeige, dass $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ für $x \in [0, 2\pi]$ gilt.

b) Beweise, dass für $x \in [-\pi, \pi]$ die Eigenschaft $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ gilt.

2) Beweise, dass $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ und $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

3) Berechne die exakten Werte von $\sin\frac{\pi}{12}$ und $\cos\frac{\pi}{12}$ ($\frac{\pi}{12}$ ist 15°).
Anleitung: Verwende die Beispiele 1) und 2).

4) Ein Körper führe zwischen dem Zeitpunkt 0 und dem Zeitpunkt 8 eine Bewegung aus. Falls t zwischen 0 und 8 liegt, dann ist die Entfernung unseres Körpers vom Ausgangspunkt zum Zeitpunkt t gleich $t^3 - 15t^2 + 63t$. Zu welchem Zeitpunkt ist dieser Körper am weitesten vom Ausgangspunkt entfernt, und wie groß ist dann seine Entfernung vom Ausgangspunkt?

5) Mittels vollständiger Induktion zeige, dass die folgenden Formeln für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

b) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

c) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

6) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$, die sowohl $a_n \neq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als auch $\dfrac{3{a_n}^2 + 6a_{n+1} - 9(a_n + 4)}{a_n - 4} - 3a_n \leq 7$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

7) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \dfrac{1}{n!} x^n \operatorname{sgn} x$.
   a) Skizziere die Graphen der Funktionen f_n.
   b) Zeige, dass $f_1(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
   c) Beweise, dass ${f_{n+1}}' = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   d) Für $n \in \mathbb{N}$ gib ein Beispiel einer Funktion, die n-mal differenzierbar ist, aber nicht $n + 1$-mal differenzierbar ist.
   e) Gib ein konkretes Beispiel einer 4-mal differenzierbaren Funktion, die nicht 5-mal differenzierbar ist.

8) Ein Leopard wird bei einer Wanderung in der Savanne beobachtet. Zwischen dem Zeitpunkt 0 und dem Zeitpunkt 10 beträgt zum Zeitpunkt t die Entfernung des Leoparden vom Beobachtungspunkt $t^3 - 12t^2 + 45t + 17$. Zu welchem Zeitpunkt ist der Leopard dem Beobachtungspunkt am nächsten, und wie groß ist dabei seine Entfernung vom Beobachtungspunkt?

9) Einer Kugel mit Radius r ($r > 0$) soll der volumsgrößte Zylinder eingeschrieben werden. Welche Abmessungen muss dieser Zylinder haben, und wie groß ist dann sein Volumen?

10) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-x^2}$ gleichmäßig stetig ist.

11) Betrachte die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, die Partition $P := \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ und die Zwischenwerte $\tilde{P} := \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{9}{10}\right)$.
   a) Berechne die Untersumme $\underline{S}(f,P)$ und die Obersumme $\overline{S}(f,P)$.
   b) Welchen Wert hat die Riemannsumme $S(f,P,\tilde{P})$?
   c) Berechne eine weitere Riemannsumme von f bezüglich P.

12) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2$ definiert. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere die Partition P_n durch $P_n := \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$.
   a) Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und bestimme $\underline{S}(f,P_n)$ und $\overline{S}(f,P_n)$.
   b) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}(f,P_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}(f,P_n)$.
   Hinweis: Verwende Beispiel 5) a), also die Formel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
   c) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\tilde{P}_n$ beliebige Zwischenwerte von P_n. Was kann man über
   $$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\tilde{P}_n)$$
   aussagen?
   d) Folgt unmittelbar aus den Beispielen a)–c), dass x^2 auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist? Kann man die Beispiele a)–c) verwenden, um $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ auszurechnen?

13) Falls $n \in \mathbb{N}$, dann definiere $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x = 0, \\ \left(\frac{k}{n}\right)^2, & \text{falls } \frac{k-1}{n} < x \le \frac{k}{n} \text{ für ein } k \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{cases}$$

(Dieses Beispiel ist ohne Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, zu lösen. Ebenso soll auch der Satz, dass jede monotone Funktion Riemann-integrierbar ist, nicht verwendet werden).

a) Skizziere f_n.

b) Berechne $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ (passende Sätze aus der Vorlesung verwenden, genaue Begründungen geben!).

c) Zeige, dass f_n gleichmäßig gegen die Funktion x^2 (als Funktion $[0,1] \to \mathbb{R}$) konvergiert.

d) Bestimme $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ (passende Sätze aus der Vorlesung verwenden, genaue Begründungen geben!).

14) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $f_n : [0,5] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \cup [1,5], \\ 4n^2x - 4n^2 + 4n\,, & \text{falls } x \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{2n}\right], \\ 4n^2 - 4n^2x\,, & \text{falls } x \in \left[1 - \frac{1}{2n}, 1\right]. \end{cases}$$

a) Skizziere f_n.

b) Zeige, dass f_n punktweise gegen 0 konvergiert.

c) Berechne $\displaystyle\int_0^5 f_n(x)\,dx$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^5 f_n(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_0^5 0\,dx$.

15) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

definiert.

a) Gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert? (Begründung!)

b) Ist f Riemann-integrierbar? (Begründung!)

c) Berechne $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, soferne f Riemann-integrierbar ist.

16) Definiere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2^n}\,, & \text{falls } x \in \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right) \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0\,, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

a) Gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert? (Begründung!)

b) Gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert? (Begründung!)

c) Ist f Riemann-integrierbar? (Begründung!)

d) Berechne $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, soferne f Riemann-integrierbar ist.

