# Mathematische Randbemerkungen 8:
# Einige q-Hankeldeterminanten und damit verknüpfte Identitäten

Johann Cigler

Der Ausgangspunkt der folgenden Bemerkungen war der Versuch, die Hankeldeterminanten $\det\left(\begin{bmatrix} i+j+m \\ m \end{bmatrix}\right)_{i,j=0}^{n-1}$ für $m \in \mathbb{N}$ zu berechnen. Ich suchte zunächst nach Gesetzmäßigkeiten, sah aber keine, außer dass diese Determinanten für $n > m+1$ verschwinden und einfache Produktdarstellungen haben. Da die Untersuchung allgemeinerer Fälle oft mehr Einsicht bringt, habe ich es dann statt mit $\begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1-q^{m+j}}{1-q^j}$ mit Produkten der Gestalt

$$a(n) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(1-q^{cj+d})}{\prod_{j=1}^{n}(1-q^{cj+e})} \tag{1.1}$$

probiert. Aufgrund der zusätzlichen Parameter ließen sich deren Hankeldeterminanten ziemlich leicht erraten. Durch das Erraten einiger weiterer Details wurde ein einfacher Induktionsbeweis möglich. Zusätzlich ergaben sich ein paar Resultate über die $q-$Catalanzahlen von George Andrews sowie ein interessantes $q-$Analogon der zentralen Binomialkoeffizienten und einige damit zusammenhängende Identitäten.
Im Nachhinein habe ich erfahren, dass mein Ausgangsproblem schon lange gelöst war und dass die betreffenden Identitäten als Spezialfälle der terminierenden ${}_6\phi_5-$Summationsformel aus der Theorie der $q-$hypergeometrischen Reihen interpretiert werden können. Diese Hinweise verdanke ich Michael Schlosser, dem ich sehr herzlich dafür danken möchte.
Dieser Artikel hat – wie meine anderen mathematischen Randbemerkungen – nicht das Ziel, neue Resultate abzuleiten, sondern möchte nur einige Aspekte betonen, die mich besonders faszinieren. In diesem speziellen Fall möchte ich darüber hinaus zeigen, wie weit man mit rein experimentellen Methoden kommen kann. Daher hat mich die Tatsache, dass diese Determinanten schon bekannt sind, nicht weiter gestört. Es war sogar gut, dass ich das vorher nicht gewusst hatte, denn sonst hätte ich mich mit derartigen Fragen gar nicht beschäftigt.

## 1. Hankeldeterminanten und zugeordnete orthogonale Polynome

In diesem Abschnitt möchte ich einige wohlbekannte Resultate skizzieren, auf welchen ich aufbauen werde:
Sei $(a(n))$ eine Folge von Elementen eines Körpers mit $a(0)=1.$
Ist $\det(a(i+j))_{i,j=0}^{n-1} \neq 0$ für alle $n \geq 1,$ dann sind die Polynome

$$p(n,x) = \frac{1}{\det(a(i+j))_{i,j=0}^{n-1}} \det\begin{pmatrix} a(0) & a(1) & \cdots & a(n-1) & 1 \\ a(1) & a(2) & \cdots & a(n) & x \\ a(2) & a(3) & \cdots & a(n+1) & x^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a(n) & a(n+1) & \cdots & a(2n-1) & x^n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

bekanntlich orthogonal bezüglich des linearen Funktionals $F$ , das durch $F(x^n) = a(n)$ definiert ist.
Genauer gilt

$$F(p(k,x)p(n,x)) = F(x^k p(n,x)) = \frac{\det(a(i+j))_{i,j=0}^{n}}{\det(a(i+j))_{i,j=0}^{n-1}}[n=k]. \tag{1.3}$$

Denn in

$$F(x^k p(n,x)) = \frac{1}{\det(a(i+j))_{i,j=0}^{n-1}} \det \begin{pmatrix} a(0) & a(1) & \cdots & a(n-1) & F(x^k) \\ a(1) & a(2) & \cdots & a(n) & F(x^{k+1}) \\ a(2) & a(3) & \cdots & a(n+1) & F(x^{k+2}) \\ \vdots & & & & \vdots \\ a(n) & a(n+1) & \cdots & a(2n-1) & F(x^{k+n}) \end{pmatrix}$$

sind für $k < n$ zwei Spalten gleich und für $k = n$ steht rechts $\dfrac{\det(a(i+j))_{i,j=0}^{n}}{\det(a(i+j))_{i,j=0}^{n-1}}$.

Nach dem Satz von Favard erfüllen sie daher eine Rekursion der Gestalt

$$p(n,x) = (x - s(n-1))p(n-1,x) - t(n-2)p(n-2,x). \tag{1.4}$$

Wir definieren nun Koeffizienten $a(n,k)$ durch

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} a(n,k)p(k,x). \tag{1.5}$$

Aus

$$\sum_k a(n,k)p(k,x) = x \cdot x^{n-1} = \sum_k a(n-1,k)\left(xp(k,x)\right)$$
$$= \sum_k a(n-1,k)\left(p(k+1,x) + s(k)p(k,x) + t(k-1)p(k-1,x)\right)$$
$$= \sum_k p(k,x)\left(a(n-1,k-1) + s(k)a(n-1,k) + t(k)a(n-1,k+1)\right)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} &a(0,k) = [k=0] \\ &a(n,0) = s(0)a(n-1,0) + t(0)a(n-1,1) \\ &a(n,k) = a(n-1,k-1) + s(k)a(n-1,k) + t(k)a(n-1,k+1). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Dabei ist $a(n,0) = F(x^n) = a(n)$.

Man überlegt sich leicht, dass

$$a(n,k)=F\left(\frac{x^n p(k,x)}{t(0)t(1)\cdots t(k-1)}\right)$$

ist.

Denn aus

$$\frac{x^n p(k,x)}{\prod_{j=0}^{k-1} t(j)}=\frac{x^{n-1}}{\prod_{j=0}^{k-1} t(j)}\left(p(k+1,x)+s(k)p(k,x)+t(k-1)p(k-1,x)\right)$$

$$=\frac{x^{n-1}p(k-1,x)}{\prod_{j=0}^{k-2} t(j)}+s(k)\frac{x^{n-1}p(k,x)}{\prod_{j=0}^{k-1} t(j)}+t(k)\frac{x^{n-1}p(k+1,x)}{\prod_{j=0}^{k} t(j)}$$

ergibt sich, dass

$$F\left(\frac{x^n p(k,x)}{t(0)t(1)\cdots t(k-1)}\right)$$

die Rekursionen (1.6) erfüllt und daher mit $a(n,k)$ übereinstimmt.

Speziell ist

$$F\left(\frac{x^n p(n,x)}{t(0)t(1)\cdots t(n-1)}\right)=a(n,n)=1,$$

d.h.

$$F\left(p(n,x)^2\right)=\prod_{j=0}^{n-1} t(j). \tag{1.7}$$

Schreibt man $p(n,x)=\sum_{k=0}^{n} b(n,k)x^k$, so gilt nach (1.5)

$$x^n=\sum_{k,j} a(n,j)b(j,k)x^k$$

und somit

$$\sum_j a(n,j)b(j,k)=[n=k]. \tag{1.8}$$

Die Matrizen $\left(a(i,j)\right)$ und $\left(b(i,j)\right)$ sind also invers zueinander.

Eine weitere interessante Formel ist

$$\sum_k a(n,k)a(m,k)\prod_{j=0}^{k-1} t(j)=a(m+n,0). \tag{1.9}$$

Denn

$$a(m+n,0)=a(m+n)=F(x^m x^n)=F\left(\sum_j a(m,j)p(j,x)\sum_k a(n,k)p(k,x)\right)$$

$$=\sum_{j,k} a(m,j)a(n,k)F\left(p(j,x)p(k,x)\right)=\sum_k a(m,k)a(n,k)F\left(p(k,x)^2\right).$$

Aus (1.2) folgt, dass die entsprechenden Polynome beim Übergang zur Folge $\left(u^n a(n)\right)$ durch $u^n p_n(\frac{x}{u})$ gegeben sind. Dabei geht $s(n)$ in $us(n)$, $t(n)$ in $u^2 t(n)$ und $a(n,k)$ in $u^{n-k} a(n,k)$ über.

Alles wird noch einfacher, wenn man von einer Folge $(a(n))$ ausgeht, die abwechselnd Nullen hat, d.h. von der Form $a(2n) = c(n)$ und $a(2n+1) = 0$ ist. Dann sind alle $s(n) = 0$ und die $a(n,k)$ durch die Werte $\left(t(n)\right)$ eindeutig festgelegt.
Wir betrachten dann außer den Determinanten $\det\left(a(i+j)\right)$ auch die Determinanten, die zu den Folgen

$$\left(a_0(n)\right) = \left(c(n)\right) = \left(a(2n,0)\right) \tag{1.10}$$

und

$$\left(a_1(n)\right) = \left(a(2n+1,1)\right) \tag{1.11}$$

gehören.

Man rechnet leicht nach, dass für die zu diesen Folgen gehörenden Werte

$$s_0(0) = t(0), s_0(n) = t(2n-1) + t(2n), t_0(0) = t(0)t(1), t_0(n) = t(2n)t(2n+1) \tag{1.12}$$

sowie

$$s_1(0) = t(0) + t(1), s_1(n) = t(2n) + t(2n+1), t_1(0) = t(1)t(2), t_1(n) = t(2n+1)t(2n+2) \tag{1.13}$$

gilt.

