Mathematische Randbemerkungen 4:

Die Identitäten von Rogers-Ramanujan.

Im Buch „Integer Partitions“ von George E. Andrews und Kimmo Eriksson wird ein einfacher Beweis der Rogers-Ramanujan Identitäten gegeben, der auf Identitäten von David Bressoud (Some identities for terminating q-series, 1981) beruht. Ich möchte im Folgenden zeigen, dass der Beweis noch einfacher wird, wenn man von der Identität

$$\sum_{j=-k}^{k}(-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

ausgeht.

Sei

$$f(n,k)=\sum_{j=-k}^{k}(-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix}=\sum_{j=-k}^{k}(-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Aus der Rekurrenzrelation $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}+q^{n-k+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$ für die $q-$Binomialkoeffizienten ergibt sich, dass auch

$$\sum_{j}(-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n+1 \\ k+j \end{bmatrix}=f(n,k) \qquad (2)$$

ist. Denn es ist

$$\sum_{j}(-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n+1 \\ k+j \end{bmatrix}=\sum_{j}(-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix}$$

$$+\sum_{j}(-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}+n-k-j+1}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k+j-1 \end{bmatrix}=f(n,k)+q^{n-k+1}\sum_{j}(-1)^j q^{\frac{3j(j-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k+j-1 \end{bmatrix}.$$

Der letzte Term verschwindet, weil $(-1)^j q^{\frac{3j(j-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k+j-1 \end{bmatrix}$ durch $j\to -j+1$ in $(-1)^{-j+1}q^{\frac{3j(j-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k+j-1 \end{bmatrix}$ übergeht und sich diese Terme annulieren.

Weiters ergibt sich aus der anderen Rekurrenzrelation $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}=q^k\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$

$$\sum_{j}(-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n+1 \\ k+j+1 \end{bmatrix}=q^{k+1}\sum_{j}(-1)^j q^{\frac{j(3j+3)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k+j+1 \end{bmatrix}+f(n,k)=f(n,k).$$

Insgesamt gilt also

$$f(n,k)=\sum_{j=-k}^{k}(-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix}=\sum_{j}(-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n+1 \\ k+j \end{bmatrix}$$

$$=\sum_{j}(-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n+1 \\ k+j+1 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Nun ist

$$f(n+1,k)=\sum_j (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+j \end{bmatrix} = \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+j \end{bmatrix}$$

$$+q^{n-k+1} \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+j \end{bmatrix}$$

$$= f(n,k)+q^{n-k+1} \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ (k-1)-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ (k-1)+j+1 \end{bmatrix} = f(n,k)+q^{n-k+1} f(n,k-1).$$

Die Folge $\left(f(n,k)\right)$ erfüllt also die Rekurrenzrelation der $q-$Binomialkoeffizienten und die entsprechenden Randbedingungen, sodass sich $f(n,k)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ergibt.

Damit erhalten wir

Satz 1

Es gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{j=-k}^{k} (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} = \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+j \end{bmatrix} \\ &= \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+j+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wenn man hier mit $n \to \infty$ geht, ergibt sich aus dem ersten Term

$$\sum_{j=-k}^{k} (-1)^j \frac{q^{\frac{j(3j-1)}{2}}}{(q)_{k-j}(q)_{k+j}} = \frac{1}{(q)_k}, \tag{5}$$

und aus dem letzten

$$\sum_{j=-k-1}^{k} (-1)^j \frac{q^{\frac{j(3j-1)}{2}}}{(q)_{k-j}(q)_{k+j+1}} = \frac{1}{(q)_k}, \tag{6}$$

wenn wir $(q)_n=\prod_{j=1}^{n}(1-q^j)$ setzen. Die Formeln (5) und (6) wurden von L.J. Rogers bei seinem zweiten Beweis der Rogers-Ramanujan Identitäten gefunden.
Sie ergeben sich auch sehr einfach aus dem Bailey-Lemma (vgl. Peter Paule, The concept of Bailey chains, 1987).
Geht man in (5) mit $k \to \infty$ so ergibt sich bekanntlich der Euler'sche Pentagonalzahlensatz

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} = (q)_\infty.$$

Aus (4) folgt sofort

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k^2} = \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(5j-1)}{2}} \sum_{k\geq|j|} q^{(k-j)(k+j)} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Aus der q – Vandermonde'schen Formel
$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} q^{(m-j)(k-j)}$
ergibt sich

$$\sum_{k\geq|j|} q^{(k-j)(k+j)} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n \\ n-2j \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Somit kann (7) auch in der Form

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k^2} = \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(5j-1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2j \end{bmatrix} \tag{9}$$

geschrieben werden, die von David Bressoud gefunden wurde.

Weiters gilt

$$\sum_j (-1)^j q^{\frac{j(3j-3)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+j \end{bmatrix} = q^k \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix}$$
$$+\sum_j (-1)^j q^{\frac{j(3j-3)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j-1 \end{bmatrix} = q^k f(n,k) = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt analog wie oben

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k^2+k} = \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+1-2j \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Geht man in (9) mit $n \to \infty$, so ergibt sich die erste Identität von Rogers-Ramanujan

$$\sum_{k\geq 0} \frac{q^{k^2}}{(q)_k} = \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j q^{\frac{j(5j-1)}{2}}. \tag{11}$$

Analog ergibt sich aus (10) die zweite Identität von Rogers-Ramanujan

$$\sum_{k\geq 0} \frac{q^{k^2+k}}{(q)_k} = \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}. \tag{12}$$

Aus (4) ergibt sich auch

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k^2} z^k = \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(5j-1)}{2}} \sum_{k\geq|j|} q^{(k-j)(k+j)} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} z^k.$$

Geht man hier mit $n \to \infty$, so erhält man

$$\sum_{k\geq 0} \frac{q^{k^2}}{(q)_k} z^k = \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(5j-1)}{2}} \sum_{k\geq|j|} \frac{q^{(k-j)(k+j)}}{(q)_{k-j}(q)_{k+j}} z^k. \tag{13}$$

Nun zeigen wir

Satz 2
Es gilt

$$g(n,k)=\sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} = q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Zum Beweis beachten wir, dass

$$\sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} = q^k g(n,k)$$

ist, weil in

$$\sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} = q^k \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} + \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix}$$

der zweite Term rechts verschwindet.
Außerdem ist

$$\sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k-j+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} = q^{n-k} g(n,k).$$

Denn

$$\sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k-j+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} = \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} + q^{n-k} \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix}.$$

Daher ist

$$g(n+1,k)=\sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+j \end{bmatrix} = q^k \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix}$$

$$+\sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j-1 \end{bmatrix} = q^{2k} g(n,k) + \sum_j (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ (k-1)-j+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ (k-1)+j \end{bmatrix}$$

Das impliziert

$g(n+1,k)=q^{2k}g(n,k)+q^{n-k+1}g(n,k-1)$, woraus sich sofort $g(n,k)=q^{k(n-k)}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ergibt.

Für $n\to\infty$ ergibt sich aus (14) die wohlbekannte Identität

$$\sum_{j=-k}^{k} (-1)^j \frac{q^{\binom{j}{2}}}{(q)_{k-j}(q)_{k+j}} = [k=0]. \tag{15}$$

Schreibt man (14) in der Form

$$\sum_j (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} q^{(k-j)(k+j)} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} = q^{kn} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

und summiert, so erhält man eine weitere Identität von Bressoud

$$\sum_{k=0}^{n} q^{kn} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2j \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Für $n \to \infty$ reduziert sich diese wieder auf den Pentagonalzahlensatz.

Bemerkungen

Die Identität (4) kann auch in der Gestalt

$$f(n,k) = \sum_{j=-k}^{k} (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} \frac{1+q^j}{2} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \tag{17}$$

geschrieben werden. In dieser Form existiert auch ein einfacher Computerbeweis mit Hilfe des Zeilbergeralgorithmus. Die Mathematica Implementierung qZeil von Peter Paule und Axel Riese liefert

$$f(n,k) = \frac{1-q^n}{1-q^{n-k}} f(n-1,k) \tag{18}$$

und daher

$$f(n,k) = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{k+1})}{(1-q^{n-k})(1-q^{n-k-1})\cdots(1-q)} f(k,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \tag{19}$$

weil $f(k,k)=1$ ist.
Um das zu beweisen, setze man

$$a(n,k,j) = (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} (1+q^j) \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} \tag{20}$$

und erhält durch qZeil

$$b(n,k,j) = \frac{q^{n-k+2j}(1-q^{k-j})(1-q^{n-j-k})}{(1+q^j)(1-q^{n-k})(1-q^n)} a(n,k,j), \tag{21}$$

so dass gilt

$$a(n,k,j) - \frac{1-q^n}{1-q^{n-k}} a(n-1,k,j) = b(n,k,j) - b(n,k,j-1).$$

Das lässt sich ebenfalls mit qZeil und dem Befehl qSimplify sehr einfach überprüfen.

Ein weiteres schönes q – Analogon der Formel $\sum_j (-1)^j \binom{n}{k-j}\binom{n}{k+j} = \binom{n}{k}$

ist

$$h(n,k) = \sum_{j=-k}^{k} (-1)^j q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2}. \tag{22}$$

Das lässt sich wieder am einfachsten mit dem Zeilbergeralgorithmus beweisen, der

$$h(n,k)=\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-2k}}h(n-1,k)$$

liefert.

Für $n\to\infty$ ergibt das

$$\sum_{j=-k}^{k}(-1)^j\frac{q^{j^2}}{(q)_{k-j}(q)_{k+j}}=\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})}$$

oder

$$\sum_{j=-k}^{k}(-1)^j q^{j^2}\begin{bmatrix}2k\\k-j\end{bmatrix}=(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2k-1}) \qquad (23)$$

und für $k\to\infty$ schließlich die bekannte Gauß'sche Identität

$$\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j q^{j^2}=\frac{1}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots}.$$

Übrigens folgt aus (23) die berühmte Gauß'sche Summe

$$\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\begin{bmatrix}2k\\j\end{bmatrix}=(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2k-1}),$$

wenn man $q\to\frac{1}{q}$ überführt.