Mathematische Randbemerkungen 12: Eine interessante Klasse von Polynomen

Johann Cigler

Im Folgenden möchte ich einige Polynome studieren, die sich in [9] bei der expliziten Berechnung der Darstellung von $(X+sD_q)^n$ ergeben haben. Es stellt sich heraus, dass sie q-Analoga von Faltungsprodukten von Fibonacci-Polynomen sind. Wie viele andere mathematische Begriffe, die sich auf natürliche Weise ergeben, haben sie einige schöne Eigenschaften. Da sie eng mit den Vertauschungseigenschaften des Multiplikationsoperators X und des $q-$Differentiationsoperators D_q verknüpft sind, dürften sie auch nicht ganz uninteressant sein.

Sei X der Multiplikationsoperator auf den Polynomen in $x,$ der durch $Xp(x)=xp(x)$ definiert ist und D der Differentiationsoperator. Ich erinnere zuerst an ein bekanntes Resultat über $(X+sD)^n$.
Definiert man Polynome $H_n(x,s)$ durch

$$H_n(x,s)=xH_{n-1}(x,s)+(n-1)sH_{n-2}(x,s) \tag{1}$$

mit den Anfangswerten $H_0(x,s)=1, H_1(x,s)=x,$ dann gilt

$$(X+sD)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_{n-k}(X,s)s^kD^k. \tag{2}$$

Die Polynome $H_n(x,s)$ sind im wesentlichen Hermite-Polynome. Es gilt
$H_n(x,s)=\sum_{2j\le n}s^j\frac{n!}{2^j j!(n-2j)!}x^{n-2j}.$
Die ersten Terme sind
$1,x,x^2+s,x^3+3sx,x^4+6sx^2+3s^2,\cdots.$

Derartige Formeln sind in der einen oder anderen Form schon lange bekannt. Ich weiß nicht, wer sie zum ersten Mal bewiesen hat. In G.-C. Rota [10] wird auf eine Arbeit von J.L. Burchnall [1] verwiesen. In etwas anderer Gestalt wurde diese Formel einige Male wiederentdeckt, vgl. Varvak [11] und die dort zitierte Literatur. Es ging dabei darum, die auftretenden Produkte von X und D so umzuformen, dass alle Terme von der Gestalt X^jD^k sind. Das wird "normal ordering" genannt. Die Formel schaut dann folgendermaßen aus:

$$(X+sD)^n=\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{Min(m,n-m)}\frac{n!s^{n-m}}{2^j j!(m-j)!(n-m-j)!}X^{m-j}D^{n-m-j}. \qquad (3)$$

Die ersten Terme in dieser Anordnung sind dann

$sD+X,$

$s^2D^2+2sXD+s+X^2,$

$s^3D^3+3s^2XD^2+3s^2D+sX^2D+3sX+X^3,$

$s^4D^4+4s^3XD^3+6s^3D^2+6s^2X^2D^2+12s^2XD+3s^2+4sX^3D+6sX^2+X^4.$

Bezeichnet man mit D_q den $q-$Differentiationsoperator, definiert durch $D_q p(x)=\frac{p(qx)-p(x)}{qx-x}$, dann ergeben sich für $(X+sD_q)^n$ der Reihe nach die folgenden Ausdrücke

$sD_q+X,$

$s^2D_q^2+(1+q)sXD_q+s+X^2,$

$s^3D_q^3+(1+q+q^2)s^2XD_q^2+(2+q)s^2D_q+(1+q+q^2)sX^2D_q+(2+q)sX+X^3,$

$s^4D_q^4+(1+q+q^2+q^3)s^3XD_q^3+(3+2q+q^2)s^3D_q^2+(1+q+2q^2+q^3+q^4)s^2X^2D_q^2$
$+(3+5q+3q^2+q^3)s^2XD_q+(2+q)s^2+(1+q+q^2+q^3)sX^3D_q+(3+2q+q^2)sX^2+X^4.$

Dabei sind die Terme, die D_q nicht enthalten, die $q-$Hermite-Polynome $H_n(x,s\,|\,q)=\left(X+sD_q\right)^n 1,$ die in [7] studiert wurden.