Aus $\sum_j a(n,j)b(j,k) = [n = k]$ ergibt sich weiters

$$b_0(n,k) = b(2n,2k) \tag{1.14}$$

und

$$b_1(n,k) = b(2n+1,2k+1). \tag{1.15}$$

Eine interessante Folgerung ist

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a(2n,2k) \prod_{j=0}^{k-1} t(2j) = [n = 0]. \tag{1.16}$$

Das ergibt sich unmittelbar aus (1.12). Denn wenn wir $t(-1) = 0$ setzen und beachten, dass $a(2n,-2) = a(2n,2n+2) = a(2n,2n+2) = 0$ ist, so folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k a(2n+2,2k)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j)$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k \left(a(2n,2k-2)+\left(t(2k-1)+t(2k)\right)a(2n,2k)+t(2k)t(2k+1)a(2n,2k+2)\right)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j)$$
$$=\sum(-1)^k a(2n,2k)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j)\left(t(2k-1)+t(2k)-t(2k)-t(2k-1)\right)=0.$$

Für die ungeraden Werte ergibt sich analog für $n>0$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a(2n+1,2k+1)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j+1)=t(0)a(2n-1,1) \tag{1.17}$$

Die Identität (1.9) kann auch in Matrixform geschrieben werden: Sei
$A_n=\left(a(i,j)\right)_{i,j=0}^{n-1}$,
$D_n=\left([i=j]\prod_{k=0}^{i-1} t(j)\right)_{i,j=0}^{n-1}$ die Diagonalmatrix mit Einträgen $\prod_{k=0}^{i-1} t(j), i=0,1,2,\cdots,n,$ und
$H_n=\left((a(i+j,0)\right)_{i,j=0}^{n-1}$.

Dann gilt
$$A_n D_n A_n^t = H_n.$$

Geht man zu den Determinanten über, so ergibt sich sofort, dass

$$d(n,0)=\det H_n=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{k=0}^{i-1} t(k) \tag{1.18}$$

gilt.

Sei nun $d(n,1)=\det\left(a(i+j+1)\right)_{i,j=0}^{n-1}$ die Hankeldeterminante von $\left(a(n+1)\right)$, dann folgt aus (1.2), dass
$$d(n,1)=(-1)^n b(n,0)d(n) \tag{1.19}$$
ist.
Durch die Folgen $\left(d(n,0)\right)$ und $\left(d(n,1)\right)$ ist die Folge $\left(a(n)\right)$ eindeutig charakterisiert.
Aus den Eigenschaften der Determinante ist klar, dass die $n-$ten Hankeldeterminanten von $\left(a(n)x^n\right)$ den Wert $d(n,0)x^{n(n-1)}$ bzw. $d(n,1)x^{n^2}$ besitzen.

## 2. Der allgemeine Fall

Die folgenden Resultate habe ich durch systematisches Raten gefunden. Ich möchte kurz skizzieren, wie ich dabei vorgegangen bin.

Ich verwende die übliche $q-$Notation und schreibe $\left(a;q\right)_\infty=\prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j)$ und

$\left(a;q\right)_n=\dfrac{\left(a;q\right)_\infty}{\left(aq^n;q\right)_\infty}$ für $n\in\mathbb{Z}$.

Wie schon erwähnt habe ich zuerst Folgen $\left(a(n)\right)$ mit $a(2n)=c(n)$ und $a(2n+1)=0$ untersucht mit $c(n)=\dfrac{\prod_{j=1}^{n}(1-q^{cj+d})}{\prod_{j=1}^{n}(1-q^{cj+e})}$. Aufgrund der erhaltenen Resultate habe ich das später ersetzt durch

$$c(n,a,b,q)=\frac{\left(b;q\right)_n}{\left(a;q\right)_n}=\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(1-q^jb)}{\prod_{j=0}^{n-1}(1-q^ja)}. \tag{2.1}$$

Das ist eine Spur allgemeiner und vereinfacht die Formeln.
Ich habe dann mit Hilfe von Mathematica die ersten paar Polynome $p(n,x)$ mit Formel (1.2) berechnet. Aus der Tatsache, dass
$p(n,x)=xp(n-1,x)-t(n-2)p(n-2,x)$
gilt, konnte ich daraus der Reihe nach die $t(n)$ berechnen und ihre allgemeine Gestalt erraten. Es ergab sich

$$t(2n,a,b,q)=\frac{q^n(1-q^nb)(1-q^{n-1}a)}{(1-q^{2n-1}a)(1-q^{2n}a)} \tag{2.2}$$

und

$$t(2n+1,a,b,q)=\frac{q^n(1-q^{n+1})(b-q^na)}{(1-q^{2n}a)(1-q^{2n+1}a)}. \tag{2.3}$$

Für $n=0$ vereinfacht sich (2.2) zu

$$t(0,a,b,q)=\frac{1-b}{1-a}. \tag{2.4}$$

Daraus folgt

$$\prod_{j=0}^{k-1} t(2j,a,b,q) = q^{\binom{k}{2}} \frac{(b;q)_k}{(q^{k-1}a;q)_k} \tag{2.5}$$

und

$$\prod_{j=0}^{k-1} t(2j+1,a,b,q) = q^{\binom{k}{2}} \frac{(q;q)_k}{(a;q)_{2k}} \prod_{j=0}^{k-1} (b-q^j a). \tag{2.6}$$

Ich habe nun mit diesen Werten die entsprechende Matrix $\left(a(n,k)\right)$ gebildet durch

$$a(0,k,a,b,q) = [k=0]$$
$$a(n,0,a,b,q) = t(0,a,b,q)a(n-1,1,a,b,q)$$
$$a(n,k,a,b,q) = a(n-1,k-1,a,b,q) + t(k,a,b,q)a(n-1,k+1,a,b,q)$$

Glücklicherweise haben sich die $a(n,k)$ wieder leicht erraten lassen.

Es ergibt sich

$$a(2n,2k,a,b,q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{(q^k b;q)_{n-k}}{(q^{2k}a;q)_{n-k}} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} c(n-k,q^{2k}a,q^k b,q) \tag{2.7}$$

und

$$a(2n+1,2k+1,a,b,q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{(q^{k+1} b;q)_{n-k}}{(q^{2k+1}a;q)_{n-k}} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} c(n-k,q^{2k+1}a,q^{k+1} b,q). \tag{2.8}$$

Damit hatte ich genug Informationen, um die bisherigen Aussagen zu beweisen. Es genügt nämlich zu verifizieren, dass mit diesen Werten (1.6) erfüllt ist. Das lässt sich aber leicht mit Induktion zeigen:

$$a(2n,0) - t(0)a(2n-2,0) - t(0)t(1)a(2n-2,2)$$
$$= \frac{(b;q)_n}{(a;q)_n} - \frac{1-b}{1-a}\frac{(b;q)_{n-1}}{(a;q)_{n-1}} - \frac{(1-b)(1-q)(b-a)}{(1-a)(1-a)(1-qa)}\frac{(1-q^{n-1})}{(1-q)}\frac{(qb;q)_{n-2}}{(q^2a;q)_{n-2}}$$
$$= \frac{(b;q)_{n-1}}{(a;q)_{n-1}}\left(\frac{1-q^{n-1}b}{1-q^{n-1}a} - \frac{1-b}{1-a} - \frac{(1-q^{n-1})(b-a)}{(1-a)\left(1-q^{n-1}a\right)}\right) = 0,$$

weil

$$\frac{1-q^{n-1}b}{1-q^{n-1}a} - \frac{1-b}{1-a} - \frac{(1-q^{n-1})(b-a)}{(1-a)\left(1-q^{n-1}a\right)} = \frac{\left(1-q^{n-1}b\right)(1-a) - (1-b)\left(1-q^{n-1}a\right) - (1-q^{n-1})(b-a)}{(1-a)\left(1-q^{n-1}a\right)} = 0$$

ist.

$$a(2n,2k)-a(2n-2,2k-2)-\left(t(2k)+t(2k-1)\right)a(2n-2,2k)-t(2k)t(2k+1)a(2n-2,2k+2)$$
$$=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{\left(q^k b;q\right)_{n-k}}{\left(q^{2k}a;q\right)_{n-k}}-\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}\frac{\left(q^{k-1}b;q\right)_{n-k}}{\left(q^{2k-2}a;q\right)_{n-k}}$$
$$-\left(\frac{q^k\left(1-q^k b\right)\left(1-q^{k-1}a\right)}{\left(1-q^{2k-1}a\right)\left(1-q^{2k}a\right)}+\frac{q^{k-1}\left(1-q^k\right)\left(1-q^{k-1}a\right)}{\left(1-q^{2k-2}a\right)\left(1-q^{2k-1}a\right)}\right)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}\frac{\left(q^k b;q\right)_{n-k-1}}{\left(q^{2k}a;q\right)_{n-k-1}}$$
$$-\frac{q^k\left(1-q^k b\right)\left(1-q^{k-1}a\right)}{\left(1-q^{2k-1}a\right)\left(1-q^{2k}a\right)}\frac{q^k\left(1-q^{k+1}\right)\left(1-q^k a\right)}{\left(1-q^{2k}a\right)\left(1-q^{2k+1}a\right)}\begin{bmatrix} n-1 \\ k+1 \end{bmatrix}\frac{\left(q^{k+1}b;q\right)_{n-k-2}}{\left(q^{2k+2}a;q\right)_{n-k-2}}$$

Eine leichte, aber etwas langwierige Rechnung zeigt, dass die Summe verschwindet.
Analog geht man für $a(2n+1,2k+1)$ vor.
Ebenso habe ich die allgemeine Gestalt der Koeffizienten $b(n,k,a,b,q)$ der orthogonalen Polynome erraten. Es ergibt sich

$$b(2n,2k,a,b,q)=(-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{\left(q^k b;q\right)_{n-k}}{\left(q^{n+k-1}a;q\right)_{n-k}} \tag{2.9}$$

und

$$b(2n+1,2k+1,a,b,q)=(-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{\left(q^{k+1}b;q\right)_{n-k}}{\left(q^{n+k}a;q\right)_{n-k}}. \tag{2.10}$$

Zum Beweis, dass ich richtig geraten hatte, musste ich nur verifizieren, dass damit (1.4) erfüllt ist.

