

## Mathematische Randbemerkungen 5: Die Tripelproduktidentität von Jacobi

Die Tripelproduktidentität von Jacobi besagt, dass

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n z) \left(1 + \frac{q^{n-1}}{z}\right) (1 - q^n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k+1}{2}} z^k \quad (1)$$

bzw.

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n z) \left(1 + \frac{q^{n-1}}{z}\right) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k+1}{2}} z^k \quad (2)$$

gilt.

Dieses grundlegende Resultat aus der Theorie der Theta-Funktionen wurde unabhängig von einander von C.G. Jacobi und C.F. Gauß gefunden. Die Reihen und Produkte konvergieren für  $|q| < 1$  und  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Da wir uns hier nicht für Fragen der Analysis interessieren, fassen wir  $z$  und  $q$  nicht als reelle oder komplexe Zahlen sondern als Unbestimmte auf.

Ich habe die einfachsten Beweise der Tatsache, dass die Koeffizienten von  $z^k$  auf beiden Seiten von (2) übereinstimmen, gesammelt und möchte im Folgenden eine hoffentlich gut verständliche Version dieser wohlbekanntem Resultate bringen.

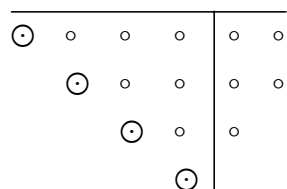
Ein oft verwendeter Ausgangspunkt ist der  $q$ -binomische Lehrsatz in der Form

$$(1 + qx)(1 + q^2 x) \cdots (1 + q^N x) = \sum_{k \geq 0} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} x^k. \quad (3)$$

Dieser kann folgendermaßen kombinatorisch gedeutet werden:

Jeder Term von (3), der  $x^k$  enthält, entsteht beim Ausmultiplizieren der linken Seite, indem man in genau  $k$  Faktoren den Term, der  $x$  enthält, auswählt. Das ergibt eine Summe von Termen der Gestalt  $q^{a_1} x q^{a_2} x \cdots q^{a_k} x$  mit  $N \geq a_1 > a_2 > \cdots > a_k \geq 1$ .

Um ein anschauliches Bild der Situation zu erhalten, modifizieren wir das Ferrer-Diagramm der Partition  $\{a_1, \dots, a_k\}$  von  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ , indem wir die erste Zeile um  $k$  Einheiten, die zweite um  $k-1$  Einheiten und schließlich die  $k$ -te Zeile um 1 Einheit nach links verschieben. Außerdem markieren wir das erste Element jeder Zeile. Wenn etwa  $k = 4$  und  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{6, 5, 3, 1\}$  ist, erhalten wir das Diagramm



Die markierten Elemente, also die ersten Elemente jeder Zeile, bilden eine Diagonale in Richtung SO. Der linke Teil des Diagramms enthält  $\binom{k+1}{2}$  Elemente und der rechte Teil ist eine Partition  $\lambda = \{a_1 - k, a_2 - k + 1, \dots, a_k - 1\}$  von  $a_1 + a_2 + \dots + a_k - \binom{k+1}{2}$  in  $\leq k$  Teile, wovon jeder  $\leq N - k$  ist. Wenn man alle Auswahlen  $\{a_1, \dots, a_k\}$  mit  $N \geq a_1 > a_2 > \dots > a_k \geq 1$  durchläuft, erhält man auf der rechten Seite alle Partitionen  $\lambda$  in  $\leq k$  Teile, wovon jeder  $\leq N - k$  ist.

Somit gilt das grundlegende

### Lemma

Die erzeugende Funktion  $\sum_{\lambda} q^{|\lambda|}$  aller Partitionen  $\lambda$  in  $\leq k$  Teile, wovon jeder  $\leq N - k$  ist, ist  $\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}$ . Dieses Resultat ist äquivalent mit dem  $q$ -binomischen Lehrsatz in der Form (3).