17) Bestimme die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_0^2 x^7\,dx\,.$

c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx\,.$ d) $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{x^2}\,dx\,.$

18) Finde die Lösungen der folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int e^{-5x}\,dx\,.$

c) $\displaystyle\int 48(4x-17)^3\,dx\,.$ d) $\displaystyle\int_{-2}^{12} \frac{1}{x}\,dx\,.$

19) Suche die Stammfunktionen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) := 35\cos(5x+2)\,.$ b) $\displaystyle f(x) := \frac{12}{\sqrt{1-(4x+3)^2}}\,.$

c) $\displaystyle f(x) := \frac{1}{(x-16)^2+1}\,.$ d) $\displaystyle f(x) := \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}\,.$

20) Berechne die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int x^2\cos x^3\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_2^8 \frac{1}{x\log x}\,dx\,.$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx\,.$

d) $\displaystyle\int 20(7x^6+15x^4-8x)(x^7+3x^5-4x^2+6)^3\,dx\,.$

21) Finde die Stammfunktionen der folgenden Funktionen.

a) $\displaystyle f(x) := \frac{x^2-2x}{x^2+4x+5}\,.$ b) $\displaystyle f(x) := \frac{e^{\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[5]{x^4}}\,.$

c) $\displaystyle f(x) := \frac{4x+7}{\sqrt{x^2-6x+15}}\,.$ d) $\displaystyle f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$

22) Löse folgende Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx\,.$ c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \tan x\,dx\,.$

d) $\displaystyle\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{9}{4}} \frac{1}{\sqrt{-36x^2-180x-216}}\,dx\,.$

23) Bestimme die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int \arctan x\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx\,.$ c) $\displaystyle\int x\log x\,dx\,.$

d) $\displaystyle\int xe^{4x+1}\,dx\,.$ e) $\displaystyle\int x^3e^{x^2}\,dx\,.$ f) $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\,dx\,.$

24) Suche die Lösungen der folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx\,.$ c) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx\,.$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{6+6x-x^2}}\,dx\,.$ e) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+16x+59}}\,dx\,.$

f) $\displaystyle\int \frac{8x-41}{x^2-14x+58}\,dx\,.$ g) $\displaystyle\int x^{15}\sin x^4\,dx\,.$

25) Finde die Stammfunktionen der folgenden Funktionen.

a) $\displaystyle f(x) := \frac{2x^3+3x^2-2x-1}{x^2-1}\,.$ b) $f(x) := x\sqrt[8]{5x+3}\,.$

c) $\displaystyle f(x) := \frac{83}{(x^2+37)^2}\,.$ d) $\displaystyle f(x) := \frac{2x^3+12x^2+25x+9}{x^3+5x^2+3x-9}\,.$

26) Löse die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int \frac{5x^4+98x^3+1720x^2+462x-8829}{x^5+25x^4+90x^3-582x^2-2043x+6669}\,dx\,.$

b) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx\,.$ c) $\displaystyle\int \frac{x^3-13x^2+100x-306}{x^3-15x^2+87x-153}\,dx\,.$

27) Suche die Lösungen der folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int (36x^3+96x)\cos(3x^2+8)\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int \frac{5x^2-14x-223}{x^3+2x^2-53x+90}\,dx\,.$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+2x+5}{\sqrt{27-4x-x^2}}\,dx\,.$ d) $\displaystyle\int \frac{7x^2-6x-8}{x^3-10x^2-52x-56}\,dx\,.$

28) Löse folgenden Aufgaben.

a) Bestimme die Nullstellen (in $\mathbb{C}$) von z^4+1.

b) Verwende Beispiel a) um die Zerlegung von z^4+1 in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$ zu finden.

c) Unter Verwendung von Beispiel b) finde eine Zerlegung von x^4+1 über $\mathbb{R}$.

29) Berechne die Partialbruchzerlegung von $\displaystyle\frac{1}{x^4+1}$ (über $\mathbb{R}$).
Anleitung: Verwende Beispiel 28) c).

30) Bestimme die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int \frac{9\sin x+12\cos x+13}{3\sin x+4\cos x+3}\,dx\,.$

c) $\displaystyle\int \frac{174}{19\sin x-121\cos x-119}\,dx\,.$ d) $\displaystyle\int \frac{14}{13\sin x+6\cos x+3}\,dx\,.$

31) Untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Integrale. Weiters berechne den Wert jener Integrale, die konvergieren.

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^4}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x^4}\,dx\,.$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^7}\,dx\,.$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)^2}\,dx\,.$ e) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,dx\,.$

32) Finde den Wert der folgenden Integrale, soferne sie konvergieren.

a) $\displaystyle\int_5^\infty \frac{1}{x\log x}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^2+x}\,dx\,.$ c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx\,.$

d) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{4}{x^3-4x^2+4x}\,dx\,.$ e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx\,.$

33) Bestimme den Wert der folgenden Integrale, soferne sie konvergieren.

a) $\displaystyle\int_{37}^\infty \frac{101x^2+1206x-10376}{x^4+15x^3-222x^2+676x-600}\,dx\,.$

b) $\displaystyle\int_7^\infty \frac{26x^2-268x+1178}{x^4-16x^3+94x^2-144x+65}\,dx\,.$

34) Untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+21x}}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x^5+3x^2}}\,dx\,.$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\,.$ d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx\,.$ e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^{34}+1}\,dx\,.$

35) Konvergieren die folgenden Integrale?

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[6]{x^6+2}}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{x^7+1}\,dx\,.$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx\,.$

36) Berechne folgende Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,dx\,.$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+1}\,dx\,.$

Anleitung: Verwende Beispiel 29).

37) Für $n\in\mathbb{N}$ sei $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ durch $f_n(x):=\dfrac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}$ definiert.

a) Berechne $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,dx\,.$

b) Zeige, dass f_n gleichmäßig gegen 0 (als Funktion auf $[0,+\infty)$) konvergiert.

c) Bestimme $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_0^\infty 0\,dx\,.$

d) Widerspricht das Ergebnis aus Beispiel c) nicht einem Satz aus der Vorlesung?