Ein Blick in das Standardwerk „The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue" von R. Koekoek und R.F. Swarttouw (http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey.html) zeigt, dass $p(2n,x)$ die normierte Version der Little q-Jacobi Polynome $p_n(x;\frac{b}{q},\frac{a}{qb}\,|\,q)$ ist.

Die Tatsache (1.8), dass die Matrizen $\left(a(2n,2j)\right)$ und $\left(b(2j,2k)\right)$ zueinander invers sind, ergibt die Identität

$$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}q^{\binom{j-k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}\frac{\left(q^j b;q\right)_{n-j}\left(q^k b;q\right)_{j-k}}{\left(q^{2j}a;q\right)_{n-j}\left(q^{j+k-1}a;q\right)_{j-k}}=[n=k]$$

oder

$$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}q^{\binom{j-k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}\left(1-q^{2j-1}a\right)\frac{\left(q^k b;q\right)_{n-k}}{\left(q^{j+k-1}a;q\right)_{n-k+1}}=[n=k]. \tag{2.11}$$

Diese lässt sich noch ein wenig umformen zu

$$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}q^{\binom{j-k}{2}}\frac{[n]!}{[j]![n-j]!}\frac{[j]!}{[k]![j-k]!}\left(1-q^{2j-1}a\right)\frac{\left(q^kb;q\right)_{n-k}}{\left(q^{j+k-1}a;q\right)_{n-k+1}}=[n=k]$$

oder wenn man $j-k=\ell$ setzt und beachtet, dass die von $\ell$ unabhängigen Terme $\frac{[n]!}{[k]!}$ und $\left(q^kb;q\right)_{n-k}$ für $n=k$ den Wert $1$ liefern,

$$\sum_{\ell=0}^{n-k}(-1)^{\ell}q^{\binom{\ell}{2}}\begin{bmatrix}n-k\\ \ell\end{bmatrix}\left(1-q^{2k+2\ell-1}a\right)\frac{1}{\left(q^{\ell+2k-1}a;q\right)_{n-k+1}}=[n=k]$$

und wenn man $n$ durch $n+k$ und $q^{2k-1}a$ durch $a$ ersetzt,

$$\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{\ell}q^{\binom{\ell}{2}}\begin{bmatrix}n\\ \ell\end{bmatrix}\left(1-q^{2\ell}a\right)\frac{1}{\left(q^{\ell}a;q\right)_{n+1}}=[n=0]. \tag{2.12}$$

Kurioserweise erhält man dieselbe Identität aus (1.16).

Denn $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a(2n,2k,a,b,q)\prod_{j=0}^{k-1}t(2j,a,b,q)=[n=0]$ bedeutet hier

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}\frac{\left(q^kb;q\right)_{n-k}}{\left(q^{2k}a;q\right)_{n-k}}q^{\binom{k}{2}}\frac{(b;q)_k}{\left(q^{k-1}a;q\right)_k}=[n=0]$$

und das ist nichts anderes als

$$\sum_{k=0}^{n}a(2n,2k,a,b,q)b(2k,0,a,b,q)=[n=0].$$

Denn wenn man (2.5) und (2.9) miteinander vergleicht, bemerkt man, dass

$$b(2k,0,a,b,q)=\prod_{j=0}^{k-1}t(2j,a,b,q)$$

gilt.

Setzt man

$$\tau(k,a,b,q)=\prod_{j=0}^{k-1}t(2j,a,b,q), \tag{2.13}$$

dann ergibt ein Vergleich von (2.5) und (2.9)

$$b(2n,2k,a,b,q)=(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\tau(n-k,q^{2k}a,q^kb,q)$$

und

$$b(2n+1,2k+1,a,b,q)=(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\tau(n-k,q^{2k+1}a,q^{k+1}b,q).$$

Die Identität $\sum_k a(2n,2k,a,b,q)a(2m,2k,a,b,q)\prod_{j=0}^{2k-1}t(j,a,b,q)=a(2m+2n,0,a,b,q)$

ist nach einer leichten Rechnung äquivalent mit der folgenden Identität:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}q^{k^2-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}(q;q)_k\,(1-q^{2k-1}a)\prod_{j=0}^{k-1}(b-q^ja)\frac{(a;q)_{k-1}}{(b;q)_k\,(q^na;q)_k\,(q^ma;q)_k}\\&=\frac{(q^mb;q)_n\,(a;q)_n}{(b;q)_n\,(q^ma;q)_n}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Lässt man in (2.14) $m\to\infty$ gehen, so ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n}q^{k^2-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(1-q^{2k-1}a)\prod_{j=0}^{k-1}(b-q^ja)\frac{(a;q)_{k-1}}{(b;q)_k\,(q^na;q)_k}=\frac{(a;q)_n}{(b;q)_n}.\tag{2.15}$$

Nun wollen wir noch die Hankeldeterminanten
$d_0(n,m,a,b,q)=\det\left(c(i+j+m,a,b,q)\right)_{i,j=0}^{n-1}$
berechnen.
Aus (2.5) und (2.6) ergibt sich

$$T(k,a,b,q):=\prod_{j=0}^{k-1}t(2j,a,b,q)\prod_{j=0}^{k-1}t(2j+1,a,b,q)=q^{2\binom{k}{2}}\frac{(b;q)_k}{(q^{k-1}a;q)_k}\frac{(q;q)_k}{(a;q)_{2k}}\prod_{j=0}^{k-1}(b-q^ja).$$

Daher ist nach (1.18)

$$\begin{aligned}d_0(n,0,a,b,q)&=q^{2\binom{n}{3}}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(b;q)_k}{(q^{k-1}a;q)_k}\frac{(q;q)_k}{(a;q)_{2k}}\prod_{j=0}^{k-1}(b-q^ja)\\&=\frac{q^{2\binom{n}{3}}}{(a;q)_{n-1}^{n}}\prod_{j=0}^{n-2}\left(\frac{(1-q^jb)(1-q^{j+1})(b-q^ja)}{1-q^{n-1+j}a}\right)^{n-1-j}.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nach leichter Rechnung

$$\frac{d_0(n,0,qa,qb,q)}{d_0(n,0,a,b,q)} = q^{\binom{n}{2}}\left(\frac{1-a}{1-b}\right)^n \frac{(b;q)_n}{(q^{n-1}a;q)_n}.$$

Daher ist

$$d_0(n,1,a,b,q) = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^n d_0(n,0,qa,qb,n) = q^{\binom{n}{2}} \frac{(b;q)_n}{(q^{n-1}a;q)_n} d_0(n,0,a,b,n). \qquad (2.16)$$

Dasselbe Ergebnis folgt auch aus (1.19), da $b(2n,0,a,b,q) = q^{\binom{n}{2}} \frac{(b;q)_n}{(q^{n-1}a;q)_n}$ ist.

Nun ist aber klar, wie man allgemein $d_0(n,m,a,b,q)$ berechnen kann:

$$d_0(n,m,a,b,q) = \left(\frac{(b;q)_m}{(a;q)_m}\right)^n d_0(n,0,q^m a,q^m b,n) = q^{m\binom{n}{2}} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{(q^j b;q)_n}{(q^{n-1+j}a;q)_n} d_0(n,0,a,b,n). \qquad (2.17)$$

## 3. Einige Spezialfälle

Es gibt viele interessante Spezialfälle der eben skizzierten Theorie. Ich möchte hier nur einige wenige näher untersuchen.

### 3.1. Ein q-Analogon von n! und 1/n!

Wir betrachten zuerst den einfachsten Fall, wo $c(n) = (q;q)_n = \prod_{j=1}^{n}(1-q^j)$ und die Folge $a(n)$ durch $a(2n) = c(n) = \prod_{j=1}^{n}(1-q^j)$ und $a(2n+1) = 0$ definiert ist.