Das Resultat, dass  $\begin{bmatrix} k+m \\ k \end{bmatrix}$  die erzeugende Funktion aller Partitionen in  $\leq k$  Teile ist, wo jeder Teil  $\leq m$  ist, kann auch völlig unabhängig vom  $q$ -binomischen Lehrsatz bewiesen werden. Ein solcher Beweis findet sich z.B. im Buch „Integer Partitions“ von George Andrews und Kimmo Eriksson. Dieser Beweis soll hier nicht wiederholt werden. Wir wollen dieses Resultat als bekannt voraussetzen und an Stelle des  $q$ -binomischen Lehrsatzes als Grundlage für alles Folgende ansehen.

### Bemerkung

Vom rein logischen Standpunkt aus ist es auf Grund des Lemmas natürlich irrelevant, welches der beiden Resultate als Ausgangspunkt gewählt wird und wie man dieses beweist. Da in den folgenden Überlegungen der Begriff der Partitionen eine beherrschende Rolle spielt, ist es schöner, die partitionentheoretische Interpretation zu wählen. Es wäre sehr schön, wenn der Ausgangspunkt einer Theorie bereits einen Hinweis darauf gäbe, was eigentlich hinter der Theorie steckt und welche Methoden dabei eine Rolle spielen. Das ist leider nur sehr selten der Fall. Gerade beim  $q$ -binomischen Lehrsatz gibt es sehr viele verschiedene Beweismethoden, die wenig Gemeinsamkeiten aufweisen. Es scheint so ähnlich wie bei den Elementarteilchen in der Physik zu sein, die auch fast alle ineinander umgewandelt werden können und sich nicht auf ein einziges grundlegendes reduzieren lassen.

Eine einfache Folgerung dieser Interpretation ist die Formel

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^m x)} = \sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix} x^k. \quad (4)$$

Denn schreibt man die linke Seite in der Gestalt

$$(1+x+x^2+\cdots)(1+qx+q^2x^2+\cdots)\cdots(1+q^N x+q^{2N}x^2+\cdots),$$

so ist klar, dass der Koeffizient von  $x^k$  durch  $\sum_{\lambda} q^{|\lambda|}$  über alle Partitionen  $\lambda$  in  $\leq k$  Teile, wovon jeder  $\leq m$  ist, gegeben ist.

Der einfachste Beweis der Tripelproduktidentität, den bereits Gauß und Cauchy kannten, beruht auf einer Modifikation des  $q$ -binomischen Lehrsatzes (3):

Seien  $m, n$  natürliche Zahlen. Wir setzen  $N \rightarrow m+n, x \rightarrow q^{-m}z$ . Dann erhalten wir

$$(1+q^{-m+1}z)(1+q^{-m+2}z)\cdots(1+q^{-1}z)(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^n z) \\ = \sum_{j=0}^{n+m} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m+n \\ j \end{bmatrix} (q^{-m}z)^j = \sum_{k=-m}^n q^{\binom{k+m+1}{2}-m(k+m)} \begin{bmatrix} n+m \\ k+m \end{bmatrix} z^{k+m}.$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten mit  $q^{\binom{m}{2}}z^{-m} = \frac{q^{m-1}}{z} \frac{q^{m-2}}{z} \cdots \frac{1}{z}$ . Das ergibt

$$\left(\frac{q^{m-1}}{z}+1\right)\left(\frac{q^{m-2}}{z}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{z}+1\right)(1+qz)(1+q^2z)\cdots(1+q^n z) = \sum_{k=-m}^n \begin{bmatrix} m+n \\ k+m \end{bmatrix} q^{\binom{k+1}{2}} z^k. \quad (5)$$

weil  $\binom{k+m+1}{2}-m(k+m)+\binom{m}{2}=\binom{k+1}{2}$  ist.

Für  $m, n \rightarrow \infty$  erhält man daraus (2).