Wie dort gezeigt, lassen sie sich durch $q-$Lucas- Polynome der Gestalt

$$L_n(x,s|q)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} q^{\binom{k}{2}}\frac{[n]}{[n-k]}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}s^k x^{n-2k} \tag{4}$$

für $n>0$ und

$$L_0(x,s|q)=1 \tag{5}$$

einfach ausdrücken.

Es gilt nämlich

$$H_n(x,(1-q)s|q)=\left(X+(1-q)sD_q\right)^n 1=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{j}s^j L_{n-2j}(x,-s|q). \tag{6}$$

Diese $q-$Lucas -Polynome haben eine verblüffende Eigenschaft. Sie bilden nämlich nicht nur ein $q-$Analogon der üblichen Lucas-Polynome, sondern lassen sich auch direkt auf diese zurückführen. Es gilt nämlich (vgl. [4], [6])

$$\begin{aligned}L_n(x,s|q)&=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} q^{\binom{k}{2}}\frac{[n]}{[n-k]}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}s^k x^{n-2k}=L_n\left(\left(X+(q-1)sD_q\right),s|1\right)1\\&=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}s^k\left(X+(q-1)sD_q\right)^{n-2k}1.\end{aligned} \tag{7}$$

Gleichbedeutend damit ist die Rekursion

$$L_n(x,s|q)-(X+(q-1)sD_q)L_{n-1}(x,s|q)-sL_{n-2}(x,s|q)=0 \tag{8}$$

für $n>2.$ Für $n=2$ erhält man den Wert $s.$

Würde man $L_0(x,s|q)=2$ setzen, dann würde (8) für alle $n\geq 2$ gelten.
Das ist in gewisser Weise schöner und die richtige Wahl für andere Anwendungen. In unserem Fall brauchen wir jedoch $L_0(x,s|q)=1.$ In [8] habe ich für die hier verwendete Version der Lucas-Polynome die Bezeichnung $L_n^*(x,s)$ gewählt. Da im Folgenden aber

nur diese Version verwendet wird, kann kein Missverständnis entstehen. Es sei auch darauf hingewiesen, dass es in der Literatur zwei verschiedene Normierungen für die Fibonacci- Polynome $F_n(x,s)$ und Fibonacci- Zahlen F_n gibt. Die übliche ist $F_n(x,s)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-j-1}{j}s^j x^{n-1-2j}$. Diese ist für die zahlentheoretischen Aspekte am geeignetsten, weil dann $ggT(F_n,F_m)=F_{ggT(n,m)}$ gilt. Für kombinatorische Anwendungen ist $f_n(x,s)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-j}{j}s^j x^{n-2j}$ nützlicher. Ich unterscheide beide durch Groß- bzw. Kleinschreibung und verwende im Folgenden nur $f_n(x,s)$. Für die Fibonacci-Zahlen $\left(f_n = f_n(1,1)\right)=\left(1,1,2,3,5,8,\cdots\right)$ und die Lucas-Zahlen $\left(L_n(1,1)=L_n\right)=\left(1,1,3,4,7,11,18,\cdots\right)$ gilt $L_n = f_n + f_{n-2}$. In der hier verwendeten Version gilt auch $f_n=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^j L_{n-2j}$.

Computerexperimente führten mich zur folgenden Vermutung, die ich in [9] verifiziert habe.

$$\left(X+(1-q)sD_q\right)^n=\sum_{k=0}^{n}A(n,k)D_q^k \tag{9}$$

mit

$$A(n,0)=H_n(x,(1-q)s\,|\,q) \tag{10}$$

und

$$\begin{gathered}A(n,k)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-k}{2}\right\rfloor}\binom{n}{i}(1-q)^k s^{k+i}\frac{[n-2i]}{[k]}\\ \sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-k-2i}{2}\right\rfloor}s^j\begin{bmatrix}n-j-2i-1\\ k-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j+k-1\\ k-1\end{bmatrix}q^{j(n-j-2i-k)}L_{n-k-2j-2i}(X,-s\,|\,q)D_q^k\end{gathered} \tag{11}$$

für $k>0$.

