Sitzungsber. Abt. II (2002) 211: 3–20

Sitzungsberichte

Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Einige q-Analoga der Lucas- und Fibonacci-Polynome

Von

Johann Cigler

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 21. März 2002
durch das w. M. Johann Cigler)

Abstract

The Lucas polynomials $L_n(x,y) = \sum_{k<n} \binom{n-k}{k} \frac{n}{n-k} x^{n-2k} y^k$ satisfy $L_n(1+x,-x) = 1+x^n$. A simple consequence is the identity $\binom{n-i}{r} + \binom{n-i}{r-i} = \sum_{j<i} (-1)^j \binom{i-j}{j} \frac{i}{i-j} \binom{n-2j}{r-j}$ for the binomial coefficients. In this paper we show first that there exist coefficients $c(i,j,s)$ such that $\begin{bmatrix} n-i \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-i \\ r-i \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{i} c(i,j,q^n) \begin{bmatrix} n-2j \\ r-j \end{bmatrix}$ holds for all integers n, i, r, if $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ denotes a q-binomial coefficient. These coefficients are used to define q-analogs of the Lucas polynomials. Corresponding q-Fibonacci polynomials are also introduced. As application recurrences for q-binomial sums are obtained.

Mathematics Subject Classifications: 05A10, 05A30, 11B37, 11B39, 11B65.
Keywords: q-Analog, Lucas polynomial, Fibonacci polynomial, binomial coefficient, binomial sum, difference operator, recurrence.

0. Einleitung

Die Lucas-Polynome

$$L_n(x,y) = \sum_{k<n} \binom{n-k}{k} \frac{n}{n-k} x^{n-2k} y^k \tag{1}$$

sind durch die Rekurrenz

$$L_n(x,y) = xL_{n-1}(x,y) + yL_{n-2}(x,y) \tag{2}$$

und die Anfangswerte

$$L_0(x,y) = 2, \qquad L_1(x,y) = x \tag{3}$$

charakterisiert. Sie können auch durch die Formel von Binet

$$L_n(x,y) = \left(\frac{x+\sqrt{x^2+4y}}{2}\right)^n + \left(\frac{x-\sqrt{x^2+4y}}{2}\right)^n \tag{4}$$

dargestellt werden. (vgl. z.B. [5], 5.75). Sie sind Polynome vom Grad n in x. Ersetzt man x durch $1+x$ und y durch $-x$ in (4) so ergibt sich

$$L_n(1+x,-x) = 1+x^n. \tag{5}$$

Analog sind die Fibonacci-Polynome

$$F_n(x,y) = \sum_{k \le (n-1)/2} \binom{n-1-k}{k} x^{n-1-2k} y^k \tag{6}$$

durch dieselbe Rekurrenz und die Anfangswerte

$$F_0(x,y) = 0, \qquad F_1(x,y) = 1 \tag{7}$$

charakterisiert.

Für sie ergibt die Formel von Binet

$$F_n(x,y) = \frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4y}}{2}\right)^n - \left(\frac{x+\sqrt{x^2+4y}}{2}\right)^n}{\sqrt{x^2+4y}}. \tag{8}$$

Sie sind Polynome vom Grad $n-1$ in x. Ersetzt man x durch $1+x$ und y durch $-x$ in (8) so ergibt sich

$$F_n(1+x,-x) = \frac{x^n-1}{x-1} = 1+x+\cdots+x^{n-1}$$

und daher auch

$$F_n(1+x,-x) - xF_{n-1}(1+x,-x) = \frac{x^n-1}{x-1} - x\frac{x^{n-1}-1}{x-1} = 1.$$

Betrachtet man den Vektorraum aller Funktionen f auf den natürlichen Zahlen und definiert man den Verschiebungsoperator E und den Differenzenoperator $\Delta = E-1$ wie üblich durch $Ef(n) = f(n+1)$ und $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$, dann gilt also $L_i(E,-\Delta) = I + \Delta^i$ und $F_i(E,-\Delta) = I + \Delta + \cdots + \Delta^{i-1}$, sowie $F_i(E,-\Delta) - \Delta F_{i-1}(E,-\Delta) = I$, wenn I die Identität bedeutet. Für $f(n) = \binom{n}{r}$ mit $r \in \mathbb{N}$ reduzieren sich diese Formeln auf

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-i} = L_i(E,-\Delta)\binom{n}{r}$$

oder anders ausgedrückt auf

$$\binom{n-i}{r}+\binom{n-i}{r-i}=\sum_{j<i}(-1)^j\binom{i-j}{j}\frac{i}{i-j}\binom{n-2j}{r-j}, \qquad (9)$$

sowie

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{i-j}{j}\binom{n+i-2j}{r-j}=\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n}{r-j}. \qquad (10)$$

Aus $F_i(E,-\Delta)-\Delta F_{i-1}(E,-\Delta)=I$ ergibt sich die konkrete Darstellung von $\binom{n}{r}$ als Linearkombination der Polynome $\binom{n+i-j}{r-\lceil \frac{j}{2}\rceil}$, $0\leq j<i$, nämlich

$$\binom{n}{r}=\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{i-j}{j}\binom{n+i-2j}{r-j}-$$
$$-\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{i-j-1}{j}\binom{n+i-2j-1}{r-j-1}. \qquad (11)$$

Unser Ziel besteht darin, solche q-Analoga der Lucas- und Fibonacci-Polynome zu finden, die auch q-Analoga der obigen Formeln liefern. Wir betrachten dabei q wahlweise als eine Unbestimmte bzw als komplexe Zahl.

