Mathematische Randbemerkungen 2.
Ein paar einfache Folgerungen des q-binomischen Lehrsatzes

1. Die so genannten Rogers-Szegö Polynome

$$r_n(x)=\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \tag{1}$$

sind das „natürlichste“ $q-$ Analogon des binomischen Lehrsatzes.
Unter Verwendung der im ersten Teil eingeführten Bezeichnungen ergibt sich aus dem allgemeinen $q-$binomischen Lehrsatz für $(A,B)=(x,\varepsilon)$

$$r_n(x)=\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = (x+\varepsilon)^n(1). \tag{2}$$

Ihre erzeugende Funktion ist

$$\sum_n \frac{r_n(x)}{[n]!} z^n = e(xz)e(z). \tag{3}$$

Denn es gilt

$e(xz)e(\varepsilon z)=e((x+\varepsilon)z)$, d.h. $\sum_n \frac{x^n z^n}{[n]!} \sum_n \frac{\varepsilon^n z^n}{[n]!} = \sum_n \frac{(x+\varepsilon)^n z^n}{[n]!}$, und

daher

$$e(xz)e(z)=e(xz)e(\varepsilon z)(1)=\sum_n \frac{r_n(x)}{[n]!} z^n. \tag{4}$$

Allerdings gibt es für diese Polynome keine explizite Formel.
Sie erfüllen jedoch die Rekurrenz

$$r_n(x)=(x+1)r_{n-1}(x)+(q^{n-1}-1)xr_{n-2}(x). \tag{5}$$

Das ergibt sich durch Koeffizientenvergleich aus den Rekursionsformeln für die $q-$Binomialkoeffizienten.

2. Speziell erfüllen die so genannten Galoiszahlen

$$G_n(q)=\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \tag{6}$$

die Rekurrenz

$$G_n(q)=2G_{n-1}(q)+(q^{n-1}-1)G_{n-2}(q).$$

Das führt auf die Folge von Polynomen in q vom Grad $\deg(G_n(q))=\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$

$1,2,3+q,4+2q+2q^2,5+3q+3q^2+q^4,6+4q+6q^2+6q^3+6q^4+2q^5+2q^6,\cdots,$

die auf den ersten Blick keine einfachen Gesetzmäßigkeiten aufzuweisen scheint. Wenn man sich jedoch ein bisschen damit spielt, ergeben sich einige verblüffende Tatsachen.

Die Betrachtung der Folge $G_{n+1}(q)-G_n(q)$, die mit
$1, 1+q, 1+q+2q^2, 1+q+2q^2+3q^3+q^4, 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+2q^5+2q^6, \cdots$
beginnt, führt zur Vermutung, dass

$$G_{n+1}(q)-G_n(q)=1+p(1)q+p(2)q^2+\cdots+p(n)q^n+O(q^{n+1}) \tag{7}$$

gilt. Dabei gibt die Folge $\left(p(n)\right)=\left(1,1,2,3,5,7,11,15,22,30,42,\cdots\right)$ die Anzahl der Partitionen der Zahl n an.

Andererseits hat Michael Somos (siehe On-Line Encyclopedia of Integer Sequences A029552) gefunden, dass

$$q^{n^2}G_{2n}\left(\frac{1}{q}\right)=a(0)+a(1)q+\cdots a(n)q^n+O(q^{n+1}) \tag{8}$$

gilt, wobei $a(n)=p(n)+2p(n-1^2)+2p(n-2^2)+\cdots 2p(n-\left\lfloor \sqrt{n}\right\rfloor^2)$
ist.
Ein weiteres Resultat von Somos (OEIS A098613) besagt, dass

$$q^{n^2+n}G_{2n+1}\left(\frac{1}{q}\right)=b(0)+b(1)q+\cdots b(n)q^n+O(q^{n+1}) \tag{9}$$

gilt, wobei $\sum_{n\geq 0}b(n)q^n=\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{k^2-k}\sum_{\ell\geq 0}p(\ell)q^\ell$ ist.

Das lässt sich sehr einfach beweisen.
Es gilt

$$G_{n+1}(q)-G_n(q)=\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}q^k=r_n(q). \tag{10}$$

Nun ist
$$r_n(q)=1+q\frac{1-q^n}{1-q}+q^2\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}+\cdots=1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\cdots+\frac{q^k}{(1-q)\cdots(1-q^k)}+O(q^{k+1})$$
für $n\geq k$. Außerdem ist
$$(1-q)\cdots(1-q^k)\left(1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\cdots+\frac{q^k}{(1-q)\cdots(1-q^k)}\right)=1.$$
Daher ist
$$(1-q)\cdots(1-q^k)r_n(q)=1+O(q^{k+1})$$
für $n\geq k$.

Da bekanntlich
$$\frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^k)}=\sum_{j=0}^{k}p(j)q^j+O(q^{k+1}) \tag{11}$$
ist, ergibt sich (7).

Um (8) zu beweisen, beachten wir, dass
$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}} = \sum_k q^{k^2-nk} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ist. Daher ergibt sich

$$q^{n^2} \sum_k \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}} = \sum_k q^{(n-k)^2} \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} + 2\sum_{k=0}^{n-1} q^{(n-k)^2} \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} + 2\sum_{k=1}^{n} q^{k^2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-k \end{bmatrix}.$$

Nun ist wegen $q^{k^2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-k \end{bmatrix} = \dfrac{q^{k^2}}{(1-q)\cdots(1-q^m)} + O(q^{m+1})$

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} + 2\sum_{k=1}^{n} q^{k^2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-k \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^m)} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{m} \rfloor} q^{k^2} \right) + O(q^{m+1})$$

für $n \geq m$.
Wegen (11) ergibt sich durch Koeffizientenvergleich die Aussage (8).
Die Formel (9) beweist man ganz analog.

3. Im Unterschied zu $r_n(1)$ hat $r_n(\sqrt{q})$ eine schöne Formel. Wenn wir $q \to q^2$ ersetzen gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} = (1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n). \tag{12}$$

Das kann sofort mittels (5) verifiziert werden. Ein schönerer Beweis ergibt sich aus der Tatsache, dass (12) gleichbedeutend mit der Formel $e_{q^2}(\frac{x}{[2]})e_{q^2}(\frac{qx}{[2]}) = e(x)$ ist, wobei

$e_{q^2}(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{[1]_{q^2}[2]_{q^2}\cdots[n]_{q^2}}$ bedeutet, welche sich sofort aus der Produktdarstellung der $q-$ Exponentialfunktion ergibt.

Denn aus

$$\sum_n \frac{x^n}{[n]!} = e_{q^2}(\frac{x}{[2]})e_{q^2}(\frac{qx}{[2]}) = \sum_k \frac{x^k}{[2]^k [k]_{q^2}!} \sum_\ell \frac{q^\ell x^\ell}{[2]^\ell [\ell]_{q^2}!} = \sum_k \frac{x^n}{[2]^n [n]_{q^2}!} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} q^{n-k}$$

ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} = [2]^n \frac{[n]_{q^2}!}{[n]!} = (1+q)^n \frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}{(1-q^2)^n} \frac{(1-q)^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$
$$= (1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n).$$

Boris A. Kupershmidt (J. Nonlinear Physics V.7,N2, 244-262 (2000)) hat allgemeiner

$$\sigma_n(d) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_2 q^{dk} \tag{13}$$

betrachtet.

Sein Ergebnis kann am einfachsten aus der erzeugenden Funktion

$$\sum_n \frac{\sigma_n(d)}{[n]_{q^2}!} z^n = e_{q^2}(z) e_{q^2}(q^d z)$$ hergeleitet werden.

Aus

$$\sum_n \frac{\sigma_n(2k+1)}{[n]_{q^2}!} z^n = e_{q^2}(z) e_{q^2}(q^{2k} qz)$$

und der Produktdarstellung der $q-$Exponentialreihe ergibt sich

$$e(q^n z) = (1 \underset{\cdot}{-} (1-q)z)^n e(z) = \sum_k (-1)^k (1-q)^k q^{\binom{k}{2}} z^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} e(z)$$

und somit

$$\sum_n \frac{\sigma_n(2k+1)}{[n]_{q^2}!} z^n = e_{q^2}(z) e_{q^2}(q^{2k} qz) = \sum_j (-1)^j (1-q^2)^j q^{2\binom{j}{2}} (qz)^j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_{q^2} e_{q^2}(z) e_{q^2}(qz)$$

und daher

$$\sigma_n(2k+1) = \sum_j (-1)^j (1-q^{2n})(1-q^{2n-2}) \cdots (1-q^{2n-2j+2}) q^{2\binom{j}{2}+j} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \sigma_{n-j}(1)$$

oder

$$\sigma_n(2k+1) = \sum_j (-1)^j (1-q^n)(1-q^{n-1}) \cdots (1-q^{n-j+1}) q^{j^2} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \sigma_n(1). \tag{14}$$

Das dabei auftretende Polynom

$$f_n(x) = \sum_j (-1)^j (1-x)(1-\frac{x}{q}) \cdots (1-\frac{x}{q^{j-1}}) q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^2}$$

lässt sich explizit folgendermaßen darstellen:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{\binom{2k+1}{2}} \prod_{j=k}^{n-1-k} (1-q^{2j+1}) \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_{q^2} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} q^{\binom{2k+2}{2}} \prod_{j=k+1}^{n-1-k} (1-q^{2j+1}) \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^2} x^{2k+1}.$$

Für $\sigma_n(2k)$ gibt es wie schon für $d=0$ keine schöne explizite Formel. Da reduziert sich alles auf den schon oben betrachteten Fall.