Weitere Berechnungen zeigten, dass sich der zweite Ausdruck noch vereinfachen lässt:

$$\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{j(n-j)}(-s)^j \begin{bmatrix} n+k-1-j \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} L_{n-2j}(x,s\,|\,q) = \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{\binom{m}{2}} \frac{[k]}{[n+k-m]} \begin{bmatrix} n+k-m \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-m \\ m \end{bmatrix} s^m x^{n-2m}. \tag{12}$$

Ich will zunächst von der rechten Seite ausgehen und die Äquivalenz später zeigen.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ seien die verallgemeinerten $q-$Lucas- Polynome definiert durch

$$L_n^{(k)}(x,s\,|\,q) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{\binom{j}{2}} \frac{[n+k]}{[n+k-j]} \begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} \tag{13}$$

und verallgemeinerte $q-$Fibonacci-Polynome durch

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(x,s\,|\,q) &= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \frac{[k]}{[n+k-j]} \begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} \\ &= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} \\ &= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+k-2j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} \end{aligned} \tag{14}$$

Es ist klar, dass $L_n^{(0)}(x,s\,|\,q) = L_n(x,s\,|\,q)$ ist. Weiters ist

$$L_n^{(k)}(x,qs\,|\,q) = \frac{[n+k]}{[k]} f_n^{(k)}(x,s\,|\,q) \tag{15}$$

für $k>0.$ Für $k=0$ ist $f_n^{(0)}(x,s)=[n=0].$ Für $k=1$ ergibt sich

$f_n^{(1)}(x,s\,|\,q)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} q^{\binom{j+1}{2}}\begin{bmatrix} n-j \\ j\end{bmatrix} s^j x^{n-2j}.$ Das ist ein $q-$Analogon der Fibonacci-

Polynome $f_n(x,s)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-j}{j} s^j x^{n-2j}.$ Auch hier gilt (vgl. [4],[6])

$$f_n^{(1)}(x,s\,|\,q)=f_n^{(1)}(x+(q-1)sD_q,s\,|\,1). \tag{16}$$

Mit diesen Notationen kann (9) folgendermaßen formuliert werden:

$$\left(X+(1-q)sD_q\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-k}{2}\right\rfloor}\binom{n}{j} s^j L_{n-2j-k}^{(k)}(X,-s\,|\,q)\right)(1-q)^k s^k D_q^k. \tag{17}$$

Daraus ist u.a. ersichtlich, dass die Polynome

$$\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-k}{2}\right\rfloor}\binom{n}{j}\left(\frac{s}{1-q}\right)^j L_{n-2j-k}^{(k)}\left(X,-\frac{s}{1-q}\,|\,q\right) \tag{18}$$

nicht-negative Koeffizienten haben und für $q\to 1$ gegen $\binom{n}{k}H_{n-k}(x,s)$

streben.

Für $q=1$ ist höchstwahrscheinlich alles wohlbekannt. Ich habe mir jedoch nicht die Mühe gemacht, die unüberschaubare Literatur daraufhin durchzusehen. Die erzeugende Funktion der Polynome $f_n^{(k)}(x,s\,|\,1)$ ist

$$\sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}(x,s\,|\,1)z^n=\frac{1}{\left(1-xz-sz^2\right)^k} \tag{19}$$

und daher ist

$$f_n^{(k)}(x,s\,|\,1) - x f_{n-1}^{(k)}(x,s\,|\,1) - s f_{n-2}^{(k)}(x,s\,|\,1) = f_n^{(k-1)}(x,s\,|\,1) \tag{20}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn man $f_n^{(k)}(x,s\,|\,1) = 0$ für $n < 0$ setzt. Die $f_n^{(k)}(x,s\,|\,1)$ sind also die $k-$fachen Faltungen der Fibonacci- Polynome. Die Formel für die erzeugende Funktion ergibt sich sofort aus der folgenden Identität.

$$\sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}(x,s\,|\,1) z^n = \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{2j\leq n} \binom{n+k-1-j}{k-1}\binom{n-j}{j} s^j x^{n-2j}$$
$$= \sum_{m\geq 0} z^m \sum_{j\leq m} \binom{m+k-1}{k-1}\binom{m}{j} s^j z^j x^{m-j} = \sum_{m\geq 0} z^m \binom{m+k-1}{k-1} \sum_{j\leq m} \binom{m}{j} s^j z^j x^{m-j}$$
$$= \sum_{m\geq 0} \binom{m+k-1}{k-1} \left(sz^2 + xz\right)^m = \frac{1}{\left(1 - xz - sz^2\right)^k}.$$