38) Gib ein Beispiel einer Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, für die $\displaystyle\int_1^\infty f_n(x)\,dx$ konvergiert, und die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ konvergiert, wobei $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ divergiert.

39) Definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \dfrac{1}{n}$.

a) Zeige, dass f_n gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

b) Berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f_n(x)\,dx$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f_n(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty 0\,dx$.

40) Es sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, für die $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ konvergiert.

a) Für eine Riemann-integrierbare Funktion $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ gebe es ein $r \in \mathbb{R}$ $(r \geq 0)$ mit $\|g - f\|_\infty \leq r$. Beweise, dass $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ konvergiert und dass

$$\left|\int_0^1 g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq r$$

gilt.

b) Sei $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Beweise, dass $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$ gilt.

41) Zeige, dass $\Gamma\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{(2n)!}{n!\,2^{2n}}\,\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Unter Verwendung eines Computers (z.B. mit Mathematica) bestimme $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)$ und setze das in die obige Formel ein.

42) Beweise, dass $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$ gilt.
Anleitung: Setze $\frac{1}{2}$ in die Definition der Gamma-Funktion ein, und substituiere $u = t^{\frac{1}{2}}$. Schließlich zeige, dass $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$ gilt.

43) Welchen Wert ergibt

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots :=$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-3)}{(2n-2)}\cdot\frac{(2n-1)}{(2n-2)}\cdot\frac{(2n-1)}{2n}\cdot\frac{(2n+1)}{2n}\right)\ ?$$

44) Verwende einen Computer um (z.B. mit Hilfe von Mathematica) die Werte von $n!$ und $\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n\sqrt{2\pi n}$ für $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$ und $n = 10000$ zu vergleichen.

45) Berechne das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn
$$\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ 2 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 2 + \sqrt{1-x^2} \right\}$$
um die x-Achse gedreht wird. Skizziere diese Figur.
Bemerkung: Es wird also der Kreis $\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \leq 1 \right\}$ um die x-Achse gedreht.

46) Es seien $a, r \in \mathbb{R}$, $0 < r < a$. Betrachte den Kreis
$$K := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-a)^2 \leq r^2 \right\},$$
$$\text{also } K = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : -r \leq x \leq r,\ a - \sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq a + \sqrt{r^2 - x^2} \right\}.$$
Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn K um die x-Achse gedreht wird.

47) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $b > 0$ berechne das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn
$$\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right\}$$
um die x-Achse gedreht wird. Was für eine Figur ist das?

48) Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn
$$\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 5,\ \frac{3}{\sqrt{x^2+4x+11}} \leq y \leq \frac{4}{\sqrt{x^2+4x+11}} \right\}$$
um die x-Achse gedreht wird.

49) Berechne die Bogenlänge des Graphen von $f(x) := \dfrac{\sqrt{(x-2)^3}}{3}$ zwischen 2 und 34.

50) Finde den Wert der Bogenlänge des Graphen von x^2 zwischen 0 und 1.

51) Betrachte $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\, dx$.
   a) Berechne einen Näherungswert für dieses Integral mit Hilfe der (einfachen) Trapezregel.
   b) Bestimme einen Näherungswert dieses Integrals mit Hilfe der (einfachen) Simpsonregel (Kepler'schen Fassregel).

52) Es sei $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$.
   a) Berechne $f''(x)$ und $f^{(4)}(x)$.
   b) Zeige, dass $|f''(x)| \leq 6$ für alle $x \in [1,2]$ gilt.
   c) Indem man die Maxima und Minima von $4x^3 - 24x$ und $x^4 - 12x^2 + 24$ bestimmt, zeige, dass $|4x^3 - 24x| \leq 23$ und $|x^4 - 12x^2 + 24| \leq 13$ für alle $x \in [1,2]$ gilt.
   d) Verwende Beispiel c) um $|f^{(4)}(x)| \leq 36$ für alle $x \in [1,2]$ zu beweisen.

53) Um Näherungswerte für $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ mit Hilfe eines Computers zu bestimmen löse folgende Aufgaben.

a) Unter Verwendung von Beispiel 52) finde Fehlerabschätzungen für die Trapezregel und die Simpsonregel (jeweils mit n äquidistanten Stützstellen).

b) Zunächst berechne mit Hilfe der Trapezregel $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ mit einem Fehler von höchstens 10^{-5}.

c) Bestimme $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ mit einem Fehler von höchstens 10^{-10} unter Verwendung der Simpsonregel.

54) Untersuche die Konvergenz der folgenden Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

55) Sind die folgenden Reihen konvergent?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\frac{3}{4}}$. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^2}{5^n}$. c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$.

56) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$. b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$. c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log n)^n}$.

57) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{504}{n^2+13n+40}$? Im Falle der Konvergenz berechne den Wert von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{504}{n^2+13n+40}$.

58) Bei den folgenden Reihen ist die Konvergenz zu untersuchen, sowie der Wert derjenigen Reihen, die konvergieren, zu bestimmen.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$. b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$. c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, wobei $a_n := \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ -\left(\frac{1}{5}\right)^n, & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$

59) Untersuche die Konvergenz der folgenden Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{3}-1\right)$. b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$. c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^2+4n+5}$.

60) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

61) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. Untersuche die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$.

62) Es sei $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters konvergiere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Beweise, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ konvergiert.

63) Gib ein Beispiel einer Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ konvergiert, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

64) Untersuche die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\frac{\pi}{6})}{n}$.

65) Bestimme die Konvergenzradien und die Konvergenzgebiete der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{5^n}$. b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$. c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n}$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-5)^n}{7^n}$. f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 4^n (x-3)^n$.

66) Von den folgenden Potenzreihen bestimme die Konvergenzradien und die Konvergenzgebiete.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+4)^n}{n^n}$. b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(x-8)^n$. c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3}{6^n}(x+3)^n$.

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{(2n)!}$. e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{5n}}{(n^2+n)2^n}$. f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-7)^n}{17^n}$.

67) Entwickle die folgenden Funktionen in Potenzreihen, und bestimme deren Konvergenzradius und Konvergenzgebiet.

a) $f(x) := e^{x+2}$ um 5. b) $f(x) := \dfrac{1}{x-4}$ um -3.

c) $f(x) := \sin x$ um $\frac{\pi}{2}$. d) $f(x) := \cosh x$ um 0.

68) Bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\dfrac{\sin x}{x}$ um 0, und gib ihren Konvergenzradius an.

69) Berechne die Potenzreihenentwickung von $\operatorname{arcsinh} x$ um 0, und gib deren Konvergenzradius an.

70) a) Entwickle $\arctan x$ in eine Potenzreihe um 0, und gib ihren Konvergenzradius an.

b) Berechne $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

71) a) Entwickle $\log(x+1)$ in eine Potenzreihe um 0, und gib ihren Konvergenzradius an.

b) Berechne $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

72) Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit $d_\infty\Big(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\Big) := \max\big\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\big\}$. Beweise, dass d_∞ eine Metrik ist.

73) Für $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ und $y = \binom{y_1}{y_2} \in \mathbb{R}^2$ sei d_∞ die in Beispiel 72) definierte Metrik, d_2 die übliche Metrik (also $d_2(x,y) := |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$) und d_1 die durch

$d_1(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

definierte Metrik. Skizziere $B(0,1)$ für jede dieser Metriken.

74) Betrachte $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ mit der Metrik $d(f,g) := \sup\limits_{x\in[0,1]} \big|f(x) - g(x)\big|$. Berechne $d(x^2, x^3)$.

75) Definiere auf $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ eine „Metrik“ d durch $d(f,g) := \displaystyle\int_0^1 \big|f(x) - g(x)\big|\,dx$. Zeige, dass d wirklich eine Metrik ist.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\|f\|_1 := \displaystyle\int_0^1 \big|f(x)\big|\,dx$ eine Norm ist. Dabei kann man statt $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ auch $C\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ verwenden, soferne die Integralgrenzen entsprechend geändert werden.

76) Betrachte $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ mit der in Beispiel 75) definierten Metrik d. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ sei durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 5 - 15nx\,, & \text{falls } x \in \big[0, \frac{1}{3n}\big], \\ 4nx - 3n + 1\,, & \text{falls } x \in \big[\frac{3}{4} - \frac{1}{4n}, \frac{3}{4}\big], \\ 3n + 1 - 4nx\,, & \text{falls } x \in \big[\frac{3}{4}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4n}\big], \\ 0\,, & \text{sonst}, \end{cases}$$

definiert.

a) Skizziere f_n.

b) Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ gilt (bezüglich der in Beispiel 75) definierten Metrik d).

c) Bestimme den punktweisen Grenzwert der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vergleiche dieses Ergebnis mit dem Grenzwert aus Beispiel b).

d) Gib ein Beispiel einer Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, die $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$ in unserer Metrik d erfüllt, aber bei der $\lim\limits_{n\to\infty} g_n\big(\frac{1}{3}\big) = +\infty$ gilt.

77) Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bezüglich der üblichen Metrik (also der Metrik $d(x,y) := |x-y|$) offen, bzw. abgeschlossen sind (Begründungen geben).

a) $[3,7]$. b) $[-1,3)$. c) $(-6,2) \cup (11,14)$.

d) $\mathbb{R}$. e) $(-2,5) \cap \mathbb{Q}$. f) $(-\infty,4) \cup (8,17]$.

g) $[4,+\infty)$. h) $\mathbb{Q}$. i) $(5,12] \setminus \mathbb{Q}$.

78) Als Grundraum betrachte $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Metrik (also der Metrik $d(x,y) := |x-y|$). Welche der folgenden Teilmengen sind offen, bzw. abgeschlossen (Begründungen geben).
a) $(0,1) \cap \mathbb{Q}$. b) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. c) $\big(0, \sqrt{2}\,\big] \cap \mathbb{Q}$.
d) $\big(\sqrt{5}, \pi\big) \cap \mathbb{Q}$. e) $\big(-\sqrt{11}, +\infty\big) \cap \mathbb{Q}$. f) $\big[\sqrt{7}, 3\big] \cap \mathbb{Q}$.

79) In $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Metrik untersuche (Begründungen geben), welche der folgenden Teilmengen offen, bzw. abgeschlossen sind (dabei ist stets $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$).
a) $\Big\{x \in \mathbb{R}^2 : \Big(\dfrac{x_1-2}{5}\Big)^2 + \Big(\dfrac{x_2-8}{3}\Big)^2 < 1\Big\}$.
b) $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 3\} \cup \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1+18)^2 + \Big(\dfrac{x_2}{2}\Big)^2 < 1\Big\}$.
c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ und } x_1 x_2 = 1\}$. d) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 5x_2 \ge 15\}$.
e) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 5x_1 + 8x_2 > 40\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 2\}$.

80) Bestimme den Abschluss, das Innere und den Rand der Mengen aus Beispiel 77), Beispiel 78) und Beispiel 79).

81) Zeige mit Hilfe der Definition der Abgeschlossenheit mittels konvergenter Folgen, dass folgende Eigenschaften in einem metrischen Raum (M,d) gelten.
a) Sei $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie abgeschlossener Mengen. Dann ist $\bigcap_{j\in J} A_j$ abgeschlossen (beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).
b) Falls $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abgeschlossene Mengen sind, dann ist auch die Menge $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ abgeschlossen (endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).

82) Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung (im Sinne der linearen Algebra). Zeige, dass φ stetig ist.

83) Betrachte den Raum $M_n(\mathbb{R})$ aller reeller $n \times n$-Matrizen. Als Menge können wir $M_n(\mathbb{R})$ als $\mathbb{R}^{n^2}$ auffassen, und wir versehen $M_n(\mathbb{R})$ mit der üblichen Metrik auf $\mathbb{R}^{n^2}$. Beweise, dass die Abbildung $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, die jeder Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ihre Determinante $\det A$ zuordnet, stetig ist.
Hinweis: Verwende die aus der linearen Algebra bekannte Formel
$$\det A = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}\,,$$
wobei die Summe über alle Permutationen σ (bijektive Funktionen einer Menge auf sich selbst) auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ genommen wird.

84) Zeige, dass im Raum $M_n(\mathbb{R})$ die Menge aller invertierbaren Matrizen offen ist.
Anleitung: Verwende Beispiel 83) und den Satz aus der linearen Algebra, der besagt, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\det A \neq 0$ gilt.

85) Welche der Mengen in den Beispielen 77) und 79) sind kompakt (Begründungen geben)?

86) Für welche der Mengen in Beispiel 78) liegt Kompaktheit vor (Begründungen geben)? Weiters gib mindestens eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ an, die weder in Beispiel 78) noch in Beispiel 87) vorkommt.

87) Gib ein Beispiel einer unendlichen, kompakten Teilmenge von $\mathbb{Q}$ an.

88) Sei (C, d) ein kompakter metrischer Raum, und sei $A \subseteq C$ abgeschlossen. Zeige, dass A kompakt ist.
Hinweis: Beweise, dass A folgenkompakt ist.

89) Indem man den in $\mathbb{R}$ gegebenen Beweis modifiziert, beweise den *Satz vom Minimum und Maximum*:
Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, und sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f ein Maximum und ein Minimum, das heißt es gibt $m_1, m_2 \in X$, sodass $f(m_1) \leq f(x) \leq f(m_2)$ für alle $x \in X$ gilt.

90) a) Gib ein Beispiel eines vollständigen metrischen Raumes (X, d), für den der *Satz vom Minimum und Maximum* (siehe Beispiel 89) für die Formulierung) nicht gilt (Beweis!).
b) Finde eine beschränkte Teilmenge X von $\mathbb{R}$, für die der *Satz vom Minimum und Maximum* (siehe Beispiel 89) für die Formulierung) nicht gilt (Beweis!).

91) Auf $C\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ definiere die Metrik d wie in Beispiel 75). Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C\big([0,1], \mathbb{R}\big)$, die durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \in \big[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\big], \\ nx + \frac{1-n}{2}\,, & \text{falls } x \in \big[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\big], \\ 1\,, & \text{falls } x \in \big[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1\big], \end{cases}$$

definiert ist.
a) Skizziere f_n.
b) Zeige, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge (bezüglich unserer Metrik d) ist.
c) Beweise, dass es kein $f \in C\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ gibt, sodass $f_n \to f$ (bezüglich unserer Metrik d) gilt.
d) Ist $\big(C\big([0,1], \mathbb{R}\big), d\big)$ vollständig?

92) Welche der Mengen aus den Beispielen 77) und 79) sind zusammenhängend (Begründungen geben)?

93) Untersuche, welche der Mengen in Beispiel 78) zusammenhängend sind (Begründungen geben)?

94) Es sei (M, d) ein metrischer Raum, und A und B seien zusammenhängende Teilmengen von M.
a) Gib (mindestens drei) Beispiele, in denen $A \cup B$ nicht zusammenhängend ist (darunter je mindestens ein Beispiel in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{R}^2$).
b) Beweise, dass $A \cup B$ zusammenhängend ist, falls $A \cap B \neq \emptyset$.
c) Finde ein Beispiel, in dem $A \cap B$ nicht zusammenhängend ist (und $A \cap B \neq \emptyset$).

95) Gib alle komplexen Nullstellen der folgenden Polynome an.
a) $z^3 - 1\,.$ b) $z^6 - 1\,.$ c) $z^7 - 1\,.$

96) Bestimme alle komplexen Nullstellen des Polynoms
$$z^{22} + z^{21} + z^{20} + z^{19} + z^{18} + z^{17} + z^{16} + z^{15} + z^{14} + z^{13} + z^{12} + \\ + z^{11} + z^{10} + z^{9} + z^{8} + z^{7} + z^{6} + z^{5} + z^{4} + z^{3} + z^{2} + z + 1\,.$$
Anleitung: Wende zunächst die Formel für die endliche geometrische Reihe an.

97) Betrachte eine stetig differenzierbare Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Es sei $x_0 \in (a,b)$ so, dass $\left|f'(x_0)\right| < 1$. Zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq (a,b)$ und $\sup\limits_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} \left|f'(x)\right| < 1\,.$

98) Sei $T : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, und sei $x_0 \in (a,b)$. Es gelten $Tx_0 = x_0$ und $\left|T'x_0\right| < 1$. Beweise, dass es eine Umgebung U von x_0 gibt, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x_0$ für alle $x \in U$ gilt.
Anleitung: Verwende Beispiel 97) und den Banach'schen Fixpunktsatz.

99) Wende das Newtonverfahren auf die Funktion $f(x) := 13x^4 - 113x^2 + 100$ an, wobei als Startwert 2 gewählt wird.

100) Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ erfüllt. Angenommen für ein $x \in (a,b)$ erfüllt die durch $x_1 := x$ und
$$x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad \text{für } n > 1$$
definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $x_n \in (a,b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gebe ein $x_0 \in (a,b)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Beweise, dass $f(x_0) = 0$ gilt.

101) Finde eine Nullstelle von $f(x) := 17x - 1800000000 + 3e^{7x}$. Gib den Wert der Nullstelle auf 20 Stellen nach dem Komma (also mit einem Fehler von höchstens 5×10^{-21}) an.
Hinweis: Verwende einen Computer. Wie kann man sich sicher sein, dass man den Wert auf 20 Stellen genau hat?

102) Berechne die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_1}^2 + \sin x_2 \\ x_1 e^{3x_2} - 4 \end{pmatrix}.$ b) $f(x) := \begin{pmatrix} \arctan x \\ 3^x \\ 4x^2+11 \end{pmatrix}.$

c) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 {x_5}^7 - e^{x_3} \\ {x_1}^3 e^{x_5} + \log(1+{x_2}^2) \\ 5x_1x_3x_4 + {x_2}^{x_5} \end{pmatrix}.$ d) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \dfrac{\cos(x_1x_3)}{\sqrt[5]{{x_1}^6 x_3 + \arcsin x_2}} \\ x_1 e^{{x_3}^2} + 4x_3 \\ x_1 {x_2}^4 x_3 \end{pmatrix}.$

e) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := {x_3}^2 \arctan(x_1x_4) + \sqrt{3 + {x_2}^4 + {x_4}^2} - \cos x_5\,.$

103) Verwende die Definition der Richtungsableitung, um für die folgenden Funktionen f die Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v (jeweils in der normierten und der nicht normierten Version) zu bestimmen.

a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x_1 \\ x_1+5x_2 \\ {x_1}^2 \\ 2x_1-3x_2+8 \\ x_1x_2-3 \end{pmatrix}, \; x_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

b) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := {x_1}^2 + 3x_1x_2 - 2x_2 + 6\,, \; x_0 := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

c) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1-2x_3 \\ x_1x_2+5 \\ 4x_3 \end{pmatrix}, \; x_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \; v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

104) Bestimme die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_1}^2x_2x_3-3 \\ 17x_1-{x_2}^3x_3 \end{pmatrix}$ definiert ist.

105) a) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \sin x_1 + {x_2}^2x_3\,.$ Berechne $\operatorname{grad} f\,.$

b) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_1}^2+\tan(x_2x_5)+3x_4e^{x_3} \\ 2x_1x_2+2{x_3}^5+7^{x_2}-x_4 \\ \arctan x_3-x_4{x_5}^2+8 \\ \cosh x_1+x_4x_5-\log(1+{x_5}^4) \\ 3x_3-7x_5 \end{pmatrix}.$ Berechne $\operatorname{div} f\,.$

c) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := x_3 \sin x_1 + e^{x_1x_4-3x_2}\,.$ Berechne $\operatorname{grad} f\,.$

d) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x_1+{x_2}^2-e^{x_2x_3} \\ \cos x_1+8x_2+3x_1e^{x_1x_3} \\ x_1+5x_2-x_3 \end{pmatrix}.$ Berechne $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f\,.$

e) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sin x_1+\sin x_2 \\ x_1e^{x_2}-x_1{x_3}^2 \\ 3x_3+x_1\cos x_3 \end{pmatrix}.$ Berechne $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f\,.$

106) Definiere die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (dabei ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$) durch

$$f(x) := \begin{cases} x_1x_2\,\frac{2{x_1}^2+5{x_2}^2}{{x_1}^2+{x_2}^2}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Berechne $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)\,.$

107) Untersuche, ob die Funktionen in Beispiel 102) differenzierbar sind (Begründungen geben). Soferne sie differenzierbar sind, gib ihre Ableitungen an.

108) Sind lineare Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (aus der linearen Algebra weiß man, dass $\varphi(x) = Ax$ für eine reelle $m \times n$-Matrix A) differenzierbar? Was ist ihre Ableitung? Wie ist die Situation bei affinen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (das heißt $\varphi(x) = Ax + b$ für eine reelle $m \times n$-Matrix A und ein $b \in \mathbb{R}^m$).

109) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, die durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \cos x_3 + 5 \\ {x_1}^2 + x_2 \sin x_3 \\ x_1 + {x_3}^3 \\ {x_1}^2 + x_2 x_3 \end{pmatrix}$$

definiert ist.

a) Berechne die Ableitung von f.

b) Bestimme die Ableitung von f in $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Verwende Beispiel b) um die Richtungsableitung von f im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Richtung $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (in der normierten und der nicht normierten Version) zu berechnen.

110) Für die folgenden Funktionen f berechne die Ableitung von f (dort, wo diese Funktion vernünftig definiert und differenzierbar ist), die Ableitung von f an der Stelle x_0, und die Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v.

a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_2}^2 + {x_5}^{x_3} \\ x_4 + x_3 \log x_2 \\ 2x_5 + \arcsin x_1 + 3{x_4}^5 \end{pmatrix}, \ x_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v := \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

b) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3{x_1}^3 x_2 - 4x_1 + 3x_2 \\ 4{x_1}^2 + {x_2}^6 - 9x_1 \\ 5 \arctan x_1 + 4x_2 \\ 2{x_1}^3 - x_1 x_2 \end{pmatrix}, \ x_0 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v := \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}.$

c) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3{x_2}^2 + 2x_1 x_3 \\ {x_1}^2 x_2 x_3 \\ {x_1}^2 - 3x_2 x_3 \end{pmatrix}, \ x_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$

d) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2{x_1}^2 x_3 + 5x_2 \cos x_4 - x_1 + 2x_3 \\ {x_1}^{\sin x_4} + x_2 + 3{x_3}^2 \end{pmatrix}, \ x_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \ v := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$

111) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($x = \binom{x_1}{x_2}$) durch

$$f(x) := \begin{cases} \left({x_1}^2 + {x_2}^2\right) \sin \frac{1}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Beweise, dass f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist, und dass f in 0 differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

112) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{cases} \frac{{x_1}^2 x_2}{{x_1}^4 + {x_2}^2}, & \text{falls } \binom{x_1}{x_2} \neq \binom{0}{0}, \\ 0, & \text{falls } \binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{0}, \end{cases}$$

definiert. Zeige, dass im Punkt $\binom{0}{0}$ alle Richtungsableitungen von f existieren (Berechne sie!). Ist f stetig, bzw. differenzierbar in $\binom{0}{0}$ (Begründungen)?