4. Ein $q-$Analogon der Formel $(1-1)^n = [n=0]$ ist die berühmte Formel von C.F. Gauß

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \begin{bmatrix} 2n+1 \\ k \end{bmatrix} = 0 \\ &\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} = (1-q)(1-q^3) \cdots (1-q^{2n-1}). \end{aligned} \tag{15}$$

Diese folgt sofort aus der Rekurrenzrelation (5). Noch einfacher sieht man es folgendermaßen:

$$\sum_n \frac{r_n(-1)}{(1\div q)^n} z^n = e\left(\frac{-z}{1-q}\right) e\left(\frac{z}{1-q}\right) = \sum_k \frac{(-z)^k}{(1\div q)^k} \sum_\ell \frac{z^\ell}{(1\div q)^\ell}$$
$$= \frac{1}{(1+z)(1+qz)(1+q^2z)\cdots} \frac{1}{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)\cdots}$$
$$= \frac{1}{(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)\cdots} = \sum_n \frac{(z^2)^n}{(q^2;q^2)_n}.$$
Vergleicht man hier Koeffizienten, so ist klar, dass $r_{2n+1}(-1) = 0$ ist und dass $\frac{r_{2n}(-1)}{(1\div q)^{2n}} = \frac{1}{(q^2;q^2)_n}$ ist, woraus alles folgt.

Nun wollen wir einige Folgerungen daraus ziehen.
Wir schreiben $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} = (1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1})$ zuerst in der äquivalenten Form
$$\sum_{0\le j\le 2s} \frac{(-1)^j}{(1\div q)^j (1\div q)^{2s-j}} = \frac{(1-q)\cdots(1-q^{2s-1})}{(1\div q)^{2s}}$$
und machen sie nun symmetrisch zum Nullpunkt, indem wir $j \to s+j$ ersetzen:
$$\sum_{|j|\le s} \frac{(-1)^{s+j}}{(1\div q)^{s+j}(1\div q)^{s-j}} = \frac{(1-q)\cdots(1-q^{2s-1})}{(1\div q)^{2s}}.$$
Nun ersetzen wir $q \to \frac{1}{q}$. Dann ergibt sich nach leichter Rechnung
$$\sum_{|j|\le s} \frac{(-1)^j q^{j^2}}{(1\div q)^{s+j}(1\div q)^{s-j}} = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2s})}.$$

Wenn wir hier $s \to \infty$ gehen lassen, ergibt sich
$$\left(\frac{1}{(1\div q)^\infty}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j q^{j^2} = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}.$$
Daraus folgt eine weitere Identität von Gauß

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^n}{1+q^n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k q^{k^2}. \tag{16}$$

5. Was passiert, wenn wir $r_n(x) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$ für negative n betrachten? Hier erweist es sich als zweckmäßig, q durch $\frac{1}{q}$ zu ersetzen. Sei also
$$s_n(x) = \sum_k \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}} x^k, n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Wegen $\begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}} = (-1)^k q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}$ ergibt sich

$$s_n(x) = \sum_k \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}} x^k = \sum_{k\geq 0} (-1)^k q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} x^k. \tag{18}$$

Wegen

$$\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n+k-1})\cdots(1-q^n)}{(1\div q)^k} = \frac{(1\div q^n)^k}{(1\div q)^k}$$

lässt sich das auch in der Form

$$s_n(x) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k q^{\binom{k+1}{2}} \frac{(1\div q^n)^k}{(1\div q)^k} x^k \tag{19}$$

schreiben.

Man rechnet leicht nach, dass

$$s_n(x) = \frac{(1+x)s_{n-1}(x) - s_{n-2}(x)}{(1-q^{n-1})x} \tag{20}$$

ist mit den Anfangswerten $s_0(x) = 1, s_1(x) = \sum_k (-1)^k q^{\binom{k+1}{2}} x^k$.

Für $q = 1$ reduziert sich das natürlich auf die bekannte Formel $\left(\frac{1}{1+x}\right)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k-1}{k} x^k$.
Während diese für $x = -1$ divergiert, bleibt (18) für $x = -1$ sinnvoll.
Aus (20) ergibt sich

$$s_n(-1) = \frac{s_{n-2}(-1)}{(1-q^{n-1})} \tag{21}$$

und daher

$$s_{2n}(-1) = \sum_k q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} 2n+k-1 \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1})}. \tag{22}$$

Was kann man über $s_{2n+1}(-1)$ aussagen?