Es zeigt sich, dass man dabei im Fall der Lucas-Polynome als q-Analogon der Binomialkoeffizienten die q-Binomialkoeffizienten $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ und im anderen Fall die modifizierten q-Binomialkoeffizienten $q^{\binom{r}{2}}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ wählen muss.

1. q-Lucas- und q-Fibonacci-Polynome

Satz 1. *Es gibt Koeffizienten $c(i,j,q^n)$, die unabhängig von r sind, so dass gilt*

$$\begin{bmatrix} n-i \\ r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-i \\ r-i \end{bmatrix}=\sum_{j=0}^{i}c(i,j,q^n)\begin{bmatrix} n-2j \\ r-j \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Wir zeigen zuerst, dass die Formel für $i=1$ gilt.

In diesem Fall verifiziert man mittels der Rekurrenzrelationen für die q-Binomialkoeffizienten (vgl. z.B. [1] oder [2]) die Identität

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} - (q^{n-1}-1)\begin{bmatrix} n-2 \\ r-1 \end{bmatrix}.$$

Es ist also $c(1,0,q^n)=1$, $c(1,1,q^n)=1-q^{n-1}=1-\frac{q^n}{q}$.
Für $i=0$ haben wir $c(0,0,q^n)=2$.
Nun wenden wir Induktion an:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} n-i-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-i-1 \\ r-i-1 \end{bmatrix} \\
&\quad = \left\{ \begin{bmatrix} n-1-i \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1-i \\ r-i \end{bmatrix} \right\} \\
&\qquad - \begin{bmatrix} n-2-(i-1) \\ r-1-(i-1) \end{bmatrix} \\
&\qquad + \left\{ \begin{bmatrix} n-1-i \\ r-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1-i \\ r-1-i \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} n-2-(i-1) \\ r-1 \end{bmatrix} = \\
&\quad = \sum c(i,j,q^{n-1}) \begin{bmatrix} n-1-2j \\ r-j \end{bmatrix} + \\
&\qquad + \sum c(i,j,q^{n-1}) \begin{bmatrix} n-1-2j \\ r-1-j \end{bmatrix} - \\
&\qquad - \sum c(i-1,j,q^{n-2}) \begin{bmatrix} n-2-2j \\ r-1-j \end{bmatrix} = \\
&\quad = \sum c(i,j,q^{n-1}) \left\{ \begin{bmatrix} n-2j-1 \\ r-j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-2j-1 \\ r-1-j \end{bmatrix} \right\} \\
&\qquad - \sum c(i-1,j,q^{n-2}) \begin{bmatrix} n-2-2j \\ r-1-j \end{bmatrix} = \\
&\quad = \sum c(i,j,q^{n-1}) \left\{ \begin{bmatrix} n-2j \\ r-j \end{bmatrix} - \right. \\
&\qquad \left. - (q^{n-2j-1}-1) \begin{bmatrix} n-2j-2 \\ r-1-j \end{bmatrix} \right\} -
\end{aligned}$$

$$-\sum c(i-1,j,q^{n-2})\begin{bmatrix} n-2-2j \\ r-1-j \end{bmatrix} =$$
$$= \sum \begin{bmatrix} n-2j \\ r-j \end{bmatrix} (c(i,j,q^{n-1})-$$
$$-(q^{n-2j+1}-1)c(i,j-1,q^{n-1})-$$
$$-c(i-1,j-1,q^{n-2})).$$

Dabei haben wir für $\begin{bmatrix} n-2j-1 \\ r-j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-2j-1 \\ r-1-j \end{bmatrix}$ nach Induktionsvoraussetzung $(i=1)$ den Ausdruck $\begin{bmatrix} n-2j \\ r-j \end{bmatrix} - (q^{n-2j-1}-1)$ $\begin{bmatrix} n-2j-2 \\ r-1-j \end{bmatrix}$ eingesetzt.

Somit ergibt sich schließlich

$$c(i+1,j,q^n) =$$
$$= c(i,j,q^{n-1}) - (q^{n-2j+1}-1)c(i,j-1,q^{n-1})-$$
$$-c(i-1,j-1,q^{n-2}).$$

Ersetzen wir q^n durch s, so erhalten wir für die Folge der Koeffizienten $c(i,j,s) = c(i,j,s,q)$

$$c(i,j,s,q) = c\left(i-1,j,\frac{s}{q},q\right) - \left(\frac{s}{q^{2j-1}}-1\right)c\left(i-1,j-1,\frac{s}{q},q\right)-$$
$$-c\left(i-2,j-1,\frac{s}{q^2},q\right) \tag{13}$$

mit den Anfangswerten

$$c(0,0,s,q)=2, \quad c(0,j,s,q)=0, \quad j>0,$$
$$c(1,0,s,q)=1, \quad c(1,1,s,q)=1-\frac{s}{q}, \quad c(1,j,s,q)=0, \quad j>1,$$
$$c(2,0,s,q)=1, \quad c(2,1,s,q)=-(q+1)\frac{s}{q^2},$$
$$c(2,2,s,q)=\left(\frac{s}{q^2}-1\right)\left(\frac{s}{q^3}-1\right). \tag{14}$$