Für die erzeugende Funktion der Polynome $L_n^{(k)}(x,s\,|\,1)$ gilt

$$\sum_{n\geq 0} L_n^{(k)}(x,s\,|\,1) z^n = \frac{1+sz^2}{\left(1-xz-sz^2\right)^{k+1}}. \tag{21}$$

Das folgt aus der Identität

$$f_n^{(k+1)}(x,s\,|\,1) + s f_{n-2}^{(k+1)}(x,s\,|\,1) = L_n^{(k)}(x,s\,|\,1) \tag{22}$$

für $n \geq 2$, die durch Vergleich von (13) und (14) leicht verifiziert werden kann und den Anfangswerten $f_0^{(k+1)}(x,s\,|\,1) = L_0^{(k)}(x,s\,|\,1) = 1$ und $f_1^{(k+1)}(x,s\,|\,1) = L_1^{(k)}(x,s\,|\,1) = (k+1)x.$

Die Formel (22) hat ein schönes $q-$Analogon:

$$f_n^{(k+1)}(x,s\,|\,q) + q^{n+k} s f_{n-2}^{(k+1)}(x,s\,|\,q) = L_n^{(k)}(x,qs\,|\,q). \tag{23}$$

Zum Beweis betrachten wir zuerst den Fall $k=0.$ Hier ist zu zeigen, dass

$$\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} + q^n s \sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n-2-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2-2j} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \frac{[n]}{[n-j]} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j}$$

gilt. Koeffizientenvergleich zeigt, dass das gleichbedeutend ist mit der offenbar richtigen Gleichung

$$\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j-1 \end{bmatrix} = \frac{[n]}{[n-j]} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}.$$

Im allgemeinen Fall ist zu zeigen, dass

$$\begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} + q^{n+k-j} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j-1 \end{bmatrix} = \frac{[n+k]}{[k]} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}$$

gilt. Das ist äquivalent mit der Identität

$$\begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j-1 \end{bmatrix} = \frac{[j]}{[n+k-j]} \begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix},$$

die unmittelbar verifiziert werden kann.

Nun wollen wir ein $q-$Analogon der erzeugenden Funktionen herleiten. Genauso wie oben erhalten wir

$$\sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}(x,s\,|\,q)z^n = \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{2j\leq n} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-1-j \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j}$$

$$= \sum_{m\geq 0} z^m \sum_{j\leq m} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} s^j z^j x^{m-j} = \sum_{m\geq 0} z^m \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \sum_{j\leq m} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} s^j z^j x^{m-j}$$

.

Nun gilt bekanntlich (vgl. z.B. [3])

$$(1+t)(1+qt)\cdots(1+q^{n-1}t) = \sum_j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} t^j.$$

Daher ist

$$\sum_{j\leq m} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} s^j z^j x^{m-j} = (x+qsz)(x+q^2sz)\cdots(x+q^m sz)\,.$$

Das ergibt

$$\sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}(x,s\,|\,q)z^n = \sum_{m\geq 0} z^m \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} (x+qsz)(x+q^2sz)\cdots(x+q^m sz) \qquad (24)$$

.

Der Spezialfall $k=1, x=1, s=-\frac{1}{q}$ ist besonders erwähnenswert. Er ist eng verknüpft mit Euler's Beweis des Pentagonalzahlensatzes und ergibt (vgl.[6] und die dort zitierte Literatur)

$$\sum_{n\geq 0} z^n(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{n-1}z) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \left(q^{\frac{k(3k-1)}{2}} z^{3k} + q^{\frac{k(3k+1)}{2}} z^{3k+1} \right)$$

Grund dafür ist die Tatsache, dass $f_{3n}^{(1)}\left(1,-\frac{1}{q}\,|\,q\right) = (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}$,

$f_{3n+1}^{(1)}\left(1,-\frac{1}{q}\,|\,q\right) = (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}}$ und $f_{3n+2}^{(1)}\left(1,-\frac{1}{q}\,|\,q\right) = 0$ ist.

Weiters ist $\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(1,-1\,|\,q) = \prod_{j=k}^{\infty}(1-q^j)$.

Man kann die erzeugende Funktion noch in eine andere Gestalt bringen. Betrachten wir den linearen Operator ε, definiert durch $\varepsilon f(s) = f(qs)$ und den Multiplikationsoperator S mit $Sf(s) = sf(s)$.