113) Für die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ($x=\binom{x_1}{x_2}$) berechne für alle $v\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ die Richtungsableitung von f im Punkt 0 in Richtung v. Weiters untersuche, ob f stetig, bzw. differenzierbar in 0 ist.

a) $f(x):=\begin{cases}\frac{x_1{x_2}^3}{{x_1}^2+{x_2}^6}\,, & \text{falls } x\neq 0,\\ 0\,, & \text{falls } x=0.\end{cases}$

b) $f(x):=\begin{cases}\frac{{x_1}^5{x_2}^5}{({x_1}^{10}+{x_2}^2)^3}\,, & \text{falls } x\neq 0,\\ 0\,, & \text{falls } x=0.\end{cases}$

114) a) Es sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass $\operatorname{div}\operatorname{rot} f(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}^3$ gilt.

b) Gib ein Beispiel einer zweimal partiell differenzierbaren Funktion $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, für die $\operatorname{div}\operatorname{rot} f(0)\neq 0$ ist.

115) Definiere $f:\left\{\binom{x_1}{x_2}\in\mathbb{R}^2 : -1\le x_1\le 3,\ -1\le x_2\le 1\right\}\to\mathbb{R}$ durch

$$f\binom{x_1}{x_2}:=5+9x_1-3{x_1}^2-{x_1}^3+\frac{1}{{x_2}^2+1}\,.$$

Berechne das Maximum von f.

116) Finde die kritischen Punkte von $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f\binom{x_1}{x_2}:={x_1}^2-{x_2}^2$. Weiters untersuche das Verhalten von f in der Nähe der kritischen Punkte.

117) Die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sei durch

$$f\binom{x_1}{x_2}:=\big(2{x_1}^6-15{x_1}^4+24{x_1}^2-11\big)e^{x_2}+e^{-16{x_2}^2}$$

definiert. Bestimme alle kritischen Punkte und lokalen Extrema von f, und untersuche, ob es sich um lokale Minima oder Maxima handelt.

118) Betrachte die Funktion $f:\left\{\binom{x_1}{x_2}\in\mathbb{R}^2 : -2\le x_1\le 3,\ -1\le x_2\le 1\right\}\to\mathbb{R}$, die durch

$$f\binom{x_1}{x_2}:=\big(2{x_1}^6-15{x_1}^4+24{x_1}^2-11\big)e^{x_2}+e^{-16{x_2}^2}$$

definiert ist. Bestimme das Maximum (bzw. die Maxima) von f.

119) Für die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ berechne die kritischen Punkte. Weiters bestimme für jeden kritischen Punkt x die zweite Ableitung $d^2f_{(x)}$, stelle fest, ob $d^2f_{(x)}$ positiv (oder negativ) definit ist, und untersuche das Verhalten von f in der Nähe von x.

a) $f\binom{x_1}{x_2}:={x_1}^2+{x_2}^3$. b) $f\binom{x_1}{x_2}:={x_1}^2+{x_2}^4$.

c) $f\binom{x_1}{x_2}:={x_1}^2-{x_2}^4$. d) $f\binom{x_1}{x_2}:={x_1}^2$.

120) Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ durch $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}x_1x_2+5\\7-3x_2\\8{x_1}^2e^{x_2+4}+5x_3\end{pmatrix}$ definiert. Gibt es eine Umgebung U von $\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$, sodass f auf U invertierbar ist? Was weiß man dann über f^{-1}?

121) Definiere $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ durch $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}e^{x_1}\cos x_2\\e^{x_1}\sin x_2\end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass f nicht bijektiv ist.

b) Beweise, dass es für alle $x\in\mathbb{R}^2$ eine Umgebung U von x und eine Umgebung V von $f(x)$ gibt, sodass $f:U\to V$ bijektiv ist.

122) Betrachte die Gleichung $\sin y - e^{-x^2}+1=0$.

a) Gibt es eine Umgebung von 0 und eine differenzierbare Funktion $f:U\to\mathbb{R}$ mit $f(0)=0$, sodass man $y=f(x)$ schreiben kann?

b) Berechne die Funktion f aus Beispiel a). Finde ein maximales Intervall I, auf dem man f als Lösung der Gleichung definieren kann.

c) Zeige, dass es eine von f verschiedene Funktion $g:I\to\mathbb{R}$ gibt (wobei f und I wie in Beispiel b) sind), die $\sin g(x) - e^{-x^2}+1=0$ erfüllt.

d) Finde unendlich viele verschiedene Funktionen, die wie in Beispiel c) sind.