Bemerkung 1. *Setzt man bei festem n und i in* (12) $r=0,1,\ldots,i$, *dann erhält man $i+1$ Gleichungen für die Koeffizienten, die eine eindeutige Lösung besitzen, weil der Koeffizient von $c(i,r,q^n)$ jeweils* 1 *ist. Damit erhält man eine weitere Methode, die Koeffizienten zu berechnen. Man verifiziert damit sehr leicht, dass*

$$c(i,0,s,q)=1,\quad i\geq 1,$$

$$c(i,1,s,q)=-\frac{s[i]}{q^i},\quad i\geq 2,$$

$$c(i,2,s,q)=\frac{s\left(q^i[i]-s\begin{bmatrix} i\\ 2\end{bmatrix}\right)}{q^{2i+1}},\quad i\geq 3,$$

$$c(i,3,s,q)=-\begin{bmatrix} i\\ 3\end{bmatrix}\frac{s}{q^i}\frac{s}{q^{i+1}}\frac{s}{q^{i+2}}+\frac{s}{q^{i+1}}\frac{s}{q^{i+2}}[i][i-2]-\frac{s}{q^{i+2}}[i],\quad i\geq 4,$$

gilt.

Man wird daher dazu geführt, $c(i,j,s,q)$ in der Form

$$c(i,j,s,q)=\sum_{k=0}^{j}b(i,j,k,q)q^{\binom{k+1}{2}-k(i+j)}s^k$$

zu schreiben. Dann ergibt sich aus (13) durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} b(i,j,k,q) &= b(i-1,j,k,q)-q^{i-j}b(i-1,j-1,k-1,q)+\\ &\quad +q^k b(i-1,j-1,k,q)-q^k b(i-2,j-1,k,q) \end{aligned}\tag{15}$$

mit den Anfangswerten

$$b(0,0,0,q)=2, b(1,0,0,q)=1, b(1,1,0,q)=1, b(1,1,1,q)=-1.$$

Überraschenderweise gibt es für die $b(i,j,k,q)$ eine explizite Formel. Computerexperimente lassen vermuten, dass für $i>0$

$$b(i,j,k,q)=(-1)^k\begin{bmatrix} i-j+k-1\\ k\end{bmatrix}\begin{bmatrix} j-1\\ k-1\end{bmatrix}\frac{[i]}{[i-j]},\quad j\neq i,$$

und

$$b(i,i,k,q)=(-1)^k\begin{bmatrix} i\\ k\end{bmatrix}$$

gilt. Das lässt sich aber mit Induktion leicht verifizieren.

Wir können nun eine Klasse von q-Lucas Polynomen, die noch von einem zusätzlichen Parameter s abhängen, definieren durch

$$L_n(x,y,s) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j c(n,j,s,q) x^{n-2j} y^j. \tag{16}$$

Dann ist $L_n(x,y,s)$ ein Polynom in x und x^{-1} vom Grad n und erfüllt die Rekursion

$$L_n(x,y,s) = \left(x - \frac{y}{x}\right) L_{n-1}\left(x, y, \frac{s}{q}\right) + \frac{sy}{q^n x} L_{n-1}\left(qx, y, \frac{s}{q}\right) + \\ + yL_{n-2}\left(x, y, \frac{s}{q^2}\right) \tag{17}$$

bzw

$$L_n(x,y,s) = \left(x - \frac{y}{x}\right) L_{n-1}\left(x, y, \frac{s}{q}\right) + \frac{sy}{qx} L_{n-1}\left(x, \frac{y}{q^2}, \frac{s}{q}\right) + \\ + yL_{n-2}\left(x, y, \frac{s}{q^2}\right) \tag{18}$$

mit den Anfangswerten

$$L_0(x,y,s) = 2, \quad L_1(x,y,s) = x + \left(\frac{s}{q} - 1\right)\frac{y}{x}. \tag{19}$$

Wir bezeichnen die $L_n(x,y,s)$ als **allgemeine q-Lucas-Polynom**e. Für $s = q = 1$ reduziert sich das auf die Rekursion der klassischen Lucas Polynome $L_n(x,y) = xL_{n-1}(x,y) + yL_{n-2}(x,y)$ mit den Anfangswerten $L_0(x,y) = 2$, $L_1(x,y) = x$.

Für $q = 1$ und beliebiges s erhalten wir die Polynome $L_n\big(x + (s-1)\frac{y}{x}, y, s\big)$, aus welchen leicht ersichtlich ist, dass die Koeffizienten $c(i,j,s,1)$ sich auch in der Form

$$(-1)^j c(i,j,s,1) = \sum_k \binom{i-j+k}{k} \binom{i-j}{j-k} \frac{i}{i-j+k} (s-1)^k$$

schreiben lassen.