Aus (2.2) und (2.3)
ergibt sich $t(2n) = q^n(1-q^{n+1}), t(2n+1) = q^{n+1}(1-q^{n+1})$.
Aus (2.7) und (2.8) folgt ebenso

$$\begin{aligned} a(2n,2k) &= (q^{k+1};q)_{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \\ a(2n+1,2k+1) &= (q^{k+2};q)_{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Aus (2.9) und (2.10) folgt schließlich

$$\begin{aligned} b(2n,2k) &= (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q^{k+1};q)_{n-k} \\ b(2n+1,2k+1) &= (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q^{k+2};q)_{n-k}. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Für die Hankeldeterminanten der Folge $a_0(n)=(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)=(1-q)^n\left[n\right]!$ ergibt sich somit aus (1.18) und (2.17)

$$d_0(n,0,0,q,q)=\prod_{k=0}^{n-1}q^{k^2}(1-q)^{2k}\left(\left[k\right]!\right)^2=q^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}(1-q)^{n^2-n}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\left[k\right]!\right)^2$$

und

$$d_0(n,m,0,q,q)=q^{m\binom{n}{2}}\prod_{j=0}^{m-1}\left(q^{j+1};q\right)_n d_0(n,0,0,q,q).$$

Daraus ergibt sich weiters, dass

$$\det\left(\left[i+j\right]!\right)_{i,j=0}^{n-1}=q^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\left[k\right]!\right)^2 \tag{3.3}$$

und

$$\det\left(\left[i+j+m\right]!\right)_{i,j=0}^{n-1}=q^{\frac{n(n-1)(2n-1+3m)}{6}}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\left[k\right]!\right)^2\prod_{j=0}^{m-1}\frac{\left[n+j\right]!}{\left[j\right]!}. \tag{3.4}$$

Die Formel (1.9) reduziert sich in diesem Fall auf die $q-$Vandermonde'sche Formel

$$\sum_{k=0}^{n}q^{k^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+n\\k\end{bmatrix}.$$

Für die Folge $\left(\frac{1}{[n]!}\right)$ ergibt sich analog

$$\det\left(\frac{1}{\left[i+j+m\right]!}\right)_{i,j=0}^{n-1}=(-1)^{\binom{n}{2}}q^{m\binom{n}{2}+\frac{n(n-1)^2}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\left[k\right]!}{[k+m+n-1]!}. \tag{3.5}$$

### 3.2. Hankeldeterminanten der Folge $\left(\begin{bmatrix}n+m\\m\end{bmatrix}\right)_{n\geq 0}$.

Um unser Ausgangsproblem zu lösen, betrachten wir $c(n)=\dfrac{\prod_{j=1}^{n}(1-q^{j+d})}{\prod_{j=1}^{n}(1-q^{j})}=\dfrac{\left(q^{d+1};q\right)_n}{\left(q;q\right)_n}$

und schauen uns die Folge $\left(a(n)\right)$ mit $a(2n)=c(n)$ und $a(2n+1)=0$ an. Dabei ergibt sich aus den obigen Formeln

$$t(0,1,d,0)=\frac{(1-q^{d+1})}{(1-q)}, \tag{3.6}$$

$$t(2n,1,d,0)=\frac{q^n(1-q^{(n+1)+d})(1-q^n)}{(1-q^{2n})(1-q^{2n+1})}=\frac{q^n(1-q^{(n+1)+d})}{(1+q^n)(1-q^{2n+1})} \tag{3.7}$$

und

$$t(2n+1,1,d,0)=\frac{q^{n+1}(1-q^{n+1})(q^d-q^n)}{(1-q^{2n+1})(1-q^{2n+2})}=\frac{q^{n+1}(q^d-q^n)}{(1-q^{2n+1})(1+q^{n+1})}. \tag{3.8}$$

Für die Folge $\left(c(n)\right)$ ergibt sich aus (1.12)

$$t_0(0,d)=t(0,1,d,0)t(1,1,d,0)=\frac{(1-q^{1+d})}{(1-q)}\frac{q(q^d-1)}{(1-q)(1+q)}$$

und für $n>0$

$$t_0(n,d)=t(2n,1,d,0)t(2n+1,1,d,0)=\frac{q^{2n+1}(1-q^{(n+1)+d})(q^d-q^n)}{(1+q^n)(1-q^{2n+1})^2(1+q^{n+1})}$$

Daraus folgt

$$\prod_{i=0}^{k-1}t_0(i,d)=q^{k^2}\frac{\left(q^{d+1};q\right)_k\prod_{j=0}^{k-1}(q^d-q^j)}{\left(q^k;q\right)_{k+1}\left(q^{k+1};q\right)_{k-1}}.$$

Daher gilt für die Hankeldeterminante

$$d_0(n,d)=q^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\left(q^{d+1};q\right)_k\prod_{j=0}^{k-1}(q^d-q^j)}{\left(q^k;q\right)_{k+1}\left(q^{k+1};q\right)_{k-1}}. \tag{3.9}$$

Für $d=m\in\mathbb{N}$ reduziert sich das auf

$$d_0(n,m)=\det\left(\begin{bmatrix}i+j+m\\m\end{bmatrix}\right)_{i,j=0}^{n-1}=(-1)^{\binom{n}{2}}q^{\frac{n(n-1)^2}{2}}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\begin{bmatrix}m+j\\2j\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}2j-1\\j\end{bmatrix}}. \tag{3.10}$$

Es ist klar, dass für $n>m+1$ die rechte Seite verschwindet. Das schaut auf den ersten Blick so aus, als ob unsere Ableitungen hier nicht anwendbar wären, weil die Grundvoraussetzung, dass alle Hankeldeterminanten $\neq 0$ sind, nicht erfüllt ist. Es ist jedoch klar, dass beide Seiten von (3.9) stetig von $d$ abhängen und dass daher der Grenzübergang für die Hankeldeterminanten korrekt ist, obwohl z.B. (1.8) nicht mehr gilt.
Wie schon eingangs erwähnt wurde Formel (3.10) schon von L. Carlitz ( Some determinants of q-binomial coefficients, J. reine angew. Math. 226 (1967), 216-220) bewiesen.
Weitergehende Resultate finden sich auch im Artikel "Advanced Determinant Calculus" von Christian Krattenthaler (http://www.mat.univie.ac.at/~slc/wpapers/s42kratt.html), speziell in Theorem 26.

### 3.3. Ein interessantes q-Analogon der zentralen Binomialkoeffizienten

Als nächstes Beispiel betrachten wir

$$c(n)=\frac{\left(q;q^2\right)_n}{\left(q^2;q^2\right)_n}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1-q^{2j-1}}{1-q^{2j}}=\begin{bmatrix}2n\\ n\end{bmatrix}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)^2}. \tag{3.11}$$

Hier ergibt sich aus (2.4), (2.2) und (2.3)

$t(0,q^2,q,q^2)=\frac{1}{1+q}$

und für $n>0$

$$t(2n,q^2,q,q^2)=\frac{q^{2n}(1-q^{2n+1})(1-q^{2n})}{(1-q^{4n})(1-q^{4n+2})}=\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})(1+q^{2n+1})}$$

$$t(2n+1,q^2,q,q^2)=\frac{q^{2(n+1)}(1-q^{2(n+1)})(q^{-1}-q^{2n})}{(1-q^{2(2n+1)})(1-q^{2(2n+2)})}=\frac{q^{2n+1}}{(1+q^{2n+1})(1+q^{2n+2})},$$

also

$$t(n)=\frac{q^n}{(1+q^n)(1+q^{n+1})} \tag{3.12}$$

für $n>0$.

Für die Hankeldeterminante ergibt sich

$$d(n)=\frac{q^{\binom{n}{3}}}{\prod_{j=1}^{n-1}(1+q^j)^{2n-2j-1}}. \tag{3.13}$$

Weiters ist

$$t_0(0,q^2,q,q^2)=\frac{q}{(1+q)^2(1+q^2)}$$

und für $n\geq 1$

$$t_0(n,q^2,q,q^2)=\frac{q^{4n+1}}{(1+q^{2n})(1+q^{2n+1})^2(1+q^{2n+2})}.$$

Das ergibt

$\prod_{i=0}^{k-1}t_0(i,q^2,q,q^2)=\frac{q^{2k^2-k}}{(1+q^{2k})\prod_{j=1}^{2k-1}(1+q^j)^2}$ und daher

$$d_0(n,0,q^2,q,q^2)=\prod_{k=0}^{n-1}\prod_{i=0}^{k-1}t(i,q^2,q,q^2)=q^{\frac{n(n-1)(4n-5)}{6}}\frac{1}{\prod_{j=1}^{2n-2}(1+q^j)^{2n-1-j}}. \qquad (3.14)$$

Aus (2.17) folgt

$$d_0(n,k,q^2,q,q^2)=q^{2k\binom{n}{2}}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\left(q^{2j+1};q^2\right)_n}{\left(q^{2n+2j};q^2\right)_n}d_0(n,0,q^2,q,q^2). \qquad (3.15)$$

Nun ist

$$\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\left(q^{2j+1};q^2\right)_n}{\left(q^{2n+2j};q^2\right)_n}=\prod_{j=0}^{k-1}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{[2j+2i+1]}{[2j+2i+2n]}=\prod_{j=0}^{k-1}\frac{[2j+2n]!}{[2][4]\cdots[4n+2j-2][1][3]\cdots[2j-1][2n+2j]}$$
$$=\prod_{j=0}^{k-1}\frac{[2n+2j-1]!}{[2n+j-1]![1][3]\cdots[2j-1](1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2n+j-1})}$$
$$=\prod_{j=0}^{k-1}\frac{[2n+j]\cdots[2n+2j-1]}{[1][3]\cdots[2j-1](1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2n+j-1})}$$

Das kann noch etwas vereinfacht werden:

$$\frac{[j+1][j+2]\ldots[2j]}{[1][3]\cdots[2j-1]}=\frac{[2][4]\cdots[2j][j+1][j+2]\ldots[2j]}{[2j]!}=(1+q)\cdots(1+q^j).$$

Daher ist

$$\prod_{j=0}^{k-1}\frac{[2n+j]\cdots[2n+2j-1]}{[1][3]\cdots[2j-1](1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2n+j-1})}=\prod_{j=0}^{k-1}\frac{[2n+j]\cdots[2n+2j-1](1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^j)}{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2n+j-1})[j+1]\cdots[2j]}$$
$$=\prod_{j=0}^{k-1}\frac{[2n+j]\cdots[2n+2j-1]}{(1+q^{j+1})(1+q^{j+2})\cdots(1+q^{2n+j-1})[j+1]\cdots[2j]}=\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\left(-q^{j+1};q\right)_{2n-1}}\prod_{i=1}^{j}\frac{[2n+j+i-1]}{[j+i]}.$$

Somit ergibt sich schließlich

$$d_0(n,k,q^2,q,q^2)=q^{2k\binom{n}{2}}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\left(-q^{j+1};q\right)_{2n-1}}\prod_{i=1}^{j}\frac{[2n+j+i-1]}{[j+i]}d_0(n,0,q^2,q,q^2). \qquad (3.16)$$

Für $q=1$ geht $d_0(n,0,q^2,q,q^2)$ in $\frac{1}{2^{\binom{2n-1}{2}}}$ über. Daher ergibt sich das wohlbekannte Resultat

$$\det\left(\binom{2i+2j}{i+j}\right)_{i,j=0}^{n}=2^{n-1}.$$

Allgemein ergibt sich aus (3.16)

$$\det\left(\binom{2i+2j+2k}{i+j+k}\right)_{i,j=0}^{n-1} = 2^{n-1+k}\prod_{j=0}^{k-1}\prod_{i=1}^{j}\frac{2n+j+i-1}{j+i}. \tag{3.17}$$

Setzt man $f(n,k) = 2^{n-1+k}\prod_{j=0}^{k-1}\prod_{i=1}^{j}\frac{2n+j+i-1}{j+i}$ und bildet die erzeugende Funktion

$F_k(x) = \sum_{n\geq 0} f(n,k)\left(\frac{x}{2}\right)^n,$

dann führen Computerexperimente zur Vermutung, dass für $k \geq 1$

$F_k(x) = \frac{p_k(x)}{(1-x)^{1+\binom{k}{2}}}$

ist, wobei $p_k(x)$ ein symmetrisches normiertes Polynom vom Grad $1+\binom{k-1}{2}$ mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Die ersten Werte sind

$p_1(x) = 1,\ p_2(x) = 1+x,\ p_3(x) = 1+6x+x^2,\ p_4(x) = 1+28x+70x^2+28x^3+x^4,$

$p_5(x) = 1+115x+1441x^2+4587x^3+4587x^4+1441x^5+115x^6+x^7, \cdots$

Wir können $\frac{(q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}$ auch in der Gestalt

$$\frac{(q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} = (-1)^n q^{n^2}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{bmatrix}_{q^2} \tag{3.18}$$

schreiben.

Aus der $q-$Vandermonde'schen Formel ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} q^k (-1)^k q^{k^2}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (-1)^{n-k} q^{(n-k)^2}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ n-k \end{bmatrix}_{q^2} = \left((-1)^n q^{n^2+n}\begin{bmatrix} -1 \\ n \end{bmatrix}_{q^2}\right) = 1.$$

Das bedeutet für die erzeugende Funktion

$$f(z) = \sum_n \frac{(q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} z^n = \sum_k (-1)^n q^{n^2}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{bmatrix}_{q^2} z^n \tag{3.19}$$

die Identität

$$f(z)\,f(qz)=\frac{1}{1-z}. \tag{3.20}$$

Für $q=1$ ist das äquivalent mit der Formel $\sum\binom{2n}{n}z^n=\frac{1}{\sqrt{1-4z}}$.

### 3.4 Die q-Catalanzahlen von George Andrews

Betrachten wir nun

$$c(n,q^4,q,q^2)=\frac{\left(q;q^2\right)_n}{\left(q^4;q^2\right)_n}=(-1)^n q^{n^2}(1+q)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ n+1\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Für $q\to 1$ strebt $c(n)\to\frac{C_n}{4^n}$, wobei $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ die Catalanzahlen sind.

Im klassischen Fall spielt die Folge $\left(1,0,1,0,2,0,5,0,14,0,\cdots\right)$, wo die Catalanzahlen nur an geraden Stellen auftreten, eine große Rolle.
Wir betrachten daher wieder die Folge $\left(a(n)\right)$ mit $a(2n)=c(n), a(2n+1)=0.$
Hier ergibt sich für alle $n\in\mathbb{N}$

$$t(n)=\frac{q^n}{(1+q^{n+1})(1+q^{n+2})}. \tag{3.21}$$

Die Hankeldeterminante ergibt sich zu

$$d(n,0,q^4,q,q^2)=\frac{q^{\binom{n}{3}}}{(1+q)^{n-1}\prod_{j=0}^{n-2}(1+q^{n-j})^{2j+1}}.$$

Für die Hankeldeterminanten von $\left(c(n)\right)$ ergibt sich

$$d_0(n,0,q^4,q,q^2)=\frac{q^{\frac{n(n-1)(4n-5)}{6}}}{(1+q)^{n-1}\prod_{j=0}^{2n-3}(1+q^{j+2})^{2n-2-j}}. \tag{3.22}$$

Aus (2.17) folgt

$$d_0(n,k,q^4,q,q^2)=q^{2k\binom{n}{2}}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\left(q^{2j+1};q^2\right)_n}{\left(q^{2n+2j+2};q^2\right)_n}d_0(n,0,q^4,q,q^2). \tag{3.23}$$

Genau so wie im letzten Abschnitt ergibt sich hier

$$d_0(n,k,q^4,q,q^2)=q^{2k\binom{n}{2}}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\left(-q^{j+1};q\right)_{2n}}\prod_{i=1}^{j}\frac{[2n+j+i]}{[j+i]}d_0(n,0,q^4,q,q^2). \tag{3.24}$$

Speziell ist

$$d_0(n,1,q^4,q,q^2)=\frac{q^{\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}}}{(1+q)^n\prod_{j=0}^{2n-2}(1+q^{j+2})^{2n-1-j}}. \tag{3.25}$$

Setzt man

$$C_n(q)=(2q)^{2n}\frac{\left(q;q^2\right)_n}{\left(q^4;q^2\right)_n}=(-1)^n q^{n^2}(2q)^{2n}(1+q)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ n+1\end{bmatrix}_{q^2}=\frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix}2n\\ n\end{bmatrix}\frac{1+q}{1+q^{n+1}}\frac{(2q)^{2n}}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)^2},$$

so erhält man ein $q-$Analogon der Catalanzahlen, welches zuerst von George Andrews (J. Comb. Th. A 44, 267-273 (1987) ) betrachtet wurde.

Für $q=1$ folgt aus (3.22)

$$\det\left(\frac{C_{i+j}}{4^{i+j}}\right)_{i,j=0}^{n-1}=\frac{1}{4^{n^2-n}}$$

und daher das wohlbekannte Resultat $\det\left(C_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}=1.$

Analog folgt aus (3.24)

$$\det\left(\frac{C_{i+j+k}}{4^{i+j+k}}\right)_{i,j=0}^{n-1}=\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1}{4^n}\prod_{i=1}^{j}\frac{2n+j+i}{j+i}=\frac{1}{4^{nk}}\prod_{j=1}^{k-1}\prod_{i=1}^{j}\frac{2n+j+i}{j+i}\det\left(\frac{C_{i+j}}{4^{i+j}}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

Daraus ergibt sich schließlich das ebenfalls bekannte Resultat (C. Krattenthaler, Advanced determinant calculus: A complement, http://www.mat.univie.ac.at/~kratt/artikel/detcomp.html, Theorem 33)

$$\det\left(C_{i+j+k}\right)_{i,j=0}^{n-1}=\prod_{j=1}^{k-1}\prod_{i=1}^{j}\frac{2n+j+i}{j+i}. \tag{3.26}$$

Setzt man $g(n,k)=\prod_{j=1}^{k-1}\prod_{i=1}^{j}\frac{2n+j+i}{j+i}$ und bildet $G_k(x)=\sum_{n\geq 0} g(n,k)x^n$,
dann ergibt sich analog wie vorhin die Vermutung, dass

$$G_k(x)=\frac{r_k(x)}{(1-x)^{1+\binom{k}{2}}}$$

ist, wobei $r_k(x)$ ein symmetrisches normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten vom Grad $\binom{k-1}{2}$ ist. Die Folge beginnt mit

$$\left(r_k(x)\right)_{k\geq 1}=\left(1,1,1+x,1+7x+7x^2+x^3,1+31x+187x^2+330x^3+187x^4+31x^5+x^6,\cdots\right).$$

Aus der $q-$Vandermonde'schen Formel ergibt sich in diesem Fall

$$\sum_{k=0}^{n} q^k q^{k^2-k}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ k\end{bmatrix}_{q^2} q^{(n-k)^2-(n-k)}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ n-k\end{bmatrix}_{q^2}=q^{n^2-n}\begin{bmatrix}1\\ n\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Definiert man

$$h(z)=\sum_k q^{n^2-n}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{bmatrix}_{q^2} z^n, \tag{3.27}$$

so gilt also

$$h(z)h(qz)=1+z. \tag{3.28}$$

Für die erzeugende Funktion $f(z)=\sum_n C_n(q)z^n$ dieser $q-$Catalanzahlen ergibt sich

$$f(z)=-\frac{1+q}{4qz}\sum_{n\geq 0} q^{(n+1)^2-(n+1)}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ n+1\end{bmatrix}\left(-4qz\right)^{n+1}=\frac{1+q}{4qz}\left(1-h(-4qz)\right). \tag{3.29}$$

Für $q=1$ reduziert sich das auf die Formel $\sum_{n\geq 0} C_n z^n=\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$.

Aus

$$\left(1-\frac{4qz}{1+q}f(z)\right)\left(1-\frac{4q^2z}{1+q}f(qz)\right)=1-4qz$$

ergibt sich

$$\frac{f(z)+f(qz)}{1+q}=1+\frac{4q^2}{(1+q)^2}zf(z)f(qz). \tag{3.30}$$

Koeffizientenvergleich gibt ein Analogon der bekannten Rekursionsformel für die Catalanzahlen

$$C_n(q)=\frac{4q^2}{(1+q)(1+q^{n+1})}\sum_{k=0}^{n-1}q^k C_k(q)C_{n-k-1}(q)$$

mit $C_0(q)=1.$

## 4. Einige interessante Identitäten

In „Mathematische Randbemerkungen 7" habe ich einige bekannte Identitäten für Catalanzahlen und verwandte Zahlenfolgen gesammelt.
Ich möchte hier nur einige wiederholen. Sei $a(2n,0)=C_n$, $a(2n+1,0)=0$ und $(a(n,k))$ die zugehörige Matrix. Dann sind alle entsprechenden $t(n)=1.$

Es ist dann $a(2n,2k)=\frac{2k+1}{n+k+1}\binom{2n}{n-k}$ und $a(2n+1,2k+1)=\frac{2k+2}{n+k+2}\binom{2n+1}{n-k}.$

Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a(2n,2k)=[n=0], \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}a(2n,2k)=\binom{2n}{n}, \tag{4.2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a(2n+1,2k+1)=C_n \tag{4.3}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n}a(2n+1,2k+1)=\binom{2n+1}{n}. \tag{4.4}$$

Wir wollen nun diese Identitäten auf die hier betrachtete Situation übertragen.

Als Verallgemeinerung von (4.2) zeigen wir

$$\sum_{k=0}^{n}a(2n,2k,a,b,q)\prod_{j=0}^{k-1}t(2j,a,b,q)=\frac{(b;q)_n(-1;q)_n}{(a;q^2)_n}. \tag{4.5}$$

oder etwas allgemeiner

$$\sum_{j=0}^{n}a(2n,2j,a,b,q)\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}\tau(j-k,q^{2k}a,q^k b,q)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{(q^k b;q)_{n-k}(-1;q)_{n-k}}{(q^{2k}a;q^2)_{n-k}}. \tag{4.6}$$

Das bedeutet konkret

$$\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\frac{\left(q^{j}b;q\right)_{n-j}}{\left(q^{2j}a;q\right)_{n-j}}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}q^{\binom{j-k}{2}}\frac{\left(q^{k}b;q\right)_{j-k}}{\left(q^{j+k-1}a;q\right)_{j-k}}=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{\left(q^{k}b;q\right)_{n-k}\left(-1;q\right)_{n-k}}{\left(q^{2k}a;q^{2}\right)_{n-k}}$$

und reduziert sich auf

$$\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n-k \\ j-k \end{bmatrix}\frac{q^{\binom{j-k}{2}}}{\left(q^{2j}a;q\right)_{n-j}\left(q^{j+k-1}a;q\right)_{j-k}}=\frac{\left(-1;q\right)_{n-k}}{\left(q^{2k}a;q^{2}\right)_{n-k}}$$

oder wenn man $n \to n+k$ und $j-k=\ell$ setzt

$$\sum_{\ell=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix}\frac{q^{\binom{\ell}{2}}\left(1-q^{2k+2\ell-1}a\right)}{\left(q^{\ell+2k-1}a;q\right)_{n+1}}=\frac{\left(-1;q\right)_{n}}{\left(q^{2k}a;q^{2}\right)_{n}}.$$

Ersetzt man schließlich $q^{2k-1}a$ durch $a$, so sieht man, dass (4.6) äquivalent mit der Identität

$$\sum_{k=0}^{n}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{(1-q^{2k}a)}{\left(q^{k}a;q\right)_{n+1}}=\frac{\left(-1;q\right)_{n}}{\left(qa;q^{2}\right)_{n}} \tag{4.7}$$

ist.

Die Formel (4.7) kann mit Hilfe des Zeilbergeralgorithmus leicht bewiesen werden. Z.B. liefert qZeil

```
qZeil[q^Binomial[k, 2] qBinomial[n, k, q]
  (1 - a q^(2 k)) / qPochhammer[q^k a, q, n + 1] qPochhammer[q a, q^2, n],
 {k, 0, n}, n, 1]
SUM[n] == (1 + q^(-1+n)) SUM[-1 + n]
```

Ich möchte noch zwei andere Beweise geben:
a) Sei $\varepsilon$ der lineare Operator auf den formalen Potenzreihen, der durch $\varepsilon f(x)=f(qx)$ definiert ist. Aus $\left(-x;q\right)_{n}=\sum_{k=0}^{n}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^{k}$ folgt

$$\sum_{k=0}^{n}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{1}{\left(q^{k}x;q\right)_{n+1}}=\left(-\varepsilon;q\right)_{n}\frac{1}{\left(x;q\right)_{n+1}}=\left(-\varepsilon;q\right)_{n}\sum_{k}\begin{bmatrix} n+k \\ n \end{bmatrix}x^{k}$$

$$=\left(-q;q\right)_{n}\sum_{k}\frac{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})\cdots(1-q^{k+n})}{\left(q^{2};q^{2}\right)_{n}}\left(-\varepsilon;q\right)_{n}x^{k}$$

$$=\left(-q;q\right)_{n-1}\sum_{k}\frac{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})\cdots(1-q^{k+n})}{\left(q^{2};q^{2}\right)_{n-1}(1-q^{n})}(1+q^{k})(1+q^{k+1})\cdots(1+q^{k+n-1})x^{k}$$

$$=\left(-q;q\right)_{n-1}\sum_{k}\begin{bmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_{q^{2}}\frac{(1+q^{k})(1-q^{k+n})}{1-q^{n}}x^{k}.$$

Genau so ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{2k}x}{\left(q^k x;q\right)_{n+1}} = \left(-q\varepsilon;q\right)_n \frac{x}{\left(x;q\right)_{n+1}} = \left(-q\varepsilon;q\right)_n \sum_k \begin{bmatrix} n+k \\ n \end{bmatrix} x^{k+1}$$

$$= \left(-q;q\right)_n \sum_k \frac{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})\cdots(1-q^{k+n})}{\left(q^2;q^2\right)_n} \left(-q\varepsilon;q\right)_n x^{k+1}$$

$$= \left(-q;q\right)_{n-1} \sum_k \frac{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})\cdots(1-q^{k+n})}{\left(q^2;q^2\right)_{n-1}(1-q^n)} (1+q^{k+2})(1+q^{k+3})\cdots(1+q^{k+n+1}) x^{k+1}$$

$$= \left(-q;q\right)_{n-1} \sum_k \begin{bmatrix} n+k \\ n-1 \end{bmatrix}_{q^2} \frac{(1-q^{k+1})(1+q^{k+n+1})}{1-q^n} x^{k+1} = \left(-q;q\right)_{n-1} \sum_k \begin{bmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_{q^2} \frac{(1-q^k)(1+q^{k+n})}{1-q^n} x^k.$$

Schließlich erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{(1-q^{2k}x)}{\left(q^k x;q\right)_{n+1}} = \left(-q;q\right)_{n-1} \sum_k \begin{bmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_{q^2} \left( \frac{(1+q^k)(1-q^{k+n})}{1-q^n} - \frac{(1-q^k)(1+q^{k+n})}{1-q^n} \right) x^k$$

$$= \left(-q;q\right)_{n-1} \sum_k \begin{bmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_{q^2} \frac{2q^k(1-q^n)}{1-q^n} x^k = \left(-1;q\right)_{n-1} \sum_k \begin{bmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_{q^2} (qx)^k$$

und somit (4.7).

b) Der zweite Beweis verwendet eine Idee von Victor J. W. Guo und Jiang Zeng (Short proofs of summation and transformation formulas for basic hypergeometric series, arXiv:math. CO/0512571 )

Sei

$$F_{n,k}(a) = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{(1-q^{2k}a)}{\left(q^k a;q\right)_{n+1}}. \tag{4.8}$$

Dann folgt aus der trivialen Relation

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(1-q^n a) = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}(1-q^{n+k}a) + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}(1-q^k a)q^{n-k},$$

dass

$$F_{n,k}(a) = \frac{F_{n-1,k}(a)}{1-q^n a} + q^{n-1} \frac{F_{n-1,k-1}(q^2 a)}{1-q^n a} \tag{4.9}$$

gilt.

Denn man verifiziert sofort, dass

$$q^{n-1} F_{n-1,k-1}(q^2 a) = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} (1-q^k a) q^{n-k} \frac{(1-q^{2k}a)}{\left(q^k a;q\right)_{n+1}}$$

gilt.

Für die rechte Seite gilt dieselbe Rekursion

$$\frac{(-1;q)_n}{(qa;q^2)_n} = \frac{1}{1-q^n a} \frac{(-1;q)_{n-1}}{(qa;q^2)_{n-1}} + \frac{q^{n-1}}{1-q^n a} \frac{(-1;q)_{n-1}}{(q^3 a;q^2)_{n-1}},$$

denn sie reduziert sich auf
$(1+q^{n-1})(1-q^n a)=1-q^{2n-1}a+q^{n-1}(1-qa)$.
Da (4.7) für $n=0$ trivialerweise erfüllt ist, ist alles bewiesen.

Für $n\to\infty$ ergibt sich aus (4.7)

$$\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}(1-q^{2k}a)=(-1;q)_\infty \left(a;q^2\right)_\infty .$$

Beachtet man die Euler'sche Identität $\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}=(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots$,
so reduziert sich diese Identität für $a=q^{2m+1}$ auf

$$\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} \frac{\left(q^{2m+1};q\right)_k}{(q;q)_k}(1-q^{2k+2m+1})=2\left(q;q^2\right)_m .$$

Michael Schlosser hat mir mitgeteilt, dass sich die Formel (4.7) auch als Spezialfall der terminierenden ${}_6\phi_5-$Summationsformel ergibt.

Als Spezialfall ergibt sich im Fall der Andrews'schen $q-$Catalanzahlen

$$a(2n,2k,q^4,q,q^2)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \frac{\left(q^{2k+1};q^2\right)_{n-k}}{\left(q^{4k+4};q^2\right)_{n-k}}=\frac{[2k+1]}{[n+k+1]}\begin{bmatrix} 2n \\ n-k \end{bmatrix}\frac{1+q^{2k+1}}{1+q^{n+k+1}}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n-k}(1+q^j)(1+q^{2k+j})} \tag{4.10}$$

und

$$\prod_{j=0}^{k-1} t(2j,q^4,q,q^2)=\frac{q^{k^2-k}}{(-q;q)_{2k}}.$$

Daher gilt die folgende Darstellung, welche die Analogie zum Fall $q=1$ besonders deutlich zeigt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} a(2n,2k,q^4,q,q^2)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j,q^4,q,q^2)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{[2k+1]}{[n+k+1]}\begin{bmatrix} 2n \\ n-k \end{bmatrix}\frac{1+q^{2k+1}}{1+q^{n+k+1}}\frac{q^{k^2-k}}{(-q;q)_{n-k}(-q;q)_{n+k}}\\
&=\frac{2}{1+q^{2n}}\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)^2}=\frac{2}{1+q^{2n}}a(2n,0,q^2,q,q^2).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.11) ist ein schönes Analogon von (4.2), da rechts das $q-$Analogon der zentralen Binomialkoeffizienten steht.

Für diese ergibt sich eine ähnliche Formel. Es gilt

$$a(2n,2k,q^2,q,q^2)=\begin{bmatrix}2n\\n-k\end{bmatrix}\frac{(-q;q)_{2k}}{(-q;q)_{n-k}(-q;q)_{n+k}}$$

und

$$\prod_{j=0}^{k-1}t(2j,q^2,q,q^2)=\frac{q^{2\binom{k}{2}}}{(-q;q)_{2k-1}}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=0}^{n}a(2n,2k,q^2,q,q^2)\prod_{j=0}^{k-1}t(2j,q^2,q,q^2)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}2n\\n-k\end{bmatrix}\frac{(-q;q)_{2k}}{(-q;q)_{n-k}(-q;q)_{n+k}}\frac{q^{2\binom{k}{2}}}{(-q;q)_{2k-1}}$$
$$=\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}\frac{1}{(-q;q)_n(-q;q)_n}+\sum_{k=1}^{n}q^{2\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}2n\\n-k\end{bmatrix}\frac{(1+q^{2k})}{(-q;q)_{n-k}(-q;q)_{n+k}}=\frac{(-1;q^2)_n}{(-q;q^2)_n}=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1+q^{2j}}{1+q^{2j+1}}. \tag{4.12}$$

Im Fall $q=1$ reduzieren sich die Werte auf $a(2n,2k)=\binom{2n}{n-k}\frac{1}{4^{n-k}}$ und $\prod_{j=0}^{k-1}t(2j)=\frac{2}{4^k}$.
Die Formel (4.12) wird dann
$$\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n-k}\frac{2}{4^n}=\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^n}\left(4^n-\binom{2n}{n}\right)=1.$$

Die rechte Seite von (4.12) ist ein $q-$Analogon der konstanten Folge $a(n)=1$,
Sie entspricht den Parameterwerten $(a,b,q)=(-q,-1,q^2)$.
Wenn wir die entsprechenden $a(n,k)$ betrachten, so ergibt sich
$a(2n,2k,-q,-1,q^2)=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q^2}\frac{(-q^{2k};q^2)_{n-k}}{(-q^{4k+1};q^2)_{n-k}}$. Das ist ein $q-$Analogon von $\binom{n}{k}$.
Hier ist $\prod_{j=0}^{k-1}t(2j,-q,-1,q^2)=q^{k^2-k}\frac{(-1;q^2)_k}{(-q^{2k-1};q^2)_k}$ wieder ein $q-$Analogon von 1.
In diesem Fall ist daher
$\sum_{k=0}^{n}a(2n,2k,-q,-1,q^2)\prod_{j=0}^{k-1}t(2j,-q,-1,q^2)$ ein $q-$Analogon von $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.
Dieses lautet

$$\sum_{k=0}^{n} q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \frac{\left(-q^{2k};q^2\right)_{n-k}}{\left(-q^{4k+1};q^2\right)_{n-k}} \frac{\left(-1;q^2\right)_k}{\left(-q^{2k-1};q^2\right)_k} = \sum_{k=0}^{n} q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \frac{1}{\left(-q^{4k+1};q^2\right)_{n-k}} \frac{\left(-1;q^2\right)_n}{\left(-q^{2k-1};q^2\right)_k}$$
$$= \frac{\left(-1;q^2\right)_n \left(-1;q^2\right)_n}{\left(-q;q^4\right)_n}.$$

Das reduziert sich auf die einfachere Identität

$$\sum_{k=0}^{n} q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \frac{1+q^{4k-1}}{\left(-q^{2k-1};q^2\right)_{n+1}} = \frac{\left(-1;q^2\right)_n}{\left(-q;q^4\right)_n}, \tag{4.13}$$

die wiederum eine direkte Folge von (4.7) ist.

Wir wissen bereits, dass

$$a(2n+1,2k+1,a,b,q)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j+1,a,b,q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{\left(q^{k+1}b;q\right)_{n-k}}{\left(q^{2k+1}a;q\right)_{n-k}} q^{\binom{k}{2}} \frac{(q;q)_k}{(a;q)_{2k}} \prod_{j=0}^{k-1} (b-q^j a)$$

gilt.

Aus
(1.17) folgt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a(2n+1,2k+1,a,b,q)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j+1,a,b,q) = t(0,a,b,q)a(2n-1,1,a,b,q) = \frac{(b;q)_n}{(a;q)_n}. \tag{4.14}$$

Dagegen scheint

$$\sum_{k=0}^{n} a(2n+1,2k+1,qa,qb,q)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j+1,qa,qb,q)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{\left(q^{k+2}b;q\right)_{n-k}}{\left(q^{2k+2}a;q\right)_{n-k}} q^{\binom{k+1}{2}} \frac{(q;q)_k}{(qa;q)_{2k}} \prod_{j=0}^{k-1} (b-q^j a)$$

bei beliebigem $b$ nur für $a=1$ ein schönes Resultat zu liefern.

Es gilt dann

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{\left(q^{k+2}b;q\right)_{n-k}}{\left(q^{2k+2};q\right)_{n-k}} q^{\binom{k+1}{2}} \frac{(q;q)_k}{(q;q)_{2k}} \prod_{j=0}^{k-1} (b-q^j)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1-q^{2k+1}}{\left(q^{k+1};q\right)_{n+1}} \left(q^{k+2}b;q\right)_{n-k} \prod_{j=0}^{k-1} (b-q^j) = \frac{(-bq;q)_n}{(-q;q)_n}. \tag{4.15}$$

Die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1-q^{2k+1}}{\left(q^{k+1};q\right)_{n+1}} \left(q^{k+2}b;q\right)_{n-k} \prod_{j=0}^{k-1} (b-q^j) = \frac{\left(-bq;q\right)_n}{\left(-q;q\right)_n}. \tag{4.16}$$

lässt sich wieder sehr einfach mit qZeil beweisen. Wir erhalten

```
qZeil[q^Binomial[k + 1, 2] qBinomial[n, k, q]
  qPochhammer[q^(k + 2) b, q, n - k] qPochhammer[q, q, k] (1 - q^(2 k + 1))
  b^k qPochhammer[1 / b, q, k] / qPochhammer[q , q, n + k + 1] , {k, 0, n},
 n, 1]
```

$$\mathrm{SUM}[n] == \frac{(1 + b\, q^n)\ \mathrm{SUM}[-1 + n]}{1 + q^n}$$

Als Zertifikat ergibt sich

$$\mathbf{c[n,\ k] = -\frac{q^{-k+n}\ (-b + q^k)\ (-1 + q^{1+k})\ (1 + q^{1+k})\ (-q^k + q^n)}{(-1 + q^{1+2\,k})\ (-1 + q^n)\ (1 + q^n)\ (-1 + b\, q^{1+n})}}$$

Um sich davon zu überzeugen, dass das wirklich stimmt, muss man nur nachrechnen, dass

$$1-\frac{1+bq^n}{1+q^n}\frac{f(n-1,k)}{f(n,k)} = c(n,k) - c(n,k-1)\frac{f(n,k-1)}{f(n,k)}$$

ist, wenn $f(n,k) = q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1-q^{2k+1}}{\left(q^{k+1};q\right)_{n+1}} \left(q^{k+2}b;q\right)_{n-k} \prod_{j=0}^{k-1} (b-q^j)$ bedeutet.

