Mathematische Randbemerkungen 10:

Einige Resultate und Vermutungen über q-Fibonacci-Polynome

Johann Cigler

Ich möchte im Folgenden einige $q-$Analoga von Formeln untersuchen, die im klassischen Fall eng mit den Binet-Formeln verknüpft sind. Diese interessieren mich vor allem deshalb, weil es kein $q-$Analogon der Binet-Formeln gibt.

Inzwischen konnte ich in meinem Preprint „Recurrence relations for powers of $q-$Fibonacci polynomials" alle Vermutungen, die hier ausgesprochen werden, beweisen. Ich habe aber nichts an der folgenden Darstellung geändert, weil es vielleicht interessant ist, wie ich die Situation gesehen habe, bevor ich Beweise für meine Vermutungen gefunden habe.

Die klassischen Fibonacci-Polynome sind definiert durch

$$F_n(x,s)=xF_{n-1}(x,s)+sF_{n-2}(x,s) \tag{0.1}$$

mit $F_0(x,s)=0, F_1(x,s)=1.$
Die ersten Terme sind $0,1,x,x^2+s,x^3+2sx,x^4+3sx^2+s^2,\cdots$

Die Binet-Formel besagt, dass

$$F_n(x,s)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \tag{0.2}$$

gilt, wobei $\alpha=\frac{x+\sqrt{x^2+4s}}{2}, \beta=\frac{x-\sqrt{x^2+4s}}{2}.$
Eng damit verknüpft sind die Lucas-Polynome $L_n(x,s)$, welche dieselbe Rekursion

$$L_n(x,s)=xL_{n-1}(x,s)+sL_{n-2}(x,s) \tag{0.3}$$

jedoch mit den Anfangswerten $L_0(x,s)=2, L_1(x,s)=x$ erfüllen. Für sie ergibt sich die Binet-Formel

$$L_n(x,s)=\alpha^n+\beta^n. \tag{0.4}$$

Die ersten Terme sind $2,x,x^2+2s,x^3+3sx,\cdots.$

Es ist wohlbekannt, dass für jedes feste k und r die Folge $\left(F_{kn+r}(x,s)\right)_{n\geq 0}$ wieder einer Rekurrenz der Ordnung 2 genügt. Diese lässt sich mit Hilfe der Binet-Formeln sehr leicht finden. Denn $F_{kn+r}(x,s)=\frac{\alpha^{kn+r}-\beta^{kn+r}}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^r\left(\alpha^k\right)^n+\beta^r\left(\beta^k\right)^n\right)$ ist eine Linearkombination der Potenzen von α^k und β^k. Nun ist
$\left(z-\alpha^k\right)\left(z-\beta^k\right)=z^2-\left(\alpha^k+\beta^k\right)z+(\alpha\beta)^k=z^2-L_k(x,s)z+(-s)^k.$
Daher genügen die Folgen $\left(\alpha^{nk}\right)_{n\geq 0},\left(\beta^{nk}\right)_{n\geq 0}$ und daher auch $\left(F_{kn+r}(x,s)\right)_{n\geq 0}$ der Rekursion

$$F_{kn+r}(x,s)-L_k(x,s)F_{k(n-1)+r}(x,s)+(-s)^kF_{k(n-2)+r}(x,s)=0. \tag{0.5}$$

Wir bezeichnen $\left(z-\alpha^k\right)\left(z-\beta^k\right)=z^2-L_k(x,s)z+(-s)^k$ als das charakteristische Polynom der Rekurrenz.

1. q-Fibonacci-Polynome und Rekurrenzen von Teilfolgen

Wir betrachten nun die (Carlitz'schen) $q-$Fibonacci-Polynome, die durch

$$f(n,x,s)=xf(n-1,x,s)+q^{n-2}sf(n-2,x,s) \tag{1.1}$$

mit den Anfangswerten
$f(0,x,s)=0,\ f(1,x,s)=1$
definiert sind. Die ersten Werte sind

0, 1, x, $q\,s+x^2$, $q\,s\,x+q^2\,s\,x+x^3$, $q^4\,s^2+q\,s\,x^2+q^2\,s\,x^2+q^3\,s\,x^2+x^4$.

Sie haben die Darstellung (vgl. z.B. [3])

$$f(n,x,s)=\sum_{k\le n-1}\begin{bmatrix} n-1-k \\ k \end{bmatrix} q^{k^2}x^{n-1-2k}s^k. \tag{1.2}$$

Wir fragen, ob es auch hier eine analoge Rekursion für $f(kn,x,s)$ gibt. Das schaut zwar auf den ersten Blick unwahrscheinlich aus, weil es kein vernünftiges Analogon der Lucas-Polynome gibt. Wenn man jedoch beachtet, dass
$F_k(x,s)L_k(x,s)=\dfrac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}(\alpha^k+\beta^k)=\dfrac{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}{\alpha-\beta}=F_{2k}(x,s)$
ist, dann kann man (0.5) auch folgendermaßen formulieren:

$$F_k(x,s)F_{kn+r}(x,s)-F_{2k}(x,s)F_{k(n-1)+r}(x,s)+(-s)^kF_k(x,s)F_{k(n-2)+r}(x,s)=0. \tag{1.3}$$

Es zeigt sich nun, dass es in dieser Formulierung tatsächlich ein schönes $q-$Analogon gibt. Als nützliches Hilfsmittel erwies sich zu Beginn meiner Untersuchungen das Mathematica Softwarepaket qGeneratingFunctions von Christoph Koutschan vom RISC Linz, das Rekurrenzen für $q-$holonome Folgen berechnet.
Dabei heißt eine Folge $\left(a_n\right)$ $q-$holonom, wenn Polynome $p_0,\cdots,p_r$ existieren, die nicht alle verschwinden, so dass gilt
$p_0(q^n)a_n+p_1(q^n)a_{n-1}+\cdots p_r(q^n)a_{n-r}=0.$
Mit der Folge $\left(a_n\right)$ ist auch die Folge $\left(a_{kn+r}\right)$ für jedes natürliche k und r $q-$holonom. Da die Folge der $f(n,x,s)$ $q-$holonom ist, sind es auch die Folgen $f(kn+r,x,s)$.
Beispielsweise liefert der Befehl

```
QRESubstitute[a[n] == x a[n - 1] + q^(n - 2) s a[n - 2], a[n], 2 n]
```

in qGeneratingFunctions eine Rekursion für $f(2n,x,s)$.

Aus den dabei erhaltenen Rekursionen von $f(kn+r)$ für kleine Werte von k und r ließ sich relativ leicht das folgende Resultat erraten:

Satz 1
Für jedes feste $k \geq 1$ und jede natürliche Zahl $N \geq 2k$ gilt die Rekursion

$$\begin{aligned} & f(k,x,q^{N-2k}s)\, f(N,x,s) - f(2k,x,q^{N-2k}s)\, f(N-k,x,s) \\ & +(-1)^k q^{-\frac{k(3k+1)}{2}} \left(q^N s\right)^k f(k,x,q^{N-k}s)\, f(N-2k,x,s) = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Überraschenderweise braucht man hier wirklich die $q-$Fibonacci-Polynome. Hätte man nur nach einer Rekurrenz für die $q-$Fibonacci-Zahlen $f(n,1,1)$ gesucht, hätte man diese Gesetzmäßigkeit nicht entdecken können.

Wenn man das Resultat bereits erraten hat, dann ergibt sich aus der Form dieses Resultats sofort ein einfacher Beweis. Wir verwenden dabei die kombinatorische Deutung der $q-$Fibonacci-Polynome als Gewichte von Morsezeichenfolgen (vgl. [3]). Unter einer Morsezeichenfolge auf $\left[k,n\right]$ verstehen wir eine Belegung der Zahlen $k, k+1, \cdots, n$ mit Punkten und Strichen, wobei Punkte eine Zahl und Striche zwei aufeinanderfolgende Zahlen überdecken. Das Gewicht einer solchen Folge ist $q^m x^a s^b$, wobei a die Anzahl der Punkte, b die Anzahl der Striche und m die Summe über alle Zahlen, die Endpunkte von Strichen sind, bedeutet. Beispielsweise ist das Gewicht der Folge

3	4	5	6	7	8	9	10
•	–	–	•	•	–	–	•

auf dem Intervall $[3,10]$ gegeben durch $q^{5+9}x^4s^2 = q^{14}x^4s^2.$ Das Gewicht $w(A)$ einer Menge A von Morsezeichenfolgen ist die Summe der Gewichte der einzelnen Folgen.
Sei $A(n,m)$ die Menge aller Morsezeichenfolgen auf $[m, m+n-2].$ Dabei sei $A(0,m)$ die leere Menge und $A(1,m)$ die leere Morsezeichenfolge, d.h. $w(A(0,m)) = 0$ und $w(A(1,m)) = 1.$
Dann ist $w(A(n,m)) = f(n,x,q^m s).$ Denn das stimmt für $m = 0,$ weil die Anfangsbedingungen stimmen und die Rekursionsformel erfüllt ist. Denn jede Folge endet entweder mit einem Punkt, dann ist das Gewicht dieser Menge $xf(n-1,x,s)$, oder in einem Strich, dann ist das Gewicht $q^{n-2}sf(n-2,x,s).$ Die Menge $A(n,m)$ entsteht aus $A(n,0),$ indem man diese so verschiebt, dass der Anfangspunkt m wird. Dabei wird jeder Endpunkt i eines Striches in den Endpunkt $i+m$ des verschobenen Striches über. Somit ist $w(A(n,m)) = f(n,x,q^m s).$
Um die Identität (1.4) zu beweisen, betrachten wir die Menge $A(N,0) \times A(k, N-2k)$ aller Paare von Morsezeichenfolgen (u,v) wobei $u \in A(N,0)$ und $v \in A(k, N-2k)$ ist. Sei z.B. $k = 4.$ Dann kann etwa das Ende einer solchen Folge u und eine Folge v folgendermaßen ausschauen:

$4n-12$	$4n-11$	$4n-10$	$4n-9$	$4n-8$	$4n-7$	$4n-6$	$4n-5$	$4n-4$	$4n-3$	$4n-2$	$4n-1$
$\cdots$	•	–	–	•	•	–	–	•	•	–	–
			–	–	•						

Unter einer Bruchstelle verstehen wir entweder eine Stelle i, die zu beiden Folgen gehört und wo in beiden Folgen entweder ein Punkt oder der Anfangspunkt eines Striches liegt, oder die Stelle, die direkt an den Endpunkt der zweiten Folge anschließt, wenn in der ersten Folge ein Punkt oder der Anfangspunkt eines Striches liegt. Die einzige Bruchstelle in unserem Beispiel ist $4n-7.$ Wenn es überhaupt eine Bruchstelle gibt, kann es auch mehrere geben. Wir wählen davon die kleinste und vertauschen ab dieser Bruchstelle die Reste der beiden Folgen. In unserem Beispiel erhalten wir

$4n-12$	$4n-11$	$4n-10$	$4n-9$	$4n-8$	$4n-7$	$4n-6$	$4n-5$	$4n-4$	$4n-3$	$4n-2$	$4n-1$
$\cdots$	$\bullet$	$-$	$-$	$\bullet$	$\bullet$						
			$-$	$-$	$\bullet$	$-$	$-$	$\bullet$	$\bullet$	$-$	$-$

Es ergibt sich ein neues Paar $(u',v') \in A(N-k,0) \times A(2k,N-2k).$

Geht man umgekehrt von einem Paar aus $A(N-k,0)\times A(2k,N-2k)$ aus, so gelangt man zu einem Paar aus $A(N,0)\times A(k,N-2k).$
Allerdings funktioniert diese Abbildung nur für Paare, welche Bruchstellen besitzen.
Wir überlegen uns nun, wie die Paare ausschauen, welche keine Bruchstellen haben.
Betrachten wir zunächst ein gerades $k.$ Dann hat die Folge v genau $k-1$ Elemente, ist also eine ungerade Zahl und muss somit mindestens einen Punkt besitzen. Dieser oder die nächste Zahl ist eine Bruchstelle. Somit ist die erste Abbildung immer durchführbar. Wie sieht es mit der inversen Abbildung aus? Hier gibt es genau dann keine Bruchstelle, wenn angefangen vom Punkt $N-2k$ bis zum Punkt $N-k-2$ in der zweiten Folge Striche beginnen und gleichzeitig in der ersten Folge alle diese Punkte Endpunkte von Strichen sind. Das Gewicht dieser Striche ist $q^{-\frac{k(3k+1)}{2}}\left(q^N s\right)^k.$ Vor diesen Strichen kann ein beliebiges Wort aus $A(N-2k,0)$ und nach diesen Strichen ein beliebiges Wort aus $A(k,N-k)$ stehen.
Für ungerades k ist die erste Abbildung nicht immer durchführbar. Ansonsten geht alles genau so.
Die Identität (1.4) kann auch folgendermaßen formuliert werden: Für jedes $N \geq 2$ und $k \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} &w(A(N,0)\times A(k,N-2k)) = w(A(N-k,0)\times A(2k,N-2k)) \\ &-q^{-\frac{k(3k+1)}{2}}(-q^N s)^k w(A(N-2k,0)\times A(k,N-k)). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Bemerkung

Die $q-$Fibonacci-Polynome genügen noch einer weiteren Identität, nämlich

$$f(n,x,s) = xf(n-1,x,qs) + qsf(n-2,x,q^2 s). \tag{1.6}$$

Diese ergibt sich, wenn man die Folgen danach klassifiziert, ob am Anfang der Folge ein Punkt oder ein Strich auftritt.

Auch die Identität (1.4) hat ein derartiges Gegenstück, nämlich

Korollar 1

$$\begin{aligned} &f(k,x,q^k s)\, f(N,x,s) - f(2k,x,s)\, f(N-k,x,q^k s) \\ &+(-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}} s^k f(k,x,s)\, f(N-2k,x,q^{2k} s) = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Der obige Beweis lässt sich auf diesen Fall übertragen, indem man von Paaren aus $A(N,0)\times A(k,k)$ ausgeht und die Anfangsteile vertauscht.
Man kann auch (1.1) und (1.6) auf einfache Weise ineinander überführen. Dabei geht (1.4) in (1.7) über.
Denn aus (1.2) verifiziert man leicht, dass

$$f(n,x,q^{-k}s)\Big|_{q->\frac{1}{q}} = f(n,x,q^{k+1-n}s) \tag{1.8}$$

gilt.
Lässt man in (1.1) zuerst $s\to q^{1-n}s$ und dann in der so erhaltenen Formel $q\to\frac{1}{q}$ übergehen, so ergibt sich zunächst
$f(n,x,q^{-n+1}s)=xf(n-1,x,q^{-n+1}s)+q^{-1}sf(n-2,x,q^{-n+1}s)$
und dann
$f(n,x,q^{(-n+1)+1-n}s)=xf(n-1,x,q^{-(-n+1)+1-(n-1)}s)+qsf(n-2,x,q^{-(-n+1)+1-(n-2)+1}s)$
oder
$f(n,x,s)=xf(n-1,x,qs)+qsf(n-2,x,q^2s).$
Dasselbe ergibt sich, wenn man zuerst $q\to\frac{1}{q}$ anwendet und dann $s\to q^{n-1}s$.

Aus der kombinatorischen Interpretation wird klar, warum dieser Rechentrick funktioniert:
Das Gewicht einer Morsezeichenfolge mit k Strichen, die an den Stellen i_j enden, ist $(q^{i_1}s)(q^{i_2}s)\cdots(q^{i_k}s)$. Wenn man die Folge verkehrt betrachtet, enden die Striche der neuen Folge in den Punkten $(n-2)-i_j+1.$ Das Gewicht wird $(q^{n-1-i_1}s)(q^{n-1-i_2}s)\cdots(q^{-1-i_k}s).$ Das ergibt sich auch aus der Transformation. Insgesamt führt diese Transformation die Menge aller Fibonacci-Folgen der Länge $n-1$ in sich selbst über.

Nun wenden wir diese Transformation auf (1.4) an. Wir erhalten bei $s\to q^{1-N}s$
$f(k,x,q^{1-2k}s)f(N,x,q^{1-N}s)-f(2k,x,q^{1-2k}s)f(N-k,x,q^{1-N}s)$
$+(-1)^k q^{-\frac{k(3k+1)}{2}}(qs)^k\ f(k,x,q^{1-k}s)f(N-2k,x,q^{1-N}s)=0.$
Wenn wir jetzt $q\to\frac{1}{q}$ übergehen lassen, ergibt sich schließlich die gewünschte Formel
$f(k,x,q^ks)f(N,x,s)-f(2k,x,s)f(N-k,x,q^ks)$
$+(-1)^k q^{\frac{k(3k+1)}{2}}\left(q^{-1}s\right)^k\ f(k,x,s)f(N-2k,x,q^{2k}s)=0.$
Eine kleine Verallgemeinerung von (1.7) ist

Satz 2
Für alle $n,m,\ell\in\mathbb{Z}$ *gilt*

$$\begin{aligned} g(m,n,\ell,x,s) &= \det\begin{pmatrix} f(n,x,s) & f(n-\ell,x,q^{\ell}s) \\ f(n+m,x,s) & f(n+m-\ell,x,q^{\ell}s)\end{pmatrix} \\ &= (-s)^{n-\ell}q^{\frac{(n-\ell)(n+\ell-1)}{2}} f(\ell,x,s)f(m,x,q^n s). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Für $\ell \to 1, n \to k, m \to n$ reduziert sich das auf die $q-$Euler-Cassini- Formel (vgl. [3], Cor. 2.2) . Diese lautet

$$f(k-1,x,qs)\,f(n+k,x,s)-f(k,x,s)\,f(n+k-1,x,qs)=(-1)^k q^{\binom{k}{2}} s^{k-1} f(n,x,q^k s). \qquad (1.10)$$

Insbesondere erhält man für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Darstellung von $f(n-k,x,q^k s)$ durch $f(n,x,s)$ und $f(n-1,x,qs)$:

$$f(n-k,x,q^k s)=\frac{1}{v(k)}\left(f(k-1,x,qs)\,f(n,x,s)-f(k,x,s)\,f(n-1,x,qs)\right) \qquad (1.11)$$

mit

$$v(k)=(-1)^k q^{\binom{k}{2}} s^{k-1}. \qquad (1.12)$$

Zum Beweis beachte man, dass die $q-$Fibonacci-Polynome unter Beibehaltung der Rekursion (1.1) eindeutig auf alle $n \in \mathbb{Z}$ erweitert werden können. Es gilt dann

$$f(-n,x,s)=(-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}} \frac{f(n,x,q^{-n}s)}{s^n}. \qquad (1.13)$$

Aus

$f(n+m-\ell,x,q^\ell s)=xf(n-1+m-\ell,x,q^\ell s)+q^{n-2+m}sf(n-2+m-\ell,x,q^\ell s)$

und

$f(n+m,x,s)=xf(n-1+m,x,s)+q^{n-2+m}sf(n-2+m,x,s)$

ergibt sich

$g(m,n,\ell,x,s)=xg(m-1,n,\ell,x,s)+q^{m-2}q^n sg(m-2,n,\ell,x,s).$

Außerdem ist $g(0,n,\ell,x,s)=0,$ weil die Determinante zwei gleiche Spalten hat.

Daher ist $g(m,n,\ell,x,s)=cf(m,x,q^n s)$ mit einer Konstanten c.

Um diese Konstante zu berechnen, setzen wir $m=-n.$

Hier ergibt sich $f(n,x,s)\,f(-\ell,x,q^\ell s)=g(-n,n,\ell,x,s)=cf(-n,x,q^n s).$

Aus (1.13) folgt also

$$f(n,x,s)(-1)^{\ell-1} q^{\binom{\ell+1}{2}-\ell^2} s^{-\ell} f(\ell,x,s)=cf(-n,x,q^n s)=c(-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}-n^2} s^{-n} f(n,x,s)$$

und somit

$$g(m,n,\ell,x,s)=(-s)^{n-\ell} q^{\binom{n}{2}-\binom{\ell}{2}} f(\ell,x,s)\,f(m,x,q^n s)=(-s)^{n-\ell} q^{\frac{(n-\ell)(\ell+n-1)}{2}} f(\ell,x,s)\,f(m,x,q^n s).$$

Es gilt also

$$g(m,n,\ell,x,s)=\det\begin{pmatrix} f(n,x,s) & f(n-\ell,x,q^\ell s) \\ f(n+m,x,s) & f(n+m-\ell,x,q^\ell s)\end{pmatrix}$$

$$=(-s)^{n-\ell} q^{\frac{(n-\ell)(n+\ell-1)}{2}} f(\ell,x,s)\,f(m,x,q^n s).$$

Für $n \to 2k, m \to n-2k, \ell \to k$ ergibt sich (1.7).

Für $n \to mk, m \to k$ ergibt sich die

Verallgemeinerte q-Cassini-Formel

$$\det\begin{pmatrix} f(mk,x,s) & f((m-1)k,x,q^k s) \\ f((m+1)k,x,s) & f(mk,x,q^k s) \end{pmatrix} = (-1)^{(m-1)k} s^{(m-1)k} q^{\binom{mk}{2}-\binom{k}{2}} f(k,x,s)\, f(k,x,q^{mk}s). \quad (1.14)$$

Wenn wir in (1.2) $x=1$ setzen und mit $n \to \infty$ gehen, erhalten wir

$$F(s) = \sum_{k \ge 0} \frac{q^{k^2}}{(q)_k} s^k. \quad (1.15)$$

Aus (1.11) folgt durch Grenzübergang

$$f(k-1,1,qs)F(s) - f(k,1,s)F(qs) = (-1)^k q^{\binom{k}{2}} s^{k-1} F(q^k s).$$

Für $s=1$ hängt diese Formel eng mit den Identitäten von Rogers-Ramanujan zusammen. Ein ähnlicher Beweis findet sich in [1].

Aus (1.7) erhalten wir als weitere derartige Identitäten

$$f(k,1,q^k s)F(s) - f(2k,1,s)F(q^k s) + (-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}} s^k f(k,1,s)F(q^{2k}s) = 0.$$

Analoge Grenzübergänge ergeben sich auch aus den folgenden Resultaten. Ich werde aber nicht mehr ausdrücklich darauf hinweisen.

2. Rekurrenzen von Quadraten von Fibonacci-Polynomen

Als nächstes betrachten wir die Folge $\left(F_n(x,s)^2\right)$.

Aus $F_n(x,s)^2 = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left((\alpha^2)^n + \left(\beta^2\right)^n - (-s)^n\right)$ ergibt sich für das charakteristische Polynom der Rekurrenz

$(z-\alpha^2)(z-\beta^2)(z+s) = z^3 - (x^2+s)z^2 - s(x^2+s)z + s^3.$

Um eine Rekurrenz der entsprechenden Folge $\left(f(n,x,s)\right)^2$ zu finden, beachte man, dass mit der Folge $\left(a_n\right)$ auch die Folge $\left(a_n^k\right)$ für jedes natürliche k $q-$holonom ist. Speziell ist also für jedes k die Folge der Potenzen $f(n,x,s)^k$ $q-$holonom.

Für $k=2$ ergibt sich mit qGeneratingFunctions

```
QREHadamard[{a[n] == x a[n - 1] + q^(n - 2) s a[n - 2], a[0] == 0, a[1] == 1},
 {a[n] == x a[n - 1] + q^(n - 2) s a[n - 2], a[0] == 0, a[1] == 1}, a[n]]
{q^8 a[n] ==
  -q^(3 n) s^3 a[-3 + n] + q^(4+n) s (q^n s + q^2 x^2) a[-2 + n] + q^6 (q^n s + q^2 x^2) a[-1 + n],
 a[0] == 0, a[1] == 1, a[2] == x^2}
```

Es gilt also

$$f(n,x,s)^2-(x^2+q^{n-2}s)f(n-1,x,s)^2-q^{n-2}s(x^2+q^{n-2}s)f(n-2,x,s)^2+q^{3n-8}s^3f(n-3,x,s)^2=0.$$

Als Gegenstück ergibt sich daraus die folgende Rekursion:

$$\begin{aligned}&f(n,x,s)^2-(x^2+qs)f(n-1,x,qs)^2-qs(x^2+qs)f(n-2,x,q^2s)^2\\&+q^5s^3f(n-3,x,q^3s)^2=0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Zum Beweis verwenden wir wieder (1.11). Das ergibt hier, wenn wir $f(n,x,s)=a,\ f(n-1,x,qs)=b$ setzen

$f(n-2,x,q^2s)=\frac{1}{qs}(a-xb)$ und $f(n-3,x,q^3s)=\frac{-1}{q^3s^2}\left(xa-(x^2+qs)b\right).$

Daher lautet (2.1) nun

$$a^2-(x^2+qs)b^2-\frac{qs(x^2+qs)}{(qs)^2}(a-xb)^2+\frac{q^5s^3}{(-q^3s^2)^2}\left(xa-(x^2+qs)b\right)^2=0.$$

Das ist aber klar, da die Koeffizienten von a^2,ab,b^2 verschwinden.

Ein Analogon der Formel von Cassini ist das folgende Resultat:

$$\det\begin{pmatrix}f(n,x,s)^2 & f(n-1,x,qs)^2 & f(n-2,x,q^2s)^2\\ f(n+1,x,s)^2 & f(n,x,qs)^2 & f(n-1,x,q^2s)^2\\ f(n+2,x,s)^2 & f(n+1,x,qs)^2 & f(n,x,q^2s)^2\end{pmatrix}=2(-1)^nx^2s^{3n-4}q^{\frac{(n+1)(3n-4)}{2}}.\tag{2.2}$$

Denn das stimmt für $n=2$ durch Ausrechnen. Weiters ergibt sich aus (2.1)

$$d(n,s)=\det\begin{pmatrix}f(n,x,s)^2 & f(n-1,x,qs)^2 & f(n-2,x,q^2s)^2\\ f(n+1,x,s)^2 & f(n,x,qs)^2 & f(n-1,x,q^2s)^2\\ f(n+2,x,s)^2 & f(n+1,x,qs)^2 & f(n,x,q^2s)^2\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}q^5s^3f(n-3,x,q^3s)^2 & f(n-1,x,qs)^2 & f(n-2,x,q^2s)^2\\ q^5s^3f(n-2,x,q^3s)^2 & f(n,x,qs)^2 & f(n-1,x,q^2s)^2\\ q^5s^3f(n-1,x,q^3s)^2 & f(n+1,x,qs)^2 & f(n,x,q^2s)^2\end{pmatrix}=-q^5s^3d(n-1,qs).$$

Damit ist alles gezeigt.

Im klassischen Fall kann man das mit der Formel von Binet direkt beweisen:
Etwas allgemeiner ergibt sich

$$\det\left(F_{n+mi-\ell j}(x,s)^2\right)_{i,j=0}^{2}=\det\left(\frac{\left(\alpha^{n+mi-\ell j}-\beta^{n+mi-\ell j}\right)^2}{(\alpha-\beta)^2}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{(\alpha-\beta)^6}\right)\det\left(\alpha^{2(n+mi-\ell j)}-2\alpha^{(n+mi-\ell j)}\beta^{(n+mi-\ell j)}+\beta^{2(n+mi-\ell j)}\right).$$

Sei nun $z(h,j,\ell,m,)=\begin{pmatrix}\alpha^{(n-j\ell)(2-h)}\beta^{(n-j\ell)h}\\ \alpha^{(n+m-j\ell)(2-h)}\beta^{(n+m-j\ell)h}\\ \alpha^{(n+2m-j\ell)(2-h)}\beta^{(n+2m-j\ell)h}\end{pmatrix}.$

Dann ist

$$\det\left(\alpha^{2(n+mi-\ell j)}-2\alpha^{(n+mi-\ell j)}\beta^{(n+mi-\ell j)}+\beta^{2(n+mi-\ell j)}\right)=-2\sum_{\pi}\det\left(z(0,\pi(0)),z(1,\pi(1)),z(2,\pi(2))\right)\operatorname{sgn}(\pi),$$

wo π alle Permutationen von $\{0,1,2\}$ durchläuft, weil alle anderen Terme mindestens zwei gleiche Spalten haben und daher verschwinden.
Wenn man die Elemente der ersten Zeile heraushebt, ergibt sich

$$\det\left(F_{n+mi-\ell j}(x,s)^2\right)_{i,j=0}^{2}=\left(\frac{-2}{(\alpha-\beta)^6}\right)\left(\sum_{\pi}\operatorname{sgn}(\pi)\prod_{j=0}^{2}\alpha^{(n-j\ell)(2-\pi(j))}\beta^{(n-j\ell)\pi(j)}\right)d(m)$$

mit $d(m)=\det\left(\left(\alpha^{(2-j)m}\beta^{jm}\right)^i\right)=\det\begin{pmatrix}1&1&1\\ \alpha^{2m}&(\alpha\beta)^m&\beta^{2m}\\ \alpha^{4m}&(\alpha\beta)^{2m}&\beta^{4m}\end{pmatrix}.$

Das ist die Vandermonde’sche Determinante

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\ \alpha^{2m}&\alpha^m\beta^m&\beta^{2m}\\ \alpha^{4m}&\alpha^{2m}\beta^{2m}&\beta^{4m}\end{pmatrix}=$$

$$-\left(\alpha^{2m}-(\alpha\beta)^m\right)\left(\alpha^{2m}-\beta^{2m}\right)\left((\alpha\beta)^m-\beta^{2m}\right)=-(\alpha\beta)^m\left(\alpha^m-\beta^m\right)\left(\alpha^{2m}-\beta^{2m}\right)\left(\alpha^m-\beta^m\right).$$

Daher ist $d(m)=(-1)^{m-1}s^m(\alpha-\beta)^3F_m(x,s)^2F_{2m}(x,s).$

Die Summe kann ebenfalls als Determinante $\det(c_{i,j})$ mit $c_{i,j}=\left(\alpha^{2-j}\beta^j\right)^{n-\ell i}$ gedeutet werden.
Es ist dann wie oben

$$\det(c_{i,j}) = \det\left(\left(\alpha^{2-j}\beta^{j}\right)^{n-\ell i}\right) = -\det\begin{pmatrix} \alpha^{2(n-2\ell)} & (\alpha\beta)^{n-2\ell} & \beta^{2(n-2\ell)} \\ \alpha^{2(n-\ell)} & (\alpha\beta)^{n-\ell} & \beta^{2(n-\ell)} \\ \alpha^{2n} & (\alpha\beta)^{n} & \beta^{2n} \end{pmatrix}$$

$$= -\alpha^{2(n-2\ell)}(\alpha\beta)^{n-2\ell}\beta^{2(n-2\ell)}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^{2\ell} & \alpha^{\ell}\beta^{\ell} & \beta^{2\ell} \\ \alpha^{4\ell} & (\alpha\beta)^{2\ell} & \beta^{4\ell} \end{pmatrix} = -(\alpha\beta)^{3n-6\ell}d(\ell).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \det\left(F_{n+mi-\ell j}(x,s)^2\right)_{i,j=0}^{2} &= \left(\frac{2}{(\alpha-\beta)^6}\right)(-s)^{3n-6\ell}d(m)d(\ell) \\ &= (-1)^{n+m+\ell}2s^{3n-5\ell+m}F_m(x,s)^2F_{2m}(x,s)F_\ell(x,s)^2F_{2\ell}(x,s). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Für $x = s = m = \ell = 1$ reduziert sich das auf $\det\left(F_{n+i-j}^2\right)_{i,j=0}^{2} = 2(-1)^n.$

Wir wollen die obigen Überlegungen noch ein wenig verallgemeinern:
Für $F_{kn}(x,s)^2$ ergibt sich aus der Binet-Formel die charakteristische Gleichung
$(z^2 - L_{2k}(x,s)z + s^{2k})(z-(-s)^k) = z^3 - (L_{2k}(x,s)+(-s)^k)z^2 + (-s)^k(L_{2k}(x,s)+(-s)^k)z - (-s)^{3k}.$
Nun gilt wegen $\alpha^{3k} - \beta^{3k} = \left(\alpha^k - \beta^k\right)\left(\left(\alpha^{2k} + \beta^{2k} + (\alpha\beta)^k\right)\right)$ die Identität
$F_k(x,s)(L_{2k}(x,s)+(-s)^k) = F_{3k}(x,s)$. Daher kann man die charakteristische Gleichung auch in der Form

$$z^3 - \frac{F_{3k}(x,s)}{F_k(x,s)}z^2 + (-s)^k\frac{F_{3k}(x,s)}{F_k(x,s)}z - (-s)^{3k} \tag{2.4}$$

schreiben.

Im Fall der $q-$Fibonacci-Polynome gilt

Satz 3
Für alle $k \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} &f(n,x,s)^2 - \frac{f(3k,x,q^{n-3k}s)f(2k,x,q^{n-2k}s)}{f(2k,x,q^{n-3k}s)f(k,x,q^{n-2k}s)}f(n-k,x,s)^2 \\ &+(-s)^k q^{kn-\frac{k(3k+1)}{2}}\frac{f(3k,x,q^{n-3k}s)f(k,x,q^{n-k}s)}{f(k,x,q^{n-3k}s)f(k,x,q^{n-2k}s)}f(n-2k,x,s)^2 \\ &-(-s)^{3k}q^{3kn-2k^2-\frac{3k(3k+1)}{2}}\frac{f(2k,x,q^{n-2k}s)f(k,x,q^{n-k}s)}{f(2k,x,q^{n-3k}s)f(k,x,q^{n-3k}s)}f(n-3k,x,s)^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

sowie

$$f(n,x,s)^2-\frac{f(3k,x,s)\,f(2k,x,s)}{f(k,x,q^ks)\,f(2k,x,q^ks)}\,f(n-k,x,q^ks)^2$$
$$+(-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}} s^k\,\frac{f(3k,x,s)\,f(k,x,s)}{f(k,x,q^ks)\,f(k,x,q^{2k}s)}\,f(n-2k,x,q^{2k}s)^2 \tag{2.6}$$
$$+(-1)^{k-1}s^{3k}q^{2k^2+\frac{3k(3k-1)}{2}}\,\frac{f(k,x,s)\,f(2k,x,s)}{f(k,x,q^{2k}s)\,f(2k,x,q^ks)}\,f(n-3k,x,q^{3k}s)^2.$$

Der Beweis ergibt sich wie im Spezialfall, indem man die Rekursion (1.7) verwendet, um alle Ausdrücke durch $b=f(n-2k,x,q^{2k}s)$ und $a=f(n-3k,x,q^{3k}s)$ auszudrücken.
Als Gegenstück zu (2.3) haben wir hier

Satz 4
Für alle $n\in\mathbb{Z}$ und $k\geq 1$ gilt

$$d(n,k,s)=\det\begin{pmatrix} f(kn,x,s)^2 & f(k(n-1),x,q^ks)^2 & f(k(n-2),x,q^{2k}s)^2 \\ f(k(n+1),x,s)^2 & f(kn,x,q^ks)^2 & f(k(n-1),x,q^{2k}s)^2 \\ f(k(n+2),x,s)^2 & f(k(n+1),x,q^ks)^2 & f(kn,x,q^{2k}s)^2 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$
$$=2(-1)^{nk}q^{\frac{k(kn+2k-1)(3n-4)}{2}}s^{k(3n-4)}f(2k,x,s)\,f(2k,x,q^{nk}s)\,f(k,x,s)\,f(k,x,q^ks)\,f(k,x,q^{nk}s)\,f(k,x,q^{(n+1)k}s).$$

Das ergibt sich aus (2.6) und dem Spezialfall für $n=2$:

$$d(2,k,s)=\det\begin{pmatrix} f(2k,x,s)^2 & f(k,x,q^ks)^2 & 0 \\ f(3k,x,s)^2 & f(2k,x,q^ks)^2 & f(k,x,q^{2k}s)^2 \\ f(4k,x,s)^2 & f(3k,x,q^ks)^2 & f(2k,x,q^{2k}s)^2 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$
$$=2q^{k(4k-1)}s^{2k}f(2k,x,s)\,f(2k,x,q^{2k}s)\,f(k,x,s)\,f(k,x,q^ks)\,f(k,x,q^{2k}s)\,f(k,x,q^{3k}s).$$

Zum Beweis von (2.8) kann man folgendermaßen vorgehen:

Aus (1.7) ergibt sich

$$f(nk,x,s)=af((n-1)k,x,q^ks)+bf((n-2)k,x,q^{2k}s)$$

mit $a=\dfrac{f(2k,x,s)}{f(k,x,q^ks)}$ und $b=(-1)^{k-1}q^{\frac{k(3k-1)}{2}}s^k\dfrac{f(k,x,s)}{f(k,x,q^ks)}$.

Daher ist

$$f(nk,x,s)^2=a^2f((n-1)k,x,q^ks)^2+b^2f((n-2)k,x,q^{2k}s)^2+2abf((n-1)k,x,q^ks)\,f((n-2)k,x,q^{2k}s).$$

Das impliziert

$$d(2,k,s)=-2ab\det\begin{pmatrix} 0 & f(k,x,q^k s)^2 & 0 \\ f(2k,x,q^k s)\,f(k,x,q^{2k}s) & f(2k,x,q^k s)^2 & f(k,x,q^{2k}s)^2 \\ f(3k,x,q^k s)\,f(2k,x,q^{2k}s) & f(3k,x,q^k s)^2 & f(2k,x,q^{2k}s)^2 \end{pmatrix}$$

$$=-2abf(k,x,q^k s)^2\left(f(2k,x,q^k s)\,f(k,x,q^{2k}s)\,f(2k,x,q^{2k}s)^2-f(3k,x,q^k s)\,f(2k,x,q^{2k}s)\,f(k,x,q^{2k}s)^2\right)$$

$$=-2abf(k,x,q^k s)^2\,f(k,x,q^{2k}s)\,f(2k,x,q^{2k}s)\left(f(2k,x,q^k s)\,f(2k,x,q^{2k}s)-f(3k,x,q^k s)\,f(k,x,q^{2k}s)\right)$$

$$=-2\frac{f(2k,x,s)}{f(k,x,q^k s)}(-1)^{k-1}q^{\frac{k(3k-1)}{2}}s^k\frac{f(k,x,s)}{f(k,x,q^k s)}\,f(k,x,q^k s)^2\,f(k,x,q^{2k}s)\,f(2k,x,q^{2k}s)$$

$$\left(f(2k,x,q^k s)\,f(2k,x,q^{2k}s)-f(3k,x,q^k s)\,f(k,x,q^{2k}s)\right)$$

$$=2(-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}}s^k\,f(2k,x,s)\,f(2k,x,q^{2k}s)\,f(k,x,s)\,f(k,x,q^{2k}s)\left(f(2k,x,q^k s)\,f(2k,x,q^{2k}s)-f(3k,x,q^k s)\,f(k,x,q^{2k}s)\right).$$

Nun ist nach der verallgemeinerten Formel von Cassini (1.14)

$$f(2k,x,q^k s)\,f(2k,x,q^{2k}s)-f(3k,x,q^k s)\,f(k,x,q^{2k}s)=(-1)^k(q^k s)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}}f(k,x,q^k s)\,f(k,x,q^{3k}s).$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$d(2,k,s)=2q^{k(4k-1)}s^{2k}\,f(2k,x,s)\,f(2k,x,q^{2k}s)\,f(k,x,s)\,f(k,x,q^k s)\,f(k,x,q^{2k}s)\,f(k,x,q^{3k}s).$$

3. Rekurrenzen für höhere Potenzen von Fibonacci-Polynomen

Im klassischen Fall der Fibonacci-Polynome kann man auch die Rekurrenz der höheren Potenzen $F_n(x,s)^k$ sehr einfach berechnen.

Denn $F_n(x,s)^k=\left(\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^k$ ist eine Linearkombination der Potenzen von $\alpha^k,\alpha^{k-1}\beta,\alpha^{k-2}\beta^2,\cdots,\beta^k$. Wegen $\alpha\beta=-s$ ist $F_n(x,s)^k$ also eine Linearkombination der Potenzen von $\alpha^k,\beta^k;-\alpha^{k-2}s,-\beta^{k-2}s;\alpha^{k-4}s^2,\beta^{k-4}s^2;\cdots,$ wobei für $k=2\ell$ statt der beiden letzten Terme $(-s)^\ell$ steht.

Sei $h_{k+1}(z,x,s)=(z-\alpha^k)(z-\beta^k)(z+\alpha^{k-2}s)\cdots$ das normierte Polynom mit diesen Nullstellen. Dann gilt offenbar

$$(z-\alpha^k)(z-\beta^k)=z^2-L_k(x,s)z+(-1)^k s^k,$$
$$(z+\alpha^{k-2}s)(z+\beta^{k-2}s)=z^2+sL_{k-2}(x,s)z+(-1)^k s^k,$$
$$(z-\alpha^{k-4}s^2)(z-\beta^{k-4}s^2)=z^2-s^2L_{k-4}(x,s)z+(-1)^k s^k,\cdots.$$

Daher ist

$$h_1(z,x,s)=z-1,$$

$h_2(z,x,s) = z^2 - xz - s,$
$h_3(z,x,s) = (z^2 - L_2(x,s)z + s^2)(z+s),$
$h_4(z,x,s) = (z^2 - L_3(x,s)z - s^3)(z^2 + sL_1(x,s)z - s^3),$
$h_5(z,x,s) = (z^2 - L_4(x,s)z + s^4)(z^2 + sL_2(x,s)z + s^4)(z - s^2), \cdots.$
Daraus ergibt sich

$$h_k(z,x,s) = \left(z^2 - L_{k-1}(x,s)z + (-1)^{k-1}s^{k-1}\right)h_{k-2}\left(-\frac{z}{s},x,s\right)(-s)^{k-2}. \tag{3.1}$$

Somit ergibt sich eine Darstellung der Gestalt

$$h_k(z,x,s) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{\binom{j+1}{2}} s^{\binom{j}{2}} \left\langle {k \atop j} \right\rangle z^{k-j}$$

mit gewissen Koeffizienten $\left\langle {k \atop j} \right\rangle$.

Diese Koeffizienten sind die (Polynom-)Fibonomialkoeffizienten

$$\left\langle {k \atop j} \right\rangle = \left\langle {k \atop j} \right\rangle (x,s) = \frac{\prod_{i=0}^{j-1} F_{k-i}(x,s)}{\prod_{i=1}^{j} F_i(x,s)}. \tag{3.2}$$

Es gilt also

$$\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{\binom{j+1}{2}} s^{\binom{j}{2}} \left\langle {k+1 \atop j} \right\rangle F_{n-j}(x,s)^k = 0 \tag{3.3}$$

für $n \geq k+1$.

Das ist ein wohlbekanntes Resultat, ich weiß jedoch nicht, wer es zuerst gefunden hat.

Es kann noch ein wenig verallgemeinert werden:
Sei

$$\left\langle {k \atop j} \right\rangle_\ell = \frac{\prod_{i=0}^{j-1} F_{(k-i)\ell}(x,s)}{\prod_{i=1}^{j} F_{i\ell}(x,s)}. \tag{3.4}$$

Dann gilt mit $p(\ell) = 1$, falls ℓ ungerade ist und $p(\ell) = 2$, falls ℓ gerade ist,

$$\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{\left\lfloor \frac{p(\ell)j+1}{2} \right\rfloor} s^{\binom{j}{2}\ell} \left\langle {k+1 \atop j} \right\rangle_\ell F_{(n-j)\ell}(x,s)^k = 0. \tag{3.5}$$

Spezialfälle sind (1.3) für $k=1$ und $\ell \to k$ und (2.4) für $k=2$.

Zum Beweis sei bemerkt, dass $F_{n\ell}(x,s)^k$ für ungerades ℓ eine Linearkombination der Potenzen von $\alpha^{k\ell}, \beta^{k\ell}; -\alpha^{\ell(k-2)}s^\ell, -\beta^{\ell(k-2)}s^\ell; \alpha^{k-4}s^2, \beta^{k-4}s^2; \cdots$ ist. Man muss also in den obigen Formeln nur $\alpha \to \alpha^\ell, \beta \to \beta^\ell, s \to s^\ell$ ersetzen.

Speziell gilt für die entsprechenden Polynome
$H_{k+1}(z,x,s)=(z-\alpha^{\ell k})(z-\beta^{\ell k})(z+\alpha^{\ell(k-2)}s^{\ell})\cdots$
die Beziehung

$$H_k(z,x,s)=\left(z^2-L_{\ell(k-1)}(x,s)z+(-1)^{k-1}s^{\ell(k-1)}\right)H_{k-2}(-\frac{z}{s^{\ell}},x,s)(-s)^{\ell(k-2)}. \qquad (3.6)$$

Es gibt also eine Darstellung $H_k(z,x,s)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{\binom{j+1}{2}}s^{\ell\binom{j}{2}}\left\langle {k \atop j} \right\rangle_{\ell} z^{k-j}.$

Schreibt man $H_{k+1}(z,x,s)=\sum_{j=0}^{k+1}a_{kj}z^{k+1-j},$ dann ist

$\sum_{j=0}^{k+1}a_{kj}F_{(n-j)\ell}^{k}=0$ für $n\geq k+1.$ Genauer gibt es eine Darstellung der Form

$H_k(z,x,s)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{\binom{j+1}{2}}s^{\ell\binom{j}{2}}\left\langle {k \atop j} \right\rangle_{\ell} z^{k-j}.$ Hier sind die Koeffizienten $\left\langle {k \atop j} \right\rangle_{\ell}$ noch unbekannt. Wir müssen also zeigen, dass sie durch (3.4) gegeben sind.
Koeffizientenvergleich in (3.6) liefert

$$\left\langle {k+2 \atop j} \right\rangle_{\ell}=(-s)^{\ell j}\left\langle {k \atop j} \right\rangle_{\ell}+L_{(k+1)\ell}(x,s)\left\langle {k \atop j-1} \right\rangle_{\ell}+(-s)^{(k+2-j)\ell}\left\langle {k \atop j-2} \right\rangle_{\ell}. \qquad (3.7)$$

Dadurch und durch die Anfangswerte $\left\langle {0 \atop j} \right\rangle_{\ell}=[j=0]$ und $\left\langle {1 \atop j} \right\rangle_{\ell}=1$ für $j=0$ und $j=1$ sind die $\left\langle {k \atop j} \right\rangle_{\ell}$ eindeutig festgelegt.

Man verifiziert leicht, dass (3.7) gleichbedeutend mit der Formel

$$F_{(k+2)\ell}(x,s)F_{(k+1)\ell}(x,s)=(-s)^{j\ell}F_{(k-j+2)\ell}(x,s)F_{(k-j+1)\ell}(x,s)+L_{(k+1)\ell}(x,s)F_{j\ell}(x,s)F_{(k-j+2)\ell}(x,s)$$
$$+(-s)^{(k+2-j)\ell}F_{(j-1)\ell}(x,s)F_{j,}(x,s)$$

ist, die sich sofort mit Hilfe der Binetformeln beweisen lässt.
Für gerades ℓ ändern sich nur die Vorzeichen.

Es gilt auch die einfachere Rekursion
$\left\langle {n \atop k} \right\rangle=sF_{k-1}(x,s)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle+F_{n-k+1}(x,s)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle.$
Das ergibt sich aus

$F_n(x,s)=sF_{k-1}(x,s)F_{n-k}(x,s)+F_k(x,s)F_{n+1-k}(x,s).$
Als Folgerung sieht man, dass $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ ein Polynom in x,s mit nichtnegativen Koeffizienten ist.

Die Matrix dieser Fibonomialkoeffizienten beginnt mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & s+x^2 & s+x^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x\,(2\,s+x^2) & (s+x^2)\,(2\,s+x^2) & x\,(2\,s+x^2) & 1 & 0 \\ 1 & s^2+3\,s\,x^2+x^4 & (2\,s+x^2)\,(s^2+3\,s\,x^2+x^4) & (2\,s+x^2)\,(s^2+3\,s\,x^2+x^4) & s^2+3\,s\,x^2+x^4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ich möchte noch einen weiteren Beweis für die Rekurrenz der Folgen $F_{\ell n}(x,s)^k$ angeben, der eine Idee von L. Carlitz [2] verwendet. Wir wissen bereits, dass $F_{\ell n}(x,s)^k$ eine Linearkombination der Folgen $\alpha^{\ell(k-j)n}\beta^{\ell jn}$ für $0 \le j \le k$ ist. Sei U der Verschiebungsoperator $Uh(n) = h(n-1)$. Diese Folgen $\alpha^{\ell(k-j)n}\beta^{\ell jn}$ genügen der Rekurrenz $(1-\alpha^{\ell(k-j)}\beta^{\ell j}U)\alpha^{\ell(k-j)n}\beta^{\ell jn} = 0.$

Daher gilt $\prod_{j=0}^{n}(1-\alpha^{\ell(k-j)}\beta^{\ell j}U)F_{\ell n}(x,s)^k = 0.$

Nun gilt nach dem $q-$binomischen Lehrsatz

$$\prod_{j=0}^{n-1}(1-q^j x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Für $q = \frac{\beta}{\alpha}$ ist $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \alpha^{k^2-nk}\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle,$ wie man sofort verifiziert.

Daher ist

$$\prod_{j=0}^{k}(1-\alpha^{(k-j)}\beta^j U) = \prod_{j=0}^{k}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j(\alpha^k U)\right) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\binom{j}{2}}\alpha^{j^2-(k+1)j}\left\langle \begin{matrix} k+1 \\ j \end{matrix} \right\rangle \alpha^{kj}U^j$$

$$= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j(\alpha\beta)^{\binom{j}{2}}\left\langle \begin{matrix} k+1 \\ j \end{matrix} \right\rangle U^j = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{\binom{j+1}{2}}s^{\binom{j}{2}}\left\langle \begin{matrix} k+1 \\ j \end{matrix} \right\rangle U^j.$$

Wenn man $\alpha \to \alpha^\ell, \beta \to \beta^\ell$ übergehen lässt, ergibt sich genauso

$$\prod_{j=0}^{k}(1-\alpha^{(k-j)\ell}\beta^{j\ell}U) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+\ell\binom{j}{2}}s^{\ell\binom{j}{2}}\left\langle \begin{matrix} k+1 \\ j \end{matrix} \right\rangle_\ell U^j.$$

Daher gilt

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+\ell\binom{j}{2}}s^{\ell\binom{j}{2}}\left\langle \begin{matrix} k+1 \\ j \end{matrix} \right\rangle_\ell \left(F_{\ell(n-j)}\right)^k = 0.$$

Die Polynome $h_n(z,x,s)$ treten auch als charakteristisches Polynom $\det\left(zI_n - a(n)\right) = h_n(z,x,s)$ der Matrizen

$a(n)=\det\left(\binom{n-1-i}{j}x^{n-1-i-j}s^j\right)_{i,j=0}^{n-1}$ bzw. $b(n)=\det\left(\binom{i-1}{n-j}x^{i+j-n-1}s^{n-j}\right)_{i,j=1}^{n}$ auf. Das wurde (für den Fall $x=s=1$) zuerst von V.E. Hoggatt vermutet und von L. Carlitz [2] bewiesen.