Ein geeignetes q-Analogon ergibt sich durch den Ansatz

$$(-1)^j c(i,j,s,q) = \sum_{k=0}^{i} d(i,j,k,q) \left(\frac{s}{q^i} - 1\right) \cdots \left(\frac{s}{q^{i+k-1}} - 1\right).$$

Dann ergibt sich durch Koeffizientenvergleich für die $d(i,j,k)$ die Rekursion

$$\begin{aligned} d(i,j,k,q) = {} & d(i-1,j,k,q) - d(i-1,j-1,k,q) + \\ & + d(i-2,j-1,k,q) + \\ & + q^{i-2j+k} d(i-1,j-1,k-1,q) + \\ & + q^{i-2j+k+1} d(i-1,j-1,k,q). \end{aligned}$$

Beachtet man, dass $d(i,j,k,q)$ nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn $0 \leq k \leq j \leq i$ ist und dass die Anfangsbedingungen durch

$$\begin{aligned} & d(0,0,0,q) = 2, \quad d(1,0,0,q) = 1, \quad d(1,1,0,q) = 0, \quad d(1,1,1,q) = 1, \\ & d(2,0,0,q) = 1, \quad d(2,1,0,q) = d(2,1,1,q) = 1 + q, \\ & d(2,2,0,q) = d(2,2,1,q) = 0, \quad d(2,2,2,q) = 1 \end{aligned}$$

gegeben sind, so verifiziert man leicht, dass für $0 \leq k \leq j \leq i$ wieder ein explizites q-Analogon gilt, nämlich

$$d(i,j,k,q) = \begin{bmatrix} i-j+k \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i-j \\ j-k \end{bmatrix} \frac{[i]}{[i-j+k]} q^{\binom{j-k}{2}}.$$

Setzen wir

$$Luc_n(x,y) = L_n(x,y,q^n), \tag{20}$$

so erhalten wir die **speziellen q-Lucas-Polynome** mit der Rekurrenz

$$\begin{aligned} Luc_n(x,y) = {} & \left(x - \frac{y}{x}\right) Luc_{n-1}(x,y) + \frac{y}{x} Luc_{n-1}(qx,y) + \\ & + y Luc_{n-2}(x,y) \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $Luc_0(x,y) = 2$, $Luc_1(x,y) = x$. Beachtet man, dass der q-Differentiationsoperator D durch $Df(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$ gegeben ist, so schreibt sich die Rekursion für die speziellen q-Lucaspolynome in der Form

$$\begin{aligned} Luc_n(x,y) = {} & (x Luc_{n-1}(x,y) + (q-1) y D) Luc_{n-1}(x,y) + \\ & + y Luc_{n-2}(x,y) \end{aligned} \tag{21}$$

mit den Anfangswerten

$$Luc_0(x,y) = 2, \quad Luc_1(x,y) = x. \tag{22}$$

Daraus ist ersichtlich, dass diese Polynome tatsächlich Polynome in x sind vom Grad n.

Man verifiziert leicht durch Koeffizientenvergleich, dass sich dabei das genaue Analogon der klassischen Lucaspolynome

$$Luc_n(x,y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{[n]}{[n-j]} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} q^{\binom{j}{2}} x^{n-2j} y^j \tag{23}$$

ergibt.

Wir definieren ganz analog die **allgemeinen q-Fibonacci-Polynome** durch eine analoge Rekursion

$$F_n(x,y,s) = \left(x - \frac{y}{x}\right) F_{n-1}\left(x,y,\frac{s}{q}\right) + \frac{sy}{q^{n-1}x} F_{n-1}\left(qx,y,\frac{s}{q}\right) + \\ + yF_{n-2}\left(x,y,\frac{s}{q^2}\right)$$

mit den Anfangswerten $F_0(x,y,s) = 0$, $F_1(x,y,s) = 1$.

Wir schreiben wieder

$$F_n(x,y,s) = \sum_{j=0}^{(n-1)/2} a(n,j,s,q)(-1)^j x^{n-1-2j} y^j.$$

Dann ergibt sich

$$a(n,j,s,q) = \sum_{k=0}^{j} \begin{bmatrix} n-j+k-1 \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} q^{-k(n+j)+\binom{k+1}{2}} (-s)^k,$$

wobei $a(n,n,s,q) = 0$ sein soll.

Eine andere Darstellung ist wieder gegeben durch

$$a(n,j,s,q) = (-1)^j \sum_{k=0}^{j} \begin{bmatrix} n-1-j+k \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1-j \\ j-k \end{bmatrix} \times \\ \times q^{\binom{j-k+1}{2}} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{s}{q^{n+i}} - 1\right).$$

Weiters definieren wir die **speziellen q-Fibonacci-Polynome** durch

$$Fib_n(x,y) = xFib_{n-1}(x,y) + (q-1)yDFib_{n-1}(x,y) + \\ + yFib_{n-2}(x,y) \tag{24}$$

mit den Anfangswerten

$$Fib_0(x,y) = 0, \quad Fib_1(x,y) = 1. \tag{25}$$

Dann verifiziert man sofort, dass

$$Fib_n(x,y) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k+1}{2}} x^{n-1-2k} y^k \tag{26}$$

gilt.

Man beachte, dass das ein anderes q-Analogon der Fibonacci-polynome ist als das in [4] betrachtete, für welches

$$F_n(x,y) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{2\binom{k}{2}} x^{n-1-2k} y^k$$

gilt.

Aus (23) ergibt sich sofort, dass

$$DLuc_n(x,y) = [n] Fib_n\left(x, \frac{y}{q}\right) \tag{27}$$

gilt. Außerdem ist $Luc_n(x,y) = Fib_{n+1}(x,y) + yFib_{n-1}(x,y)$.

Man kann beide Polynome auf negative Indizes erweitern unter Beibehaltung der Rekurrenz. Es ergibt sich

$$Fib_{-n}(x,y) = (-1)^{n-1} \frac{Fib_n(x,y)}{y^n}$$

bzw

$$Luc_{-n}(x,y) = (-1)^n \frac{Luc_n(x,y)}{y^n}.$$

2. Verwandte Fragestellungen

Nun wollen wir Rekurrenzen für Summen der Gestalt

$$s(n,i,z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{bmatrix} n \\ \lfloor \frac{n+ik}{2} \rfloor \end{bmatrix} z^k \tag{28}$$

herleiten und damit eine Formel aus [3] verallgemeinern. Es gilt

$$\sum c(i,j,q^n) E^{-2j} \begin{bmatrix} n \\ \lfloor \frac{n+ik}{2} \rfloor \end{bmatrix} = \sum c(i,j,q^n) \begin{bmatrix} n-2j \\ \lfloor \frac{n+ik}{2} \rfloor - j \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} n-i \\ \lfloor \frac{n-i+i(k+1)}{2} \rfloor \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-i \\ \lfloor \frac{n-i+i(k-1)}{2} \rfloor \end{bmatrix}$$

und daher

$$\sum c(i,j,q^n)s(n-2j,i,z) = \sum \begin{bmatrix} n-i \\ \lfloor \frac{n-i+i(k+1)}{2} \rfloor \end{bmatrix} z^k + \sum \begin{bmatrix} n-i \\ \lfloor \frac{n-i+i(k-1)}{2} \rfloor \end{bmatrix} z^k =$$
$$= \left(z + \frac{1}{z}\right) s(n-i,i,z).$$

Das lässt sich auch folgendermaßen formulieren:

Satz 2. *Die Folge der Polynome $s(n,i,z) \in \mathbb{C}(q)[x,x^{-1}]$ genügt der Rekursion*

$$\left(L_i(1,-E^{-2},q^n) - \left(z + \frac{1}{z}\right)E^{-i}\right)s(n,i,z) = 0. \tag{29}$$

Bemerkung 2. *Im Fall $q = 1$ sind die Operatoren $L_i(1,-E^{-2},1)$ unabhängig von n. Die $s(n,i,z)$ genügen also einer Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten. Das ist im allgemeinen Fall nicht mehr richtig.*

Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass im Fall $q = 1$ die Ordnung des annihilierenden Operators i ist, während sie im allgemeinen Fall $2i$ beträgt.

Wir wollen nun eine andere Version unserer Resultate angeben. Setzt man $q^r = x$ und $q^n = s$, so ergibt sich nach leichter Rechnung

$$\frac{\begin{bmatrix} n-k \\ r-j \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}} = \frac{\prod_{m=0}^{j-1}\left(\frac{x}{q^m} - 1\right)\prod_{l=0}^{k-j-1}\left(\frac{s}{xq^l} - 1\right)}{\prod_{p=0}^{k-1}\left(\frac{s}{q^p} - 1\right)} \quad \text{für } 0 \leq j \leq k.$$

Daher lässt sich Formel (12) auch in der folgenden Gestalt schreiben:

$$\frac{\prod_{k=0}^{i-1}\left(\frac{s}{q^k x} - 1\right)}{\prod_{k=0}^{i-1}\left(\frac{s}{q^k} - 1\right)} + \frac{\prod_{k=0}^{i-1}\left(\frac{x}{q^k} - 1\right)}{\prod_{k=0}^{i-1}\left(\frac{s}{q^k} - 1\right)} = \sum_{j=0}^{i} c(i,j,s,q)\varphi_j(x,s) \tag{30}$$

mit $\varphi_n(x,s) = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x}{q^k}-1\right)\left(\frac{s}{q^k x}-1\right)}{\prod_{l=0}^{2n-1}\left(\frac{s}{q^l}-1\right)}$.

Bemerkung 3. *Gleichung* (30) *kann für komplexes q als Funktion der komplexen Variablen s interpretiert werden. Für $m \geq i$ ist die linke Seite im Punkt $s = q^m$ regulär. Daher muss auch die rechte Seite regulär sein. Das ist nur dann möglich, wenn für $2j - 1 \geq i$ das Polynom $c(i,j,s,q)$ jedes q^m mit $i \leq m \leq 2j - 1$ als Nullstelle besitzt.*

Anders ausgedrückt bedeutet das, dass $c(i,j,s,q)$ durch $\prod_{m=i}^{2j-1}(s-q^m)$ teilbar ist.

Genauer gilt

$$c(i,i-j,s,q)=(-1)^i c\left(i,j,\frac{s}{q^{i-2j}},q\right)\prod_{k=i}^{2i-2j-1}\left(\frac{s}{q^k}-1\right),0\le j\le\frac{i}{2}.$$

Denn das ist gleichbedeutend mit

$$b(i,i-j,k,q)=\sum_{l=0}^{i}b(i,j,l,q)\begin{bmatrix}i-2j\\k-l\end{bmatrix}(-1)^{k-l}q^{(j-l)\,(k-l)}$$

und das ist wieder äquivalent mit

$$\begin{bmatrix}j+k-1\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i-j\\k\end{bmatrix}\frac{[k]}{[j]}=\sum_{l=0}^{j}\begin{bmatrix}i-j+l-1\\l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j-1\\l-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i-2j\\k-l\end{bmatrix}q^{(j-l)\,(k-l)}.$$

Um diese Formel zu beweisen, gehen wir folgendermaßen vor. Aus dem q-Analogon der Formel von Saalschütz (vgl. zB [1], p.524) folgt

$${}_2\varphi_3\left(\begin{matrix}q^{1-j},q^{1+i-j},q^{1-k}\\q^2,q^{2+i-2j-k}\end{matrix}\,|q,q\right)=\frac{(q^{1+j};q)_{k-1}\,(q^{1-i+j};q)_{k-1}}{(q^2;q)_{k-1}\,(q^{2j-i};q)_{k-1}}.$$