Setzt man

$$\begin{aligned} w(n,k,a,b,q) &= a(2n+1,2k+1,qa,qb,q)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j+1,qa,qb,q) \\ &= q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{\left(q^{k+2}b;q\right)_{n-k} \left(q;q\right)_k}{\left(qa;q\right)_{n+k+1}} (1-q^{2k+1}a)\prod_{j=0}^{k-1} (b-q^j a), \end{aligned} \tag{4.17}$$

dann ist (4.14) äquivalent mit

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k w(n,k,a,b,q) = \frac{\left(qb;q\right)_n}{\left(qa;q\right)_n}. \tag{4.18}$$

Im Fall der zentralen $q-$Binomialkoeffizienten ist

$$a(2n+1,2k+1,q^2,q,q^2) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \frac{\left(q^{2k+3};q^2\right)_{n-k}}{\left(q^{4k+4};q^2\right)_{n-k}} = \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-k \end{bmatrix} \frac{\left(-q;q\right)_{2k+1}}{\left(-q;q\right)_{n-k}\left(-q;q\right)_{n+k+1}}$$

und

$$\prod_{j=0}^{k-1} t(2j+1,q^2,q,q^2) = \frac{q^{k^2}}{(-q;q)_{2k}}.$$

Hier ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} a(2n+1,2k+1)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j+1) = \sum_{k=0}^{n} q^{k^2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-k \end{bmatrix} \frac{(1+q^{2k+1})}{(-q;q)_{n-k}(-q;q)_{n+k+1}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1+q^{2j-1}}{1+q^{2j}} \tag{4.19}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a(2n+1,2k+1)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j+1) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{k^2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-k \end{bmatrix} \frac{(1+q^{2k+1})}{(-q;q)_{n-k}(-q;q)_{n+k+1}} \\ &= \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{(-q;q)_{n-1}(-q;q)_n}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Lässt man in (4.19) $n \to \infty$ gehen, so ergibt sich

$$\sum_{k \geq 0} q^{k^2}(1+q^{2k+1}) = \frac{(-q;q^2)_\infty (q;q)_\infty (-q;q)_\infty^2}{(-q^2;q^2)_\infty} = (q;q)_\infty (-q;q)_\infty (-q;q^2)_\infty \frac{(-q;q)_\infty}{(-q^2;q^2)_\infty}$$

und daher die Gauß'sche Formel

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{k^2} = (-q;q^2)_\infty^2 (q^2;q^2)_\infty.$$

Für die $q-$Catalanzahlen erhalten wir

$$\begin{aligned} a(2n+1,2k+1,q^4,q,q^2) &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \frac{(q^{2k+3};q^2)_{n-k}}{(q^{4k+6};q^2)_{n-k}} \\ &= \frac{[2k+2]}{[n+k+2]} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-k \end{bmatrix} \frac{1+q^{2k+2}}{1+q^{n+k+2}} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-k}(1+q^j)(1+q^{2k+j+1})} \end{aligned} \tag{4.21}$$

und $\prod_{j=0}^{k-1} t(2j+1,q^4,q,q^2) = q^{k^2} \dfrac{1+q}{(-q;q)_{2k+1}}.$

Hier ergibt sich das $q-$Analogon von (4.4)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} a(2n+1,2k+1,q^4,q,q^2)\prod_{j=0}^{k-1} t(2j+1,q^4,q,q^2) \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^{k^2} \frac{[2k+2]}{[n+k+2]} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-k \end{bmatrix} \frac{(1+q^{2k+2})}{(-q^2;q)_{n-k}(-q;q)_{n+k+2}} \\ &== \frac{1+q^{n+1}}{1+q^{2n+1}} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{\prod_{j=2}^{n+1}(1+q^j)^2}. \end{aligned}$$

Weiters ist in Analogie zu (4.3)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a(2n+1,2k+1,q^4,q,q^2)\prod_{j=0}^{k-1}t(2j+1,q^4,q,q^2)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{k^2}\frac{[2k+2]}{[n+k+2]}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-k\end{bmatrix}\frac{(1+q^{2k+2})}{(1+q^{n+k+2})(-q;q)_{n-k}\left(-q^{2k+2};q\right)_{n-k}\left(-q^2;q\right)_{2k}}$$

$$=\frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix}2n\\ n\end{bmatrix}\frac{1}{(-q;q)_n\left(-q^2;q\right)_n}.$$

Im Fall $a\neq 1$ habe ich außer dem eben betrachteten nur ein paar weitere spezielle Fälle mit schönen Summen gefunden. Jeder davon kann mit qZeil automatisch bewiesen werden.

Betrachten wir zunächst für positive ganze Zahlen $m$

$$w(n,k,q^{m-1},q^{-1},q)=q^{\binom{k}{2}}\frac{\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}n+m+k\\ n\end{bmatrix}}\frac{1-q^{2k+m}}{1-q^{k+m}}.$$

Hier ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n}q^{\binom{k}{2}}\frac{\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}n+m+k\\ n\end{bmatrix}}\frac{1-q^{2k+m}}{1-q^{k+m}}=\frac{2}{1+q^n}\frac{\left(q^2;q^2\right)_n}{\left(q^{m+1};q^2\right)_n}. \tag{4.22}$$

Für $n\to\infty$ ergibt sich daraus

$$\sum_{k\geq 0}q^{\binom{k}{2}}\left(q^{k+1};q\right)_{m-1}(1-q^{2k+m})=2\frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty}{\left(q^{m+1};q^2\right)_\infty}.$$

Eine weitere geschlossene Summation ist auch $\sum_{k=0}^{n}w(n,k,q^2,q^{-3},q^4)=\frac{(1+q)}{\left(1+q^{4n+1}\right)}\frac{\left(q^5;q^4\right)_n}{\left(q^6;q^4\right)_n}.$

Michael Schlosser hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass Formel (4.16) aus der terminierenden ${}_6\phi_5$ – Summationsformel

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-q^{2k}a)}{(1-a)}\frac{(a;q)_k(b;q)_k(c;q)_k\left(q^{-n};q\right)_k}{(q;q)_k(aq/b;q)_k(aq/c;q)_k\left(aq^{1+n};q\right)_k}\left(\frac{aq^{1+n}}{bc}\right)^k=\frac{(aq;q)_n(aq/bc;q)_n}{(aq/b;q)_n(aq/c;q)_n}$$

(vgl. G. Gasper- M. Rahman, Basic hypergeometric series, Second Edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 96, Cambridge University Press 2004, Appendix II, (II.21)) folgt.

Dazu definiere man wie oben

$$w(n,k,a,b,q)=q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(1-aq^{2k+1})\frac{\left(q^{k+2}b;q\right)_{n-k}\left(q;q\right)_k}{\left(aq;q\right)_{n+k+1}}\prod_{j=0}^{k-1}(b-aq^j)$$

$$=\frac{\left(q^2b;q\right)_n}{\left(q^2a;q\right)_n}\frac{(1-aq^{1+2k})}{(1-aq)}\frac{\left(a/b;q\right)_k\left(q^{-n};q\right)_k}{\left(q^2b;q\right)_k\left(q^{n+2}a;q\right)_k}\left(-bq^{1+n}\right)^k$$

und außerdem

$$v(k,a,c,q)=\frac{\left(qa;q\right)_k\left(c;q\right)_k}{\left(q;q\right)_k\left(aq^2/c;q\right)_k}\left(-\frac{q}{c}\right)^k.$$

Aus der terminierenden ${}_6\phi_5$ – Summationsformel folgt dann

$$\sum_{k=0}^{n}w(n,k,a,b,q)v(k,a,c,q)=\frac{\left(q^2b;q\right)_n\left(q^2a;q\right)_n\left(q^2b/c;q\right)_n}{\left(q^2a;q\right)_n\left(q^2b;q\right)_n\left(q^2a/c;q\right)_n}=\frac{\left(q^2b/c;q\right)_n}{\left(q^2a/c;q\right)_n}. \qquad (4.23)$$

Die betrachteten Spezialfälle ergeben sich daraus aus den folgenden leicht zu verifizierenden Identitäten:

$$v(k,a,q,q)=(-1)^k,$$
$$v(k,1,-q,q)=1,$$
$$w(n,k,q^2,q^{-1},q^2)=\frac{\left(q^3;q^2\right)_n}{\left(q^4;q^2\right)_n}w(n,k,q^2,1,q^2)v(k,q^2,-q^3,q^2),$$

$$w(n,k,q^2,q^{-3},q^4)=\frac{\left(q^5;q^4\right)_n}{\left(q^6;q^4\right)_n}w(n,k,q^2,q^{-2},q^4)v(k,q^2,-q^5,q^4)$$

und

$$w(n,k,a^2,q^{-2},q^2)=\frac{\left(q^2;q^2\right)_n}{\left(aq^2;q^2\right)_n}w(n,k,a^2,aq^{-2},q^2)v(k,a^2,-aq^2,q^2).$$

Aus (4.23) ergibt sich dann

$$\sum_{k=0}^{n}w(n,k,a,b,q)(-1)^k=\frac{\left(bq;q\right)_n}{\left(aq;q\right)_n},$$
$$\sum_{k=0}^{n}w(n,k,1,b,q)=\frac{\left(-bq;q\right)_n}{\left(-q;q\right)_n},$$
$$\sum_{k=0}^{n}w(n,k,q^2,q^{-1},q^2)=\frac{\left(q^3;q^2\right)_n}{\left(q^4;q^2\right)_n}\frac{\left(-q;q^2\right)_n}{\left(-q^3;q^2\right)_n}=\frac{(1+q)}{(1+q^{1+2n})}\frac{\left(q^3;q^2\right)_n}{\left(q^4;q^2\right)_n},$$
$$\sum_{k=0}^{n}w(n,k,q^2,q^{-3},q^4)=\frac{\left(q^5;q^4\right)_n}{\left(q^6;q^4\right)_n}\frac{\left(-q;q^4\right)_n}{\left(-q^5;q^4\right)_n}=\frac{(1+q)}{(1+q^{1+4n})}\frac{\left(q^5;q^4\right)_n}{\left(q^6;q^4\right)_n}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n}w(n,k,a^2,q^{-2},q^2)=\frac{\left(q^2;q^2\right)_n}{\left(aq^2;q^2\right)_n}\frac{\left(-1;q^2\right)_n}{\left(-aq^2;q^2\right)_n}=\frac{2}{(1+q^{2n})}\frac{\left(q^4;q^4\right)_n}{\left(a^2q^4;q^4\right)_n}.$$