Dann gilt $(Xz\varepsilon)(qSz^2\varepsilon) = q(qSz^2\varepsilon)(Xz\varepsilon)$.

Für Operatoren A,B mit $BA=qAB$ gilt bekanntlich (vgl. z.B. [3]) der $q-$ binomische Lehrsatz $(A+B)^n=\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}A^jB^{n-j}$.

Nach dem $q-$binomischen Lehrsatz ist also

$$\left(Xz\varepsilon+qSz^2\varepsilon\right)^m=\sum_j\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}(qSz^2\varepsilon)^j(Xz\varepsilon)^{m-j}=\sum_j q^{\binom{j+1}{2}}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}S^jz^{m+j}X^{m-j}\varepsilon^m.$$

Daher erhalten wir unter Benützung der wohlbekannten Formel

$$\frac{1}{(1-t)\cdots(1-q^{k-1}t)}=\sum_{n\geq 0}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}t^n$$

ein schönes $q-$Analogon der Formel (19)

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}f_n^{(k)}(x,s\,|\,q)z^n&=\sum_{m\geq 0}q^{\binom{m}{2}}\begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}\sum_{j\leq m}q^{\binom{j+1}{2}}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}s^jz^{j+m}x^{m-j}\\&=\sum_{m\geq 0}q^{\binom{m}{2}}\begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}\left(Xz\varepsilon+qSz^2\varepsilon\right)^m 1\\&=\frac{1}{\left(1-(Xz\varepsilon+qSz^2\varepsilon)\right)\left(1-q(Xz\varepsilon+qSz^2\varepsilon)\right)\cdots\left(1-q^{k-1}(Xz\varepsilon+qSz^2\varepsilon)\right)}1.\end{aligned} \tag{25}$$

.

Daraus ergibt sich, wenn man beide Seiten mit $\left(1-q^{k-1}(Xz\varepsilon+qSz^2\varepsilon)\right)$ multipliziert

$$f_n^{(k)}(x,s\,|\,q)-q^{k-1}xf_{n-1}^{(k)}(x,qs\,|\,q)-q^ksf_{n-2}^{(k)}(x,qs\,|\,q)=f_n^{(k-1)}(x,s\,|\,q) \tag{26}$$

Multipliziert man dagegen mit $\left(1-(Xz\varepsilon+qSz^2\varepsilon)\right)$, so ergibt sich

$$f_n^{(k)}(x,s\,|\,q)-xf_{n-1}^{(k)}(x,qs\,|\,q)-qsf_{n-2}^{(k)}(x,qs\,|\,q)=f_n^{(k-1)}(qx,qs\,|\,q) \tag{27}$$

Wir können auch noch eine andere Version der erzeugenden Funktion finden. Sei η der lineare Operator mit $\eta f(x) = f(qx)$.
Dann ist
$(qSz^2\varepsilon\eta)(Xz) = q(Xz)(qSz^2\varepsilon\eta)$.
Daher ist nach dem $q-$binomischen Lehrsatz

$$\left(Xz + qSz^2\varepsilon\eta\right)^m = \sum_j \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} (Xz)^{m-j}(qSz^2\varepsilon\eta)^j = \sum_j q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} S^j z^{m+j} X^{m-j} \varepsilon^m \eta^m.$$

Somit ist auch

$$\sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}(x,s\,|\,q)z^n = \sum_{m\geq 0} q^{\binom{m}{2}} \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \left(Xz + qSz^2\varepsilon\eta\right)^m 1$$

$$= \frac{1}{\left(1-(Xz+qSz^2\varepsilon\eta)\right)\left(1-q(Xz\varepsilon+qSz^2\varepsilon\eta)\right)\cdots\left(1-q^{k-1}(Xz\varepsilon+qSz^2\varepsilon\eta)\right)}1. \tag{28}$$

.

Das bedeutet

$$f_n^{(k)}(x,s\,|\,q) - xf_{n-1}^{(k)}(x,s\,|\,q) - qsf_{n-2}^{(k)}\left(qx,qs\,|\,q\right) = f_n^{(k-1)}\left(qx,qs\,|\,q\right) \tag{29}$$

und

$$f_n^{(k)}(x,s\,|\,q) - q^{k-1}xf_{n-1}^{(k)}(x,s\,|\,q) - q^k sf_{n-2}^{(k)}\left(qx,qs\,|\,q\right) = f_n^{(k-1)}\left(x,s\,|\,q\right). \tag{30}$$

Die Identität (16) lässt sich erweitern zu

$$\begin{aligned} &f_n^{(k)}(x,s\,|\,q) - \left(X + (q-1)sD_q\right) f_{n-1}^{(k)}(x,s\,|\,q) - sf_{n-2}^{(k)}\left(x,s\,|\,q\right) \\ &= f_n^{(k-1)}\left(qx,s\,|\,q\right) = q^n f_n^{(k-1)}\left(x,\frac{s}{q^2}\,|\,q\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Denn sie bedeutet

$$\sum_{j=0} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} - \sum_{j=0} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j}$$
$$-(q-1)s\sum_{j=0} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j \end{bmatrix} s^j [n-1-2j] x^{n-2-2j}$$
$$-s\sum_{j=0} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-3 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-2 \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2-2j} - \sum_{j=0} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j (qx)^{n-2j} = 0.$$

Der Koeffizient von $s^j x^{n-2j}$ ist dabei

$$q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} - q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j \end{bmatrix} - (q-1) q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j-1 \end{bmatrix} [n+1-2j]$$
$$-q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j-1 \end{bmatrix} - q^{\binom{j+1}{2}+n-2j} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}$$
$$= q^{\binom{j+1}{2}} \frac{[n+k-j-1]!}{[k-1]![j]![n-2j]!} - q^{\binom{j+1}{2}} \frac{[n+k-j-2]!}{[k-1]![j]![n-2j-1]!} - (q^{n+1-2j}-1) q^{\binom{j}{2}} \frac{[n+k-j-1]!}{[k-1]![j-1]![n-2j+1]!}$$
$$-q^{\binom{j}{2}} \frac{[n+k-j-2]!}{[k-1]![j-1]![n-2j]!} - q^{\binom{j+1}{2}+n-2j} \frac{[n+k-j-2]!}{[k-2]![j]![n-2j]!}$$

Hebt man $\dfrac{q^{\binom{j}{2}}[n+k-j-2]!}{[k-1]![j]![n-2j+1]!}$ heraus, dann bleibt der Faktor

$$q^j[n+k-j-1][n-2j+1] - q^j[n-2j][n-2j+1] - (q^{n+1-2j}-1)[n+k-j-1][j]$$
$$-[j][n-2j+1] - q^{n-j}[k-1][n-2j+1] = 0.$$

Nun wollen wir noch (12) beweisen.

$$f_n^{(k)}(x,s\,|\,q) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{j(n-j)} (-qs)^j \begin{bmatrix} n+k-1-j \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} L_{n-2j}(x,qs\,|\,q). \qquad (32)$$

Das stimmt für $k=0$. Für $k=1$ bedeutet es

$$f_n^{(1)}(x,s\,|\,q)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} q^{j(n-j)}(-qs)^j L_{n-2j}(x,qs\,|\,q). \tag{33}$$

Das folgt aus (23) für $k=0.$ Denn

$f_n^{(1)}(x,s\,|\,q)+q^n s f_{n-2}^{(1)}(x,s\,|\,q)=L_n(x,qs\,|\,q)$ impliziert

$$\begin{aligned}
&f_n^{(1)}(x,s\,|\,q)=L_n(x,qs\,|\,q)-q^n s f_{n-2}^{(1)}(x,s\,|\,q)=L_n(x,s\,|\,q)\\
&-q^n s\left(L_{n-2}(x,qs\,|\,q)-q^{n-2} s f_{n-2}^{(1)}(x,s\,|\,q)\right)\\
&=\cdots=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} q^{j(n-j)}(-qs)^j L_{n-2j}(x,s\,|\,q).
\end{aligned}$$

Nun müssen wir nur noch (23) überprüfen.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} q^{j(n-j)}(-qs)^j \begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+k \\ k \end{bmatrix} L_{n-2j}(x,qs\,|\,q)\\
&+q^{n+k}s\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor} q^{j(n-2-j)}(-qs)^j \begin{bmatrix} n-2+k-j \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+k \\ k \end{bmatrix} L_{n-2j-2}(x,qs\,|\,q)\\
&=\frac{[n+k]}{[k]}\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} q^{j(n-j)}(-qs)^j \begin{bmatrix} n+k-1-j \\ k-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} L_{n-2j}(x,qs\,|\,q)
\end{aligned}$$