Die linke Seite bedeutet

$$\sum_m\frac{(q^{1-j};q)_{m-1}(q^{1+i-j};q)_{m-1}(q^{1-k};q)_{m-1}}{(q^2;q)_{m-1}(q^{2+i-2j-k};q)_{m-1}(q;q)_{m-1}}q^{m-1}.$$

Sie kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$q^{-(k-1)(j-1)}\frac{[k-1]![1+i-2j+k]!}{[i-2j]![i-j]}\cdot \\ \cdot\sum_m\begin{bmatrix}j-1\\m-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i-j+m-1\\m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i-2j\\k-m\end{bmatrix}q^{(j-m)\,(k-m)}$$

Die rechte Seite schreiben wir in der Gestalt

$$\begin{bmatrix}j+k-1\\k\end{bmatrix}\frac{[k]}{[j]}\begin{bmatrix}i-j\\k\end{bmatrix}\frac{[1+i-2j+k]![k-1]!}{[i-2j]![i-j]}q^{-(j-1)(k-1)}.$$

Vergleicht man die beiden Seiten, so ergibt sich die gewünschte Formel.

Die linke Seite von (30) ist eine Linearkombination von Termen der Gestalt $f_n(x,s)=x^n+\left(\frac{s}{x}\right)^n$. Jeder solche Term hat ebenfalls eine Entwicklung der angegebenen Form.

Satz 3. *Es existieren eindeutig bestimmte Koeffizienten* $g(n,j,s,q)$, *sodass gilt*

$$f_n(x,s) = \sum_{j=0}^{n} g(n,j,s,q)\varphi_j(x,s). \tag{31}$$

Beweis. Es ist

$$f_n(x,s) = \left(x+\frac{s}{x}\right)f_{n-1}(x,s) - sf_{n-2}(x,s)$$

mit den Anfangswerten $f_0(x,s) = 2, f_1(x,s) = x + \frac{s}{x}$.

Wir haben

$$f_0(x,s) = 2\varphi_0(x,s)$$

und

$$f_1(x,s) = (s+1)\varphi_0(x,s) - (s-1)\left(\frac{s}{q}-1\right)\varphi_1(x,s).$$

Nun ist

$$\left(x+\frac{s}{x}\right)\varphi_n(x,s) = q^n\left(\frac{s}{q^{2n}}+1\right)\varphi_n(x,s)- \\ - q^n\left(\frac{s}{q^{2n}}-1\right)\left(\frac{s}{q^{2n+1}}-1\right)\varphi_{n+1}(x,s).$$

Daraus ergibt sich mit Induktion sofort die Behauptung.

Für die Koeffizienten ergibt sich die Rekursion

$$g(n,j,s,q) = q^j\left(\frac{s}{q^{2j}}+1\right)g(n-1,j,s,q)- \\ - q^{j-1}\left(\frac{s}{q^{2j-2}}-1\right)\left(\frac{s}{q^{2j-1}}-1\right)g(n-1,j-1,s,q)- \\ - sg(n-2,j,s,q).$$

Bemerkung 4. *Da die linke Seite von* (31) *ein Polynom in s ist*, *ergibt sich wie in Bemerkung* 3, *dass* $g(n,j,s,q)$ *für* $j>0$ *durch* $\prod_{m=0}^{2j-1}(s-q^m)$ *teilbar ist. Genauer kann man mit Induktion zeigen, dass*

$$g(n,j,s,q) = l(n,j,s,q)\prod_{m=0}^{2j-1}\left(\frac{s}{q^m}-1\right) \text{ ist, wobei}$$

$$l(n,0,s,q) = 1+q^n \text{ und für } j>0$$

$$l(n,j,s,q) = (-1)^j\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[n]}{[n-k]}\begin{bmatrix} n-k \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k+j-1 \\ j-1 \end{bmatrix} q^{\binom{j}{2}-jk}s^k$$

ist.

Aus Satz 3 folgt, dass jedes Polynom $f(x)$ aus $\mathbb{C}[x,x^{-1}]$ vom Grad n mit $f(x)=f\left(\frac{s}{x}\right)$ als Linearkombination der Polynome φ_j, $0\le j\le n$, darstellbar ist.

So gibt es beispielsweise Koeffizienten $h(i,m,j,s)$ mit

$$x^i\frac{\prod_{k=0}^{m-1}\left(\frac{s}{q^kx}-1\right)}{\prod_{k=0}^{m-1}\left(\frac{s}{q^k}-1\right)}+\left(\frac{s}{x}\right)^i\frac{\prod_{k=0}^{m-1}\left(\frac{x}{q^k}-1\right)}{\prod_{k=0}^{m-1}\left(\frac{s}{q^k}-1\right)}=\sum_{j=0}^{\max(i,m)}h(i,m,j,s)\varphi_j(x,s).$$

Bei festem m erfüllt $h(i,m,j,s)$ dieselbe Rekursion wie $g(i,j,s)$. Beispielsweise ergeben sich für $m=2$ nun die folgenden Anfangswerte:

$$h(0,2,0,s)=1,\quad h(0,2,1,s)=-\frac{(1+q)s}{q^2},$$
$$h(0,2,2,s)=\frac{(s-q^2)(s-q^3)}{q^5}$$

und

$$h(1,2,0,s)=1,\quad h(1,2,1,s)=-\left(1+\frac{s}{q}\right).$$

Setzt man

$$s(n,i,2m,z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{matrix}n\\ \left\lfloor\frac{n+2mk}{2}\right\rfloor\end{matrix}\right]q^{im\binom{k}{2}}z^k,$$

so zeigt man genauso wie oben, dass diese Polynome die Rekursion

$$\begin{aligned}\sum h(i,2m,j,q^n)s(n-2j,i,2m,z)=\\ =\sum\left[\begin{matrix}n-2m\\ \left\lfloor\frac{n-2m+2m(k+1)}{2}\right\rfloor\end{matrix}\right]q^{im\binom{k+1}{2}+i\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}z^k+\\ +\sum\left[\begin{matrix}n-2m\\ \left\lfloor\frac{n-2m+2m(k-1)}{2}\right\rfloor\end{matrix}\right]q^{im\binom{k-1}{2}+i\left\lfloor\frac{n+1-2m}{2}\right\rfloor}z^k=\\ =\left(q^{i\left\lfloor\frac{n+i-2m}{2}\right\rfloor}z+q^{i\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{1}{z}\right)s(n-2m,i,2m,z)\end{aligned}$$

erfüllen.

Für $m=1$ genügt also

$$s(n,i,2,z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{matrix}n\\ \left\lfloor\frac{n+2k}{2}\right\rfloor\end{matrix}\right]q^{i\binom{k}{2}}z^k$$

der Rekursion

$$\sum_j h(i,2,j,q^n)t(n-2j,i,z) = \left(q^{i\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{1}{z} + q^{i\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor}z\right)t(n-2,i,z).$$

Bemerkung 5. *Für* $q = 1$ *reduziert sich* $s(n,i,2,z)$ *auf* $t(n,z) = \sum \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor + k} z^k$ *und die Rekursion* $t(n,z) = \frac{(z+1)^2}{z}t(n-2,z)$ *mit der expliziten Formel* $t(n,z) = \frac{(z+1)^n}{z^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}}$.

Im allgemeinen Fall erhalten wir für $i = 1$ *ein einfaches q-Analogon*:

$$s(2n,1,2,z) = \prod_{j=0}^{n-1}(1+q^j z)\left(1+\frac{q^{j+1}}{z}\right) \textit{ und}$$

$$s(2n+1,1,2,z) = (1+q^n z)t(2n,1,z).$$

Im Fall $i = jm$, $j \geq 1$, ergeben sich wieder q-Analoga der Lucas Polynome.

Ich möchte nur ein solches Analogon explizit erwähnen, nämlich den Fall $i = m$.

Hier ergibt sich nach leichter Rechnung

$$h(0,0,0,s) = 2, \quad h(1,1,0,s) = 1, \quad h(1,1,1,s) = \frac{s}{q} - 1$$

und

$$\begin{aligned} h(i,i,j,s) = q^j h\left(i-1,i-1,j,\frac{s}{q}\right) &+ \\ &+ \left(\frac{s}{q^{2j-1}} - 1\right)q^{j-1}h\left(i-1,i-1,j-1,\frac{s}{q}\right) - \\ &- \frac{s}{q}h\left(i-2,i-2,j-1,\frac{s}{q^2}\right). \end{aligned}$$

Mit diesen Koeffizienten gilt also mit derselben Überlegung wie oben

$$q^{ir}\begin{bmatrix} n-i \\ r \end{bmatrix} + q^{i(n-r)}\begin{bmatrix} n-i \\ r-i \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{i} h(i,i,j,q^n)\begin{bmatrix} n-2j \\ r-j \end{bmatrix}.$$

Im Spezialfall $i = n$ sieht man aus Bemerkung 1, dass wieder

$$h(n,n,j,q^n) = (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \frac{[n]}{[n-j]} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}$$

erfüllt ist.

Bemerkung 6. *Man rechnet leicht nach, dass* $h(i,i,j,s) = \frac{s^j}{q^{j^2}} c\left(i,j,\frac{1}{s},\frac{1}{q}\right)$ *ist.*

Das sieht man am einfachsten, wenn man in Gleichung (12) q durch $\frac{1}{q}$ ersetzt und beachtet, dass $\left[\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}\right]_{\frac{1}{q}} = q^{-nk+k^2} \left[\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}\right]_q$ erfüllt ist.

3. Eine weitere Identität für die q-Binomialkoeffizienten

Nun wollen wir q-Analoga der Formeln (9) und (10) finden. Wir betrachten dazu auf dem Vektorraum aller „q-Polynome“ $\sum a_j q^{\binom{j}{2}} \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix}\right]$, d.h. aller endlichen Linearkombinationen der q-Binomialkoeffizienten $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$, deren Koeffizienten rationale Funktionen in der Unbestimmten q sind, den Verschiebungsoperator E , definiert durch $E\left[\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ r \end{smallmatrix}\right]$ und den q-Differenzenoperator Δ, definiert durch $\Delta q^{\binom{r}{2}} \left[\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}\right] = q^{\binom{r-1}{2}} \left[\begin{smallmatrix} n \\ r-1 \end{smallmatrix}\right]$.

Wir betrachten dort die Operatoren

$$F_i(n,E,\Delta) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} i-1-j \\ j \end{bmatrix} q^{nj} E^{i-1-2j} \Delta^j, \tag{32}$$

die man als Fibonacci-Polynome in E und Δ interpretieren kann.