Für $n = 0$ ergibt sich $s_1(-1) = \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k+1}{2}}$ und aus (21) schließlich

$$s_{2n+1}(-1) = \frac{\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k+1}{2}}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})}.$$

Hier gibt es keine abbrechende Darstellung. Für $s_1(-1)=\sum_{k\ge 0} q^{\binom{k+1}{2}}$ hat Gauß eine Darstellung durch ein unendliches Produkt gegeben (vgl. (24)), die üblicherweise aus der Tripelproduktidentität von Jacobi hergeleitet wird. Wir wollen etwas anders vorgehen:

Wenn man die Formel (22) in der Gestalt

$$s_{2n}(-1)=\prod_{k\ge 1}\frac{1-q^{2n+2k-1}}{1-q^{2k-1}} \tag{23}$$

schreibt, dann liegt die Vermutung nahe, dass

$$s_{2n+1}(-1)=\prod_{k\ge 1}\frac{1-q^{2n+2k}}{1-q^{2k-1}} \tag{24}$$

gilt.

Nun gilt

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}=(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots. \tag{25}$$

Zum Beweis ergänze man die linke Seite mit $(1-q^2)(1-q^4)\cdots$. Dann ergibt sich

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots}=\frac{(1-q^2)}{(1-q)}\cdot\frac{(1-q^4)}{(1-q^2)}\cdot\frac{(1-q^6)}{(1-q^3)}\cdots=(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots.$$

(25) ist die analytische Form des berühmten Satzes von Euler, dass die Anzahl der Partitionen einer Zahl in ungerade Teile gleich der Anzahl der Partitionen in verschiedene Teile ist.

Die Formel (22) lässt sich daher auch in der Gestalt

$$s_{2n}(-1)=\prod_{k\ge 1}(1+q^k)(1-q^{2n+2k-1}) \tag{26}$$

schreiben. Die Formel (24) müsste dann

$$s_{2n+1}(-1)=\prod_{k\ge 1}(1+q^k)(1-q^{2n+2k}) \tag{27}$$

lauten.

Daher sollte allgemein

$$s_n(-1)=\sum_{k\ge 0} q^{\binom{k+1}{2}}\frac{(1\underset{\cdot}{-}q^n)^k}{(1\underset{\cdot}{-}q)^k}=\prod_{k\ge 1}(1+q^k)(1-q^{n+2k-1}) \tag{28}$$

gelten.

Das ist tatsächlich der Fall und folgt aus der

Identität von Lebesgue

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(1\dotminus x)^k}{(1\dotminus q)^k}q^{\binom{k+1}{2}}=\prod_{k\geq 1}(1+q^k)(1-q^{2k-1}x). \qquad (29)$$

Wir brauchen also nur diese zu beweisen.

Victor J.W. Guo und Jiang Zeng (arXiv:math. CO/0512571) haben vor kurzem die folgende Polynomversion dieser Identität gefunden:

Polynomversion der Identität von Lebesgue

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1\dotminus q^k x)^{n+1}}=\frac{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)}{(1-x)(1-q^2x)\cdots(1-q^{2n}x)}. \qquad (30)$$

Für $q=1$ reduziert sich diese auf die triviale Aussage $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\sum_k\binom{n}{k}=\frac{2^n}{(1-x)^{n+1}}$.

Wenn wir in (30) $n\to\infty$ gehen lassen, ergibt sich

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1\dotminus q)^k}\frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1\dotminus q^k x)^{\infty}}=\frac{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots}{(1-x)(1-q^2x)(1-q^4x)\cdots}$, woraus sich durch Multiplikation mit $(1\dotminus x)^{\infty}$ die Lebesgue'sche Identität ergibt.

Ein einfacher Beweis von (30) ergibt sich folgendermaßen:
Die linke Seite von (30) ist

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1\dotminus q^k x)^{n+1}}=\left(\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}\varepsilon^k\right)\frac{1}{(1\dotminus x)^{n+1}}=(1\dotplus q\varepsilon)^n\,\frac{1}{(1\dotminus x)^{n+1}}.$$

Nun ist $(1\dotplus q\varepsilon)^n(x^k)=(1+q^{k+1})(1+q^{k+2})\cdots(1+q^{k+n})x^k$.

Daher ergibt sich unter Verwendung von

$$(1\dotplus q\varepsilon)^n\left(\frac{1}{(1\dotminus x)^{n+1}}\right)=(1\dotplus q\varepsilon)^n\left(\sum_k\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}x^k\right)$$

$$=\sum_k\frac{(1-q^{n+k})\cdots(1-q^{k+1})}{(1\dotminus q)^n}(1+q^{k+1})(1+q^{k+2})\cdots(1+q^{k+n})x^k$$

$$=\sum_k\frac{(1-q^{2k+2})\cdots(1-q^{2k+2n})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^n)x^k$$

$$=(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^n)\sum_k\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{q^2}x^k.$$

Damit ist wieder alles gezeigt.