Das ist äquivalent mit

$$\begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+k \\ k \end{bmatrix}-q^k\begin{bmatrix} n-1+k-j \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+k-1 \\ k \end{bmatrix}=\frac{[n+k]}{[k]}\begin{bmatrix} n+k-1-j \\ k-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

oder

$[n+k-j][j+k]-q^k[n-j][j]-[n+k][k]=0.$

Analog zu (33) folgt allgemein aus (23)

$$f_n^{(k+1)}(x,s\,|\,q)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} q^{j(n+k-j)}(-qs)^j\,\frac{[n+k-2j]}{[k]}f_{n-2j}^{(k)}(x,s\,|\,q). \tag{34}$$

Da jedes $L_n^{(k)}(x,s\,|\,q)$ ein Polynom vom Grad n ist, lässt sich x^n eindeutig als Linearkombination dieser Polynome darstellen. Es gilt

$$\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}(-s)^j\begin{bmatrix} n+k \\ j\end{bmatrix}L_{n-2j}^{(k)}(x,s)=\begin{bmatrix} n+k \\ k\end{bmatrix}x^n \tag{35}$$

oder anders ausgedrückt

$$\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}(-s)^j\,\frac{[k]![n]!}{[j]![n+k-j]!}L_{n-2j}^{(k)}(x,s)=x^n. \tag{36}$$

Zum Beweis vergleichen wir die Koeffizienten. Als Koeffizient von x^{n-2m} ergibt sich auf der linken Seite

$$\frac{[n]!}{[m]![n-2m]!}\sum_{i+j=m}(-1)^j\begin{bmatrix} m \\ j\end{bmatrix}\frac{[n-2j+k]}{[n+k-j]!}[n-j+k-m-1]!\,q^{\binom{i}{2}}.$$

Es ist also zu zeigen, dass für $2m\le n$

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\begin{bmatrix} m \\ i\end{bmatrix}\frac{[n-2m+2i+k]}{[n+k-m+i]!}[n-2m+k+i-1]!\,q^{\binom{i}{2}}=[m=0]$$

oder für $m\le n$

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i q^{\binom{i}{2}}\begin{bmatrix} m \\ i\end{bmatrix}\frac{[n-m+k+2i]}{[n+k+i][n+k+i-1]\cdots[n+k-m+i]}=[m=0]$$

gilt.

Das ist ein Spezialfall der Formel

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}\frac{1-q^{2j}a}{\left(q^j a;q\right)_{m+1}}=[m=0] \tag{37}$$

für $a=q^{n-m+k}$. Diese Formel trat in [5] in anderem Zusammenhang auf. Dabei bedeutet $(a;q)_n=(1-qa)(1-q^2a)\cdots(1-q^{n-1}a).$ Sie lässt sich sehr einfach mit Hilfe des $q-$Zeilbergeralgorithmus beweisen.

Ein anderer Beweis kann wie in [8] mit den Methoden von [2] geführt werden.

Betrachtet man das lineare Funktional Λ_k, definiert durch

$$\Lambda_k(L_n^{(k)}(x,-1))=[n=0], \tag{38}$$

dann ergibt sich aus (36) $\Lambda_k(x^{2n+1})=0$ und

$$\Lambda_k(x^{2n})=\frac{[k]![2n]!}{[n]![n+k]!}. \tag{39}$$

Für $k=0$ ergibt sich das $q-$Analogon $\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$ der zentralen Binomialkoeffizienten.

Für $k=1$ erhalten wir ein $q-$Analogon der Catalan-Zahlen $\Lambda_k(x^{2n})=\frac{[2n]!}{[n]![n+1]!}=\frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}.$

Die rechte Seite von (35) ist unabhängig von $s.$ Vergleicht man mit (18), so fällt auf, dass

$$\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-k}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\left(\frac{s}{1-q}\right)^j L_{n-2j-k}^{(k)}\left(X,-\frac{s}{1-q}\,|\,q\right)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^{n-k}$$

ist, also für $q \to 1$ einen anderen Grenzwert hat als (18), wo statt der $q-$ Binomialkoeffizienten $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{j}$ auftreten.

