79. Zeige: $\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}x^n$ wobei $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ die Fibonaccizahlen sind. Leite aus der Partialbruchzerlegung eine explizite Formel für die F_n her.

80. $f_n(x) = x^n$ konvergiert auf jedem Intervall $[0, q]$ mit $0 < q < 1$ gleichmäßig gegen 0.

81. Sei $f_n(x) = \frac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}$. Dann gilt $f_n \to 0$ gleichmäßig auf $[0, \infty)$, aber $\int_0^{\infty} f_n(x)dx = 1$.

82. Veranschaulichen Sie die (im Beweis des Satzes 8.17 (von Weierstrass) angegebene) Approximation der Betragsfunktion $|x|$ durch Polynome.

83. Berechne die Fourierreihen der (auf $[-\pi, \pi]$) definierten Funktionen $|x|, x^2, |\sin x|$ und $\mathrm{sgn} x$ und plotte sie.

84. Berechne das Dirichletsche Integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

85. Zeige: $\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} + \cdots + \sin(n + \frac{1}{2})t = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$

86. Zeige Satz 8.21 b aus der Vorlesung:
Seien $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ mit $\sum k(|a_k| + |b_k|) < \infty$. Dann stellt die trigonometrische Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

eine differenzierbare Funktion dar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx).$$

87. Leite die Fourierreihen für die Bernoullipolynome her: $\frac{B_m(x)}{m!} = -\sum_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} \frac{e^{2\pi ikx}}{(2\pi ik)^m}$

88. Zeige, dass die Koeffizienten in der komplexen Fourierentwicklung $f(x) = \sum\ c_k e^{ikx}$ durch $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ $(k \in \mathbb{Z})$ gegeben sind.

89. Berechne den Poissonkern $P_r(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik\varphi} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}$.

90. Berechne $f(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\varphi}}{k}$ als Grenzwert $r \to 1-$ von $P_r f(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\varphi}}{k} r^k$.

91. Berechne die Parsevalsche Gleichung zu den Fourierreihen von $|x|, x^2, |\sin x|$ und $\mathrm{sgn} x$.

92. Let $a_1, a_2, \ldots$ be real numbers such that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converges. Show that $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 0$.

93. Berechne $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

94. Berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

95. $\arcsin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!^2}{2(2n)!}(2x)^{2n}$