123) Für die folgenden Gleichungen untersuche, ob es eine Umgebung U von 0 und eine Funktion $f:U\to\mathbb{R}$ mit $f(0)=0$ gibt, sodass man $y=f(x)$ schreiben kann. Weiters untersuche, ob f auf U differenzierbar ist, und gib $f'(x)$ (implizit), sowie $f'(0)$ (als Zahlenwert) an.

a) $xy+(\cos x)e^y-e^x=0$.

b) $xy+(\cos x)(\sin y)+x^2e^y=0$.

c) $y^2-x=0$.

d) $y^3-x^2=0$.

e) $e^y+x^2=0$.

f) $x^2+e^x\tan y=0$.

g) $y^2-x^2=0$.

h) $y^3-x^4=0$.

124) Betrachte die Gleichungen

$$y_1y_2+{y_1}^2x_2e^{x_1-3}+7x_3e^{y_2-1}+x_1{x_3}^2-x_1=0\,,$$
$${y_1}^2-9e^{y_1-5}+5x_3y_2-x_1y_2-x_1e^{x_2}=0\,.$$

Beweise, dass es eine Umgebung U von $\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f:U\to\mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ gibt, sodass man lokal die Lösungen der obigen Gleichungen als $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ schreiben kann. Weiters berechne $df_{\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}}$.

125) Zeige, dass es für die Gleichung

$$2y^5+3x^2+4x-2x^3e^{y-3}+25=0$$

eine Umgebung U von 7 und eine Funktion $f:U\to\mathbb{R}$ mit $f(7)=3$ gibt, sodass man lokal die Lösungen der obigen Gleichung als $y=f(x)$ schreiben kann. Kann man U so wählen, dass f stetig differenzierbar ist? Bestimme $f'(7)$.

126) Man betrachte die Gleichungen

$$x_1+7x_2-6x_3+y_1-3y_2+2y_4+x_1x_2+x_1{y_2}^2+y_3y_4+45=0\,,$$
$$4x_1-7x_2-2x_3-y_3+y_4+2x_1x_3+x_3e^{y_2-1}-49=0\,,$$
$$3x_1+5x_2-2x_3+14y_1+3y_2-5y_3+y_4-2{y_4}^3+x_2{y_1}^2+3{x_3}^2{y_3}^3+9y_1y_4-21=0\,,$$
$$3x_1-9x_2+x_3+2y_1+10y_2-4y_3-13y_4-{x_1}^2x_3+2x_1{y_4}^2+3{y_2}^2y_3-55=0\,.$$

Beweise, dass es eine Umgebung U von $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^4$ mit $f\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gibt, sodass man lokal die Lösungen der obigen Gleichungen als $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ schreiben kann. Kann U so gewählt werden, dass f stetig differenzierbar ist? Weiters berechne $df_{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

127) Definiere $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := x^t Ax + a^t x + a_0$, wobei A eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix ist, $a \in \mathbb{R}^n$ und $a_0 \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ zeige, dass $dg_{(x)} = 2\Big(x^t A + \dfrac{1}{2}a^t\Big)$ gilt.

128) Seien A eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix, $a \in \mathbb{R}^n$ und $a_0 \in \mathbb{R}$. Weiters sei $p \in \mathbb{R}^n$ so, dass $p^t Ap + a^t p + a_0 = 0$ und $Ap + \dfrac{1}{2}a \neq 0$ erfüllt sind. Beweise, dass $\mathcal{T} := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : p^t Ax + \dfrac{1}{2}a^t x + \dfrac{1}{2}a^t p + a_0 = 0\Big\}$ die Tangentialebene an die Hyperfläche 2. Ordnung $M := \big\{x \in \mathbb{R}^n : x^t Ax + a^t x + a_0 = 0\big\}$ im Punkt p ist.

129) Berechne das Minimum und das Maximum der Funktion

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$$

auf $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{{x_1}^2}{25} + \dfrac{{x_2}^2}{9} + \dfrac{{x_3}^2}{4} = 1\right\}$.

130) Finde das Minimum und das Maximum von

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := {x_1}^7 + {x_2}^7 + {x_3}^7$$

auf $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 9,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\right\}$.

131) Berechne das Maximum der Funktion

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

auf $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : \dfrac{{x_1}^2}{245} + \dfrac{{x_2}^2}{45} + \dfrac{{x_3}^2}{80} + \dfrac{{x_4}^2}{20} + \dfrac{{x_5}^2}{45} = 1\right\}$.

132) Beweise, dass für $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, … , $x_n > 0$ das harmonische Mittel kleiner oder gleich dem geometrischen Mittel ist, das heißt, dass

$$\frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}} \leq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}$$

gilt.

133) Finde jenen Punkt auf der dreidimensionalen Ebene

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\quad + \; x_4 + x_5 &= \;\; 2\,, \\ 2x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 \qquad &= 18\,, \end{aligned}$$

der vom Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ den kleinstmöglichen Abstand hat, und berechne diesen Abstand.

134) Bestimme das Maximum der Funktion

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := {x_1}^2 x_2 - {x_1}^2 - {x_2}^2$$

auf $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 9\right\}$.

135) Der Menge $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^6 + {x_2}^6 + {x_3}^6 \leq 192\right\}$ soll der volumsgrößte Quader eingeschrieben werden. Bestimme die Abmessungen und das Volumen dieses Quaders.

136) Finde das Maximum der Funktion

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := {x_1}^5 + 16{x_2}^5 + {x_3}^5$$

auf $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 30,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\right\}$.

137) Berechne das Maximum von

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := {x_1}^2 {x_2}^7 x_3 {x_4}^6$$

auf $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \frac{{x_1}^2}{288} + \frac{{x_2}^2}{112} + \frac{{x_3}^2}{64} + \frac{{x_4}^2}{24} = 1\right\}$.

138) Welcher Punkt der Menge $M := \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^2 = 108x_2\right\}$ hat vom Punkt $\begin{pmatrix} 64 \\ 54 \end{pmatrix}$ den kleinstmöglichen Abstand? Wie groß ist dieser Abstand?