Der Grenzübergang bedeutet dabei folgendes: Beide Seiten von (5) sind Polynome und daher insbesondere formale Potenzreihen in  $q$ , deren Koeffizienten Polynome in  $z$  und  $z^{-1}$ , also Elemente von  $\mathbb{C}[z, z^{-1}][[q]]$ , sind. Ein Grenzübergang  $f_n(q) = \sum_{k \geq 0} a_{nk} q^k \rightarrow f(q) = \sum_{k \geq 0} a_k q^k$

im Bereich der formalen Potenzreihen bedeutet, dass für jedes feste  $K$  ein  $N$  existiert, so dass für alle  $n \geq N$  gilt  $a_{nk} = a_k$  für alle  $k \leq K$ . Anders ausgedrückt bedeutet das, dass  $f_n(q) = f(q) + O(q^{K+1})$  für alle  $n \geq N$  gilt.

Das ist hier klar, weil für  $m, n \geq K+1$  nur mehr Terme  $q^j$  mit  $j > K$  dazukommen. Genauso gilt

$$q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} m+n \\ k+m \end{bmatrix} = \frac{q^{\binom{k+1}{2}}(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{m+n})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{m+k})(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-k})} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} + O(q^{K+1}).$$

### Bemerkung

Wenn man in (3) mit  $N \rightarrow \infty$  geht, erhält man die Euler'sche  $q$ -Exponentialfunktion

$$E(z) = (1+z)(1+qz)(1+q^2z)\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{k}{2}}}{(1-q)^k} z^k. \quad (6)$$

Dabei bedeute  $(1+z)^n = (1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{n-1}z)$  und  $(1+z)^\infty = (1+z)(1+qz)(1+q^2z)\cdots$ .

Aus der Definition folgt, dass  $E(z) = (1+z)E(qz)$  gilt.

Auf dieselbe Weise erhält man aus (4) ein weiteres  $q$ -Analogon der Exponentialfunktion, nämlich

$$e(z) = \frac{1}{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)\cdots} = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{(1-q)^k}. \quad (7)$$

Diese Resultate kann man natürlich auch ohne Bezugnahme auf (3) oder (4) rechnerisch ableiten. Denn schreibt man etwa im zweiten Fall

$$e(z) = \frac{1}{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)\cdots} = \sum_{k \geq 0} a_k z^k,$$

so erhält man aus  $(1-z)e(z) = e(qz)$  durch Koeffizientenvergleich  $(1-q^k)a_k = a_{k-1}$ , woraus wegen  $a_0 = 1$  alles folgt.

Kombinatorisch bedeutet (7), dass die erzeugende Funktion aller Partitionen mit höchstens  $k$

Teilen durch  $\frac{1}{(1-q)^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  gegeben ist.

Dagegen bedeutet (6), wenn man  $x \rightarrow qx$  ersetzt, dass die erzeugende Funktion aller

Partitionen in  $k$  verschiedene Teile  $q^{\binom{k+1}{2}} \frac{1}{(1-q)^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  ist.

Wenn wir in (5) bei festem  $m$  mit  $n \rightarrow \infty$  gehen, erhalten wir

$$\left(\frac{q^{m-1}}{z} + 1\right) \left(\frac{q^{m-2}}{z} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{z} + 1\right) (1+qz)(1+q^2z)\cdots = \sum_{k=-m}^{\infty} \frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1-q)^{k+m}} z^k.$$

Setzt man  $f(m) = \sum_{k=-m}^{\infty} \frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1-q)^{k+m}} z^k$ , dann gilt  $f(m+1) = \left(1 + \frac{q^m}{z}\right) f(m)$ .

Diese Identität kann man auch ohne Kenntnis der linken Seite sofort direkt verifizieren. Denn

$$\begin{aligned} f(m+1) - f(m) &= \sum_{k=-m-1}^{\infty} \frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1-q)^{k+m+1}} z^k - \sum_{k=-m}^{\infty} \frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1-q)^{k+m}} z^k = \sum_{k=-m-1}^{\infty} \frac{q^{\binom{k+1}{2}} (1-1+q^{k+m+1})}{(1-q)^{k+m+1}} z^k \\ &= \frac{q^m}{z} \sum_{k+1=-m}^{\infty} \frac{q^{\binom{k+2}{2}}}{(1-q)^{k+m+1}} z^{k+1} = \frac{q^m}{z} f(m). \end{aligned}$$

Wenn man dann mit  $m \rightarrow \infty$  geht, erhält man wieder die Tripelproduktidentität, weil

sich dann  $f(\infty) = f(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{q^{n-1}}{z}\right)$  ergibt und

wegen (6)  $f(0) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n z)$  ist. Dieser Beweis wurde von Chen, Hou und Mu (arXiv:math.

CO/0509281) publiziert.

Ein weiterer trickreicher Beweis von George Andrews benützt nur die beiden  $q$ -Exponentialfunktionen und geht davon aus, dass man in der  $q$ -Exponentialfunktion

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n z) = \sum_{k \geq 0} \frac{q^{\binom{k+1}{2}} z^k}{(1-q)^k} \text{ die rechte Seite auch in der Gestalt}$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{\binom{k+1}{2}} z^k}{(1-q)^k} = \frac{1}{(1-q)^{\infty}} \sum_{k \geq 0} q^{\binom{k+1}{2}} z^k (1-q^{k+1})(1-q^{k+2}) \dots$$

schreiben kann. Nun ist  $(1-q^{k+1})(1-q^{k+2}) \dots = 0$  für  $k < 0$ , weil dann ein Faktor 0 ist. Daher können wir die rechte Seite auch in der Gestalt

$$\frac{1}{(1-q)^{\infty}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k+1}{2}} z^k (1-q^{k+1})(1-q^{k+2}) \dots$$

schreiben.

Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  ist aber wieder aus der Formel für die  $q$ -Exponentialfunktion

$$(1-q^{k+1})(1-q^{k+2}) \dots = \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}}}{(1-q)^j} (q^{k+1})^j.$$

Also ergibt sich

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{\binom{k+1}{2}} z^k}{(1-q)^k} = \frac{1}{(1-q)^{\infty}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k+1}{2}} z^k \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}}}{(1-q)^j} (q^{k+1})^j.$$

Wenn wir hier die Reihenfolge der Summation ändern und beachten, dass

$$\binom{k+1}{2} + (k+1)j + \binom{j}{2} = \binom{k+j+1}{2} \text{ ist, erhalten wir}$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{\binom{k+1}{2}} z^k}{(1-q)^k} = \frac{1}{(1-q)^{\infty}} \sum_{j \geq 0} \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^j}{(1-q)^j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k+j+1}{2}} z^{k+j}$$

oder

$$E(qz) = \frac{1}{(1-q)^{\infty}} e\left(-\frac{1}{z}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k+1}{2}} z^k.$$

Wenn wir die  $q$ -Exponentialfunktionen wieder als unendliches Produkt schreiben, ergibt sich schließlich die gesuchte Identität

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n z) = \frac{1}{(1-q)^{\infty}} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1} z^{-1})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k+1}{2}} z^k.$$

Ein anderer sehr eleganter Beweis von Andrews geht von der linken Seite von (2) aus und bezeichnet diese mit  $J(z)$ .

Dann verifiziert man sofort, dass

$$J(z) = qzJ(qz) \tag{8}$$

gilt. Wenn wir  $J(z)$  nach Potenzen von  $z$  entwickeln, erhalten wir eine Reihe der Gestalt

$$J(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(q) q^{\binom{n+1}{2}} z^n. \text{ Koeffizientenvergleich liefert, dass } a_n(q) = \text{const} = a_0(q) \text{ ist.}$$

Es ergibt sich also

$$J(z) = a_0(q) \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\binom{n+1}{2}} z^n. \tag{9}$$

Den konstanten Term  $a_0(q)$  von  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n z) (1 + \frac{q^{n-1}}{z})$  erhält man, wenn man gleich viele

Terme, die  $z$  enthalten aus  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n z)$  und aus  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{q^{n-1}}{z})$  auswählt. Man kann eine solche Auswahl durch ein Paar  $(a, b)$  mit  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ , wobei  $a_1 > a_2 > \dots > a_s \geq 1$  ist und  $b = \{b_1, \dots, b_s\}$  mit  $b_1 > b_2 > \dots > b_s \geq 0$  beschreiben. So ein Paar kann als Partition von  $\sum_i (a_i + b_i)$  gedeutet werden.

Man kann nämlich jede Partition umkehrbar eindeutig durch so ein Paar  $(a, b)$  beschreiben.

Das ist im wesentlichen die sogenannte Frobenius-Darstellung einer Partition.

Dazu betrachtet man bei gegebener Partition  $\lambda$  die SO-Diagonale im Ferrer-Diagramm. Die Anzahl der Elemente der Zeilen, die auf und rechts von der Diagonale liegen, sind die  $a_i$  und die Anzahl der Elemente der Spalten, die unter der Diagonale liegen, die  $b_i$ .

Zum Beispiel entspricht dem Paar  $a = \{5, 2, 1\}, b = \{3, 1, 0\}$  die Partition  $\lambda = (5, 3, 3, 1)$ .



Meistens lässt man dabei in  $a$  die Punkte der Diagonale weg und schreibt z. B. im

angegebenen Fall  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Wir wollen das aber in Hinblick auf die späteren

Verallgemeinerungen nicht machen.

Aus dieser Zuordnung ist ersichtlich, dass  $a_0(q) = \sum_{\lambda} q^{\sum a_i + b_i} = \sum_{\lambda} q^{|\lambda|} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)}$  ist.

Die letzte Gleichung ist natürlich die wohlbekannte Euler'sche Formel für die erzeugende

Funktion der Partitionen, die sich auch aus  $\begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix}$  für  $m, k \rightarrow \infty$  ergibt.

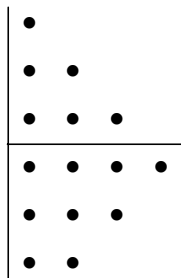
Wenn wir in (3)  $x$  durch  $(qx)^{-1}$  ersetzen, wollen wir die so entstehende Identität

$$(1+q^{N-1}x^{-1})(1+q^{N-2}x^{-1})\cdots(1+x^{-1}) = \sum_{\ell \geq 0} q^{\binom{\ell}{2}} \begin{bmatrix} N \\ \ell \end{bmatrix} x^{-\ell} = \sum_{k \leq 0} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} N \\ N+k \end{bmatrix} x^k \quad (11)$$

folgendermaßen deuten:

Beim Ausrechnen der linken Seite erhalten wir die Terme  $q^{b_1}x^{-1}q^{b_2}x^{-1}\cdots q^{b_k}x^{-1}$  mit  $N-1 \geq b_1 > b_2 > \cdots > b_k \geq 0$ .

Hier modifizieren wir das konjugierte Ferrer-Diagramm der Partition  $\{b_1, \dots, b_k\}$  von  $b_1 + b_2 + \cdots + b_k$  (wo also die Zeilen und Spalten vertauscht sind), indem wir die erste Spalte um  $k-1$  Einheiten, die zweite um  $k-2$  Einheiten und schließlich die  $k$ -te Spalte um 0 Einheit nach oben verschieben. Wenn etwa  $k=4$  und  $\{b_1, b_2, b_3, b_4\} = \{6, 5, 3, 1\}$  ist, erhalten wir das Diagramm



Der obere Teil des Diagramms enthält  $\binom{-k+1}{2} = \binom{k}{2}$  Elemente und der untere Teil ist die

Konjugierte einer Partition  $\lambda = \{b_1 - k + 1, b_2 - k + 2, \dots, b_k\}$  von  $b_1 + b_2 + \cdots + b_k - \binom{k}{2}$  in  $\leq k$

Teile, wovon jeder  $\leq N - k$  ist. Wenn wir alle Partitionen  $\{b_1, \dots, b_k\}$  mit

$N-1 \geq b_1 > b_2 > \cdots > b_k \geq 0$  betrachten, erhalten wir auf der rechten Seite alle Partitionen  $\lambda$  in  $\leq k$  Teile, wovon jeder  $\leq N - k$  ist. Die erzeugende Funktion  $\sum_{\lambda} q^{|\lambda|}$  über alle diese

Partitionen ist  $\begin{bmatrix} N \\ N-k \end{bmatrix}$ . Damit ergibt sich die rechte Seite von (11).

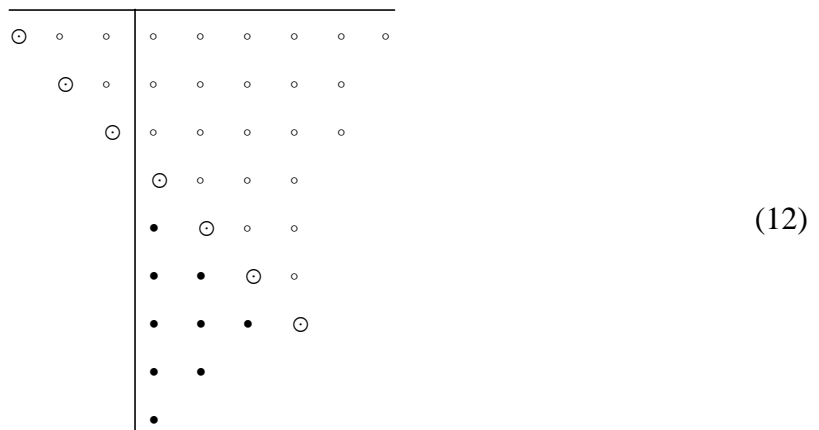
Nun wollen wir die Identität (5) kombinatorisch deuten.

Bei festem  $k$  mit  $-m \leq k \leq n$  ergibt sich der Koeffizient von  $z^k$  auf der linken Seite von (5) als Summe über alle Terme

$q^{a_1+a_2+\cdots+a_{s+k}} q^{b_1+b_2+\cdots+b_s}$ , wobei  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_{s+k}\}$  mit  $n \geq a_1 > a_2 > \cdots > a_{s+k} \geq 1$  und  $b = \{b_1, \dots, b_s\}$  mit  $m-1 \geq b_1 > \cdots > b_s \geq 0$  ist.

Jedem solchen Paar  $(a, b)$  ordnen wir nach J.J. Sylvester eine graphische Darstellung von  $a_1 + \cdots + a_{s+k} + b_1 + \cdots + b_s$  Kugeln zu.

Ich möchte das an einfachen Beispielen demonstrieren, aus welchen der allgemeine Fall ersichtlich ist. Sei  $k \geq 0$ . Wir wählen als Beispiel  $a = \{9, 7, 6, 4, 3, 2, 1\}, b = \{5, 3, 1, 0\}$ . Dann ist  $k = 3$  und  $s = 4$ .  
 Der zugehörige Graph schaut dann folgendermaßen aus:



Die  $a_i$  Kugeln werden horizontal aufgetragen. Jedes  $a_i$  beginnt auf der SO-Diagonale. Den Anfangspunkt haben wir mit  $\odot$  gekennzeichnet. Die anderen Kugeln sind mit  $\circ$  bezeichnet.

Links vom vertikalen Strich sind  $k$  Spalten mit insgesamt  $\binom{k+1}{2}$  Elementen in

Dreiecksform. Rechts vom vertikalen Strich werden unter den Diagonalelementen die Elemente  $\bullet$  der  $b_j$  aufgetragen. Wenn man nur die Elemente rechts vom vertikalen (und unter dem horizontalen) Strich betrachtet, so bilden sie das Ferrer-Diagramm einer Partition

von  $a_1 + \dots + a_{s+k} + b_1 + \dots + b_s - \binom{k+1}{2}$  mit  $\leq m+k$  Teilen (weil die Anzahl der Teile die

Anzahl der Kugeln in der ersten Spalte rechts vom vertikalen Strich ist, d.h.

$k+1+b_1 \leq k+1+m-1 = k+m$ ), wovon jeder  $\leq n-k$  ist (weil  $\lambda_1 \leq a_1 - k \leq n-k$  ist). In

unserem Fall ist das die Partition  $\lambda = (6, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 2, 1)$ . Umgekehrt entspricht jeder

solchen Partition ein Paar  $(a, b)$  der angegebenen Art. Für  $k = 0$  erhalten wir die Frobenius-Darstellung.

Für  $k < 0$  erhalten wir eine analoge Konstruktion. Wir begnügen uns wieder mit einem Beispiel: Sei  $a = \{3\}, b = \{6, 4, 0\}$ , also  $s = 3, k = -2$ .

Wir platzieren über dem horizontalen Strich  $\binom{k+1}{2} = \binom{-k}{2}$  Elemente in Dreiecksform. Über

diesen Punkten beginnt eine SO-Diagonale, die über dem horizontalen Strich nur virtuell vorhanden ist (durch  $\cdot$  angedeutet). Unter dieser Diagonale liegen wieder die  $b_j$ 's und unter dem horizontalen Strich liegen auf der Diagonale und rechts davon die  $a_i$ 's.



Im Quadranten rechts unten finden wir wieder eine Partition von

$$a_1 + \dots + a_{s-|k|} + b_1 + \dots + b_s - \binom{-|k|+1}{2} \text{ mit } \leq m - |k| \text{ Teilen, wovon jeder } \leq n + |k| \text{ ist.}$$

Die beiden Konstruktionen schauen nur auf den ersten Blick verschieden aus. Denn wenn man von positiven zu negativen Werten von  $k$  übergeht, wandert die Diagonale nach oben, Punkte  $\odot$  und  $\circ$  gibt es nur unter dem horizontalen Strich und Punkte  $\bullet$  nur rechts vom vertikalen Strich.

Insgesamt sehen wir, dass der Koeffizient von  $z^k$  gegeben ist durch

$$q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} (n-k) + (m+k) \\ m+k \end{bmatrix} = q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n+m \\ m+k \end{bmatrix}.$$

Damit ist die rechte Seite kombinatorisch gedeutet.

Diese Deutung bleibt natürlich auch richtig, wenn wir mit  $n$  oder  $m$  gegen  $\infty$  gehen.

Die Paare  $(a, b)$  können nach einer Idee von R. Borcherds, die im Buch „Combinatorics“ von Peter J. Cameron skizziert wird, in Anlehnung an die Dirac’sche Theorie der Elektronen auch folgendermaßen gedeutet werden:

Man betrachte linear angeordnete Kästchen, die durch die Zahlen  $k$ ,  $-m+1 \leq k \leq n$ , beschrieben werden. Ein Zustand  $S$  sei eine Teilmenge dieser Zahlen. Man kann ihn als Verteilung von Teilchen auf diese Kästchen interpretieren, wo in jedem Kästchen höchstens ein Teilchen liegt. Der Zustand, wo jedes nicht positive, aber kein positives Kästchen ein Teilchen enthält, heiße *Vakuum*.

Sei  $S$  ein Zustand. Dann versteht man unter der *Energie* von  $S$  die Zahl

$$E(S) = \sum_{\ell > 0, \ell \in S} \ell - \sum_{\ell \leq 0, \ell \notin S} \ell$$

und unter der *Ladung* von  $S$  die Zahl

$$L(S) = |\{\ell > 0 : \ell \in S\}| - |\{\ell \leq 0 : \ell \notin S\}|. \text{ Jedes Teilchen, das in einem positiven Kästchen liegt,}$$

hat also die Ladung 1 und jedes „Loch“ in einem nicht-positiven Kästchen die Ladung  $-1$ .

Jeder Zustand  $S$  mit Ladung  $k$  kann durch ein geordnetes Paar  $(a, b)$  mit

$$a = \{a_1, a_2, \dots, a_{s+k}\} \text{ und } b = \{b_1, \dots, b_s\} \text{ mit } a_1 > a_2 > \dots > a_{s+k} \geq 1 \text{ und } b_1 > b_2 > \dots > b_s \geq 0$$

beschrieben werden. Dabei sind die  $a_i$  die Positionen der positiven Teilchen und  $-b_j$  die Positionen der nichtpositiven Löcher.

Damit ist bereits der Zusammenhang mit der Sylvester’schen Beschreibung gefunden.

Es gilt  $E(S) = \sum_i a_i + \sum_j b_j$ .

Für das Vakuum  $V$  gilt also  $E(V) = 0$  und  $L(V) = 0$ .

Für jedes  $k$  hat der Zustand  $V_k$ , in dem die Teilchen in den Kästchen  $i$  mit  $-m+1 \leq i \leq k$  liegen, die kleinste Energie unter allen Zuständen mit der Ladung  $k$ . Sie ist für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  gegeben durch  $E(V_k) = 1 + 2 + \dots + k = \binom{k+1}{2}$ .

Ist also  $S$  ein Zustand mit Ladung  $k \geq 0$ , so erhält man aus  $V_k$  den Zustand  $S$ , indem man die Teilchen an den Stellen  $k+1-i$  für  $i=1$  bis  $k+s$  der Reihe nach an die Stellen  $a_i$

verschiebt. Das erhöht den Wert der Energie um  $a_1 + \dots + a_{s+k} - \binom{k+1}{2} + \binom{s}{2}$ . Dann

verschiebt man die dabei entstandenen Löcher  $-s+1, -s+2, \dots, 0$  sukzessive an die Stellen  $-b_1, -b_2, \dots, -b_s$ . Dabei erhöht sich die Energie um den Wert  $b_1 + \dots + b_s - \binom{s}{2}$ . Insgesamt

erhöht sich die Energie um den Wert

$$a_1 + \dots + a_{s+k} - \binom{k+1}{2} + \binom{s}{2} + b_1 + \dots + b_s - \binom{s}{2} = a_1 + \dots + a_{s+k} + b_1 + \dots + b_s - \binom{k+1}{2}.$$

Hat der Zustand  $S$  die Ladung  $k \leq 0$ , so verschiebt man zuerst die Löcher

$k+1, \dots, 0, 1, \dots, s+k$  an die Stellen  $-b_1, -b_2, \dots, -b_s$  und dann die neu entstandenen Teilchen an den positiven Stellen  $s+k, s+k-1, \dots, 1$  der Reihe nach an die Stellen  $a_1, \dots, a_{s+k}$ . Dabei

erhöht sich die Energie wieder um den Wert  $a_1 + \dots + a_{s+k} + b_1 + \dots + b_s - \binom{k+1}{2}$ .

Graphisch kann man diesen Verschiebungen wieder die Ferrer-Diagramme zuordnen, die in den obigen Darstellungen rechts unten stehen.

Am interessantesten ist natürlich der Grenzfall  $m = n = \infty$ , der auf die Tripelproduktidentität führt. Hier muss man beachten, dass es im nicht-positiven Teil nur endlich viele Löcher und im positiven Teil nur endlich viele Teilchen gibt.