Name: _____ Matr.Nr.: _____

Kolloquium zu Differentialgleichungen (SS 2018), 4. 10. 2018

Josef Hofbauer

1) Lösen Sie die Differentialgleichung $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$.
Bestimmen Sie alle Lösungen mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.
Gibt es eine Lösung mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 2$? Ist sie eindeutig?
Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 1$?

2) Sei $A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle Werte von a, für die das lineare System $\dot{x} = Ax$ (bzw. das Gleichgewicht 0) jeweils folgende Eigenschaft hat:
a) Sattel
b) stabil
c) asymptotisch stabil
d) Strudel
e) Zentrum
f) hyperbolisch
g) Gradientensystem
h) Hamiltonisches System

Skizzieren Sie im Fall (e) das Phasenportrait.

3) Erklären Sie die Begriffe ω–Limes und α–Limes.
Zeigen Sie: Der ω–Limes ist invariant.
Geben Sie mindestens 4 Beispiele von ω–Limesmengen.
Formulieren Sie den Satz von Poincaré–Bendixson.

4) Bestimmen Sie alle Gleichgewichte des folgenden Systems im $\mathbf{R}^2$:

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y), \quad \dot{y} = y(3 - 2x - y)$$

Welche dieser Gleichgewichte sind stabil, bzw. asymptotisch stabil?
Skizzieren Sie (mit Hilfe der Isoklinen) das Phasenportrait.
Zeigen Sie: Der Quadrant $\mathbf{R}^2_+ = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ ist invariant.
Ist die Funktion $V(x) = (x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + (y-1)^2$ eine Ljapunovfunktion im Quadranten $\mathbf{R}^2_+$?
Bestimmen Sie den ω–Limes von allen Lösungen im Quadranten $\mathbf{R}^2_+$.
Besitzt dieses System eine periodische Lösung?

1	2	3	4	Summe

Beurteilung: