Übungen zur Analysis *Josef Hofbauer* **SS 2010**

1. Die Tangente durch einen Punkt $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ an den Einheitskreis schneide die Achsen in den Punkten $(\sec\alpha, 0)$ und $(0, \operatorname{cosec}\alpha)$. Drücke diese weiteren Winkelfunktionen `Secans` und `Cosecans` durch Sinus und Cosinus aus.

2. Zeige die Formel von Ptolemäus $ef = ac + bd$ für die Seiten a, b, c, d und die Diagonalen e, f eines Sehnenvierecks.

   Im Spezialfall, dass eine Diagonale durch den Mittelpunkt des Umkreises geht, ergibt sich daraus (mit Hilfe des Satzes von Thales) der Summensatz für den Sinus.

3. Zeige, dass die Summensätze für Sinus und Cosinus mit der einfachen Formel

$$\operatorname{cis}(\alpha + \beta) = \operatorname{cis}\alpha \operatorname{cis}\beta$$

   für die komplexwertige Funktion $\operatorname{cis}\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$ $(i^2 = -1)$ äquivalent sind.

4. Leite aus den ersten Summensätzen für die Winkelfunktionen die zweiten Summensätze her:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

5. Leite Formeln für $\sin 4x$, $\cos 4x$, $\sin 5x$, $\cos 5x$ her.
   (Hinweis: Moivre'sche Formel $\operatorname{cis} nx = (\operatorname{cis} x)^n$)

6. Zeige: $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ und berechne die exakten Werte von $\cos 15°$ und $\cos 36°$.

7. Man drücke $\tan(\alpha + \beta)$ durch $\tan\alpha$ und $\tan\beta$ aus.

8. Zeige: a) $2\arctan x = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

   b) $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ falls $x > 0$.

   c) $\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ falls $|x| < 1$.

9. Zeige:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx &= \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\\
\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx &= \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

10. Zeige: $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

11. Man bilde, ausgehend von $x \in \mathbb{R}$, die Folge $x_0 = x$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+\sqrt{1+x_n^2}}$. Zeige, dass diese Folge monoton gegen 0 konvergiert. Setze $b_n = 2^n x_n$ und $a_n = \frac{2^n x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}$. Zeige, dass $[a_n, b_n]$ (im Fall $x > 0$, sonst umgekehrt) eine Intervallschachtelung bildet. Sei $A(x)$ der innerste Punkt. Zeige, dass die Funktion $A(x)$ streng monoton wachsend, ungerade und beschränkt ist und die Funktionalgleichung

$$A(x) + A(y) = A(\frac{x+y}{1-xy})$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy < 1$ erfüllt.

(Daraus kann man dann folgern: $A(x) = \arctan x$)

12. Zeige folgende Formel von Euler:

$$\frac{1}{x} - \cot x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$$

(Hinweis: Zeige zuerst $\cot x = \frac{1}{2}(\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2})$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} = \frac{1}{x}$.)

Für $x = \frac{\pi}{4}$ folgt daraus:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} \tan \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \tan \frac{\pi}{8} + \frac{1}{16} \tan \frac{\pi}{16} + \dots$$

13. Leite die Formel $(\cos x)' = -\sin x$ her.

14. Differenziere die folgenden Funktionen:
$\cot x$, $\sin^2(x^3+1)$, $\sqrt{x^2 + \cos^3 \sqrt{x}}$

15. Differenziere: $\arcsin x^2$, $(\arccos x)^2$, $\arctan \frac{x-1}{x}$.

16. Berechne mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion die Ableitung von $\arcsin x$.

17. Berechne mit der Regel von de l'Hospital: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

18. Berechne mit der Regel von de l'Hospital: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

19. Zeichne die Graphen der ersten Taylorpolynome (um $x_0 = 0$) des Sinus.

20. Zeige für $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

21. Zeige durch Vergleich der Taylorreihen die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.