In allen bisher betrachteten Rekurrenzrelationen für $f_n^{(k)}(x,s\,|\,q)$ tritt irgendwo qx bzw. qs statt x bzw. s auf. Es gibt aber auch echte Rekurrenzrelationen, wo jeweils nur feste Werte x,s vorkommen, so wie das für $q=1$ der Fall ist. Dabei treten jedoch Polynome als Koeffizienten auf.

Für $q=1$ gibt es u.a. die folgende Rekursion

$$nf_n^{(k)}(x,s\,|\,1)-(n+k-1)xf_{n-1}^{(k)}(x,s\,|\,1)-(n+2k-2)sf_{n-2}^{(k)}(x,s\,|\,1)=0. \tag{40}$$

Für $k=1$ reduziert sich das auf die übliche Rekursion
$f_n^{(1)}(x,s\,|\,1)-xf_{n-1}^{(1)}(x,s\,|\,1)-sf_{n-2}^{(1)}(x,s\,|\,1)=0.$

Das folgt sofort aus der erzeugenden Funktion.
Denn

$$\begin{aligned}
&\sum_n nf_n^{(k)}(x,s)z^n - x\sum_n (n-1)\,f_{n-1}^{(k)}(x,s)z^n - s\sum_n (n-2)\,f_{n-2}^{(k)}(x,s)z^n \\
&=(1-xz-sz^2)z\frac{d}{dz}\frac{1}{(1-xz-sz^2)^k}=(1-xz-sz^2)\frac{k(xz+2sz^2)}{(1-xz-sz^2)^{k+1}} \\
&=\frac{k(xz+2sz^2)}{(1-xz-sz^2)^k}=\sum_n\left(kxf_{n-1}^{(k)}(x,s)+2ksf_{n-2}^{(k)}(x,s)\right)z^n.
\end{aligned} \tag{41}$$

Das entsprechende $q-$Analogon ist etwas komplizierter:

$f_n^{(k)}(x,s\,|\,q)$ erfüllt

$$\begin{aligned}
&[n+k-3][n]\,f_n^{(k)}(x,s\,|\,q)=x[n+k-3][n+k-1]\,f_{n-1}^{(k)}(x,s\,|\,q) \\
&+sq^{n-1}[2][k-1][n+k-2]\,f_{n-2}^{(k)}(x,s\,|\,q)+sxq^{n+k-2}[n+k-3][n+k-1]\,f_{n-3}^{(k)}(x,s\,|\,q) \\
&+s^2q^{n-1}[n+k-1][n+2k-4]\,f_{n-4}^{(k)}(x,s\,|\,q).
\end{aligned} \tag{42}$$

Die etwas mühsame Verifikation sei dem Leser überlassen.

Für $k=1$ kann man die Terme $[n][n-2]$ kürzen und erhält die Rekursion

$$f_n^{(1)}(x,s\,|\,q)=xf_{n-1}^{(1)}(x,s\,|\,q)+q^{n-1}sxf_{n-3}^{(1)}(x,s\,|\,q)+q^{n-1}s^2f_{n-4}^{(k)}(x,s\,|\,q).$$

Literaturhinweise

[1] J. L. Burchnall, A note on the polynomials of Hermite, Quart. J. Math. 12(1941), 9-11

[2] L. Carlitz, Some inversion formulas, Rend. Circolo Mat. Palermo, 12 (1963), 183-199

[3] J. Cigler, Elementare $q-$Identitäten, Sem. Lotharingien Comb., B05a (1981), 29 pp.

[4] J. Cigler, Einige $q-$Analoga der Lucas- und Fibonacci-Polynome, Sitzungsber. ÖAW 211 (2002), 3-20

[5] J. Cigler, A simple approach to some Hankel determinants, arXiv:0902.1650

[6] J. Cigler, A new class of $q-$Fibonacci polynomials, Electr. J. Comb. 10 (2003), #R19

[7] J. Cigler and J. Zeng, Two curious $q-$analogues of Hermite polynomials, arXiv: 0905.0228

[8] J. Cigler, $q-$Lucas polynomials and associated Rogers-Ramanujan type identities, arXiv:0907.0165

[9] J. Cigler, Some operator identities related to $q-$Hermite polynomials, arXiv: 1006.3210

[10] G.-C. Rota, Finite Operator Calculus, Academic Press 1975

[11] A. Varvak, Rook numbers and the normal ordering problem, J. Comb. Th. A 112 (2005), 292-307