Dann rechnet man sofort nach, dass

$$F_i(n,E,\Delta) = EF_{i-1}(n,E,\Delta) + q^n F_{i-2}(n,E,\Delta)\Delta \tag{33}$$

gilt.

Satz 4. *Es gibt Konstanten* $c(i,j)$, *so dass gilt*

$$F_{i+1}(n,E,-\Delta) q^{\binom{r}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor} (-1)^j \begin{bmatrix} i-j \\ j \end{bmatrix} q^{nj} q^{\binom{r-j}{2}} \begin{bmatrix} n+i-2j \\ r-j \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{j=0}^{i} c(i,j) q^{nj} q^{\binom{r-j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r-j \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wenn solche Konstanten für alle n, r existieren, müssen sie die Gestalt

$$c(i,j)=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{i}{2}\rfloor}(-1)^k\begin{bmatrix}i-k\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i-2k\\j-k\end{bmatrix}q^{\binom{j-k}{2}} \tag{34}$$

haben. Es ist klar, dass dann $c(i,j)=0$ für $j>i$ ist.

Setzt man das in die rechte Seite ein, so ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{i}{2}\rfloor}(-1)^k\begin{bmatrix}i-k\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i-2k\\j-k\end{bmatrix}q^{\binom{j-k}{2}}q^{nj}q^{\binom{r-j}{2}}\begin{bmatrix}n\\r-j\end{bmatrix}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{i}{2}\rfloor}(-1)^k\begin{bmatrix}i-k\\k\end{bmatrix}q^{\binom{r-k}{2}}q^{nk}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{i}q^{nj-nk+j^2-jk-jr+kr}\begin{bmatrix}i-2k\\j-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\r-j\end{bmatrix}.$$

Für die innere Summe ergibt sich nach der q-Vandermonde Formel

$$\sum_{j=0}^{i}q^{nj-nk+j^2-jk-jr+kr}\begin{bmatrix}i-2k\\j-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\r-j\end{bmatrix}=$$

$$=\sum_{j=k}^{i}q^{j(j+k+n-r)}\begin{bmatrix}i-2k\\j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\r-j-k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n+i-2k\\r-k\end{bmatrix},$$

womit alles bewiesen ist.

Formel (34) für die $c(i,j)$ lässt sich im allgemeinen nicht vereinfachen. Für $q=1$ reduziert sich natürlich alles auf 1. Dagegen hat Formel (11) ein schönes q-Analogon.

Satz 5. *Für jedes* $i=1,2,3,\ldots$ *gilt*

$$q^{\binom{r}{2}}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}=\sum_{j=0}^{\frac{i}{2}}(-1)^j\begin{bmatrix}i-j\\j\end{bmatrix}q^{nj}q^{\binom{r-j}{2}}\begin{bmatrix}n+i-2j\\r-j\end{bmatrix}-$$

$$-\sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}}(-1)^j\begin{bmatrix}i-j-1\\j\end{bmatrix}q^{n(j+1)}q^{i-2j-1}q^{\binom{r-j-1}{2}}\begin{bmatrix}n+i-2j-1\\r-j-1\end{bmatrix} \tag{35}$$

für alle $n,r\in\mathbb{N}$.

Beweis. Dieselbe Rekurrenz wie $F_i(n,E,\Delta)$ erfüllen auch die Operatoren

$$G_i(n,E,\Delta) = q^n F_i(n,qE,\Delta).$$

Unsere Behauptung lautet nun

$$F_i(n,E,-\Delta) - G_{i-1}(n,E,-\Delta)\Delta = I$$

für alle i.

Aus

$$\begin{aligned}&F_1(n,E,\Delta) = I, \quad G_0(n,E,\Delta) = 0, \quad F_2(n,E,\Delta) = E,\\ &G_1(n,E,\Delta) = q^n I\end{aligned}$$

und der Identität $I = E - q^n\Delta$ folgt, dass die Behauptung für $i = 1,2$ richtig ist.

Nun ist

$$\begin{aligned}&F_i(n,E,-\Delta) - G_{i-1}(n,E,-\Delta)\Delta =\\ &\quad = (EF_{i-1}(n,E,-\Delta) - q^n F_{i-2}(n,E,-\Delta)\Delta) -\\ &\qquad - (EG_{i-2}(n,E,-\Delta) - q^n G_{i-3}(n,E,-\Delta)\Delta)\Delta =\\ &\quad = E(F_{i-1}(n,E,-\Delta) - G_{i-2}(n,E,-\Delta)) -\\ &\qquad - q^n(F_{i-2}(n,E,-\Delta) - G_{i-3}(n,E,-\Delta)\Delta)\Delta =\\ &\quad = E - q^n\Delta = I\end{aligned}$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Literatur

[1] Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. (1999) Special Functions. Cambridge University Press
[2] Cigler, J. (1979) Operatormethoden für q-Identitäten. – Mh. Math. **88**: 87–105
[3] Cigler, J. (2001) Recurrences for some sequences of binomial sums. Sitzungsberichte ÖAW **210**: 61–83
[4] Cigler, J. (2003) q-Fibonacci polynomials. Fibonacci Quarterly **41**: 31–40
[5] Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O. (1988) Concrete Mathematics

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Johann Cigler, Institut für Mathematik, Universität Wien, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien, Austria.