H. Prodinger [4] hat im Fall $x=s=1$ einen sehr einfachen Beweis durch explizite Bestimmung der Eigenvektoren $u(n,j)$ zu den Eigenwerten $\lambda_j=(-s)^{n-j}\alpha^{2j-n-1}$ für $1\le j\le n$ gegeben. Sein Beweis liefert in unserem etwas allgemeineren Fall die Eigenvektoren

$$u(n,j)=\begin{pmatrix}u(n,1,j)\\ u(n,2,j)\\ \vdots\\ u(n,n,j)\end{pmatrix}$$

mit $u(n,i,j)=\sum_{k=1}^{j}(-s)^{i-k}\binom{i-1}{k-1}\binom{n-i}{j-k}\alpha^{2k-i-1}$.

Dieses Resultat scheint jedoch kein schönes $q-$Analogon zu haben.

Dagegen ergibt sich ein schönes $q-$Analogon, wenn man die Rekurrenz der Potenzen der $q-$Fibonacci-Polynome betrachtet.
Dabei erwies sich wieder das Mathematica Softwarepaket qGeneratingFunctions von Christoph Koutschan als nützliches Hilfsmittel. Damit konnte ich für $k=2,3,4$ die entsprechenden Rekurrenzen sehr schnell berechnen. Für $k=5$ dauerte es schon relativ lang. Aber diese Werte genügten, um die folgende Vermutung zu finden:

Vermutung 1
Sei

$$\begin{aligned}fibo(k,j,x,s)&=\frac{f(k,x,q^{-k}s)f(k-1,x,q^{-k+1}s)\cdots f(k-j+1,x,q^{-k+j-1}s)}{f(1,x,q^{-j}s)f(2,x,q^{-j}s)\cdots f(j,x,q^{-j}s)}\\ &\cdot\frac{f(k-j,x,q^{j-k}s)f(k-j-1,x,q^{j+1-k}s)\cdots f(1,x,q^{-1}s)}{f(k-j,x,q^{-k}s)f(k-j-1,x,q^{1-k}s)\cdots f(1,x,q^{-j-1}s)}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^{\binom{j+1}{2}}(q^ns)^{\binom{j}{2}}q^{-2\binom{j+1}{3}}fibo(k+1,j,q^ns)f(n-j,x,s)^k=0.\tag{3.9}$$

Setzt man

$$\left\langle{k\atop j}\right\rangle(x,s,q)=\frac{\prod_{i=1}^{k}f(i,x,s)}{\prod_{i=1}^{j}f(i,x,q^{j-i}s)\prod_{i=1}^{k-j}f(i,x,q^js)},\tag{3.10}$$

dann gilt

$$\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^{\binom{j+1}{2}}s^{\binom{j}{2}}q^{\sum_{i=0}^{j-1}i^2}\left\langle{k+1\atop j}\right\rangle(x,s,q)f(n-j,x,q^js)^k=0.\tag{3.11}$$

Die Formeln (3.9) und (3.11) sind natürlich wieder äquivalent und ein q – Analogon von (3.3).
Das lässt sich für kleine k sehr leicht verifizieren und/oder mit Mathematica überprüfen.
Denn beachtet man (1.11), so sieht man, dass (3.11) äquivalent mit

$$a^k + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{\binom{j+1}{2}} s^{\binom{j}{2}} q^{\sum_{i=0}^{j-1} i^2} \left\langle {k+1 \atop j} \right\rangle (x,s,q) v(j)^{-k} \left(f(j-1,x,qs)a - f(j,x,s)b \right)^k = 0$$

für beliebige a,b ist.
Für beliebige k habe ich dabei keine Gesetzmäßigkeit gefunden, die zu einem allgemeinen Beweis führen könnte.
Dasselbe gilt für die folgende

Vermutung 2
Sei $fac(n,s,\ell) = f(\ell,x,s) f(2\ell,x,s) \cdots f(n\ell,x,s)$. *Dann gilt*

$$\det\left(f(n+i-j, q^j s)^k \right)_{i,j=0}^{k} = \left((-1)^{(n-k)\binom{k+1}{2}} \prod_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \right) \left(q^{\frac{n+k-1}{2}} s \right)^{2\binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{2}(n-k)} \prod_{j=0}^{k-1} fac(k-j, q^j s, 1) \prod_{j=0}^{k-1} fac(k-j, q^{n+j} s, 1). \tag{3.12}$$

Hier ist überaus erstaunlich, dass dabei das Produkt der Binomialkoeffizienten auftritt. Im klassischen Fall ergibt sich das wieder aus der Binet-Formel. Wir können nämlich analog zum Fall $k=2$ vorgehen und erhalten, wenn wir $Fib(n,s) = F_1(x,s) F_2(x,s) \cdots F_n(x,s)$ setzen,

$$\det\left(F_{n+i-j}(x,s)^k \right)_{i,j=0}^{k} = \det\left(\frac{\left(\alpha^{n+i-j} - \beta^{n+i-j} \right)^k}{(\alpha-\beta)^k} \right) = \left(\frac{1}{(\alpha-\beta)^{k^2+k}} \right) \det\left(\sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \binom{k}{\ell} \alpha^{(n+i-j)(k-\ell)} \beta^{(n+i-j)\ell} \right)$$

Sei nun $z(j,\ell) = \begin{pmatrix} \alpha^{(n-j)(k-\ell)} \beta^{(n-j)\ell} \\ \alpha^{(n+1-j)(k-\ell)} \beta^{(n+1-j)\ell} \\ \vdots \\ \alpha^{(n+k-j)(k-\ell)} \beta^{(n+k-j)\ell} \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$\det\left(\sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \binom{k}{\ell} \alpha^{(n+i-j)(k-\ell)} \beta^{(n+i-j)\ell} \right) = (-1)^{\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} \prod_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \sum_{\pi} \det\left(z(0,\pi(0)), z(1,\pi(1)), \cdots z(k,\pi(k)) \right) \operatorname{sgn}(\pi)$$

wo π alle Permutationen durchläuft, weil alle anderen Terme mindestens zwei gleiche Spalten haben und daher verschwinden.
Wenn man die Elemente der ersten Zeile heraushebt, ergibt sich

$$\det\left(F_{n+i-j}(x,s)^k \right)_{i,j=0}^{k} = \left(\frac{1}{(\alpha-\beta)^{k(k+1)}} \right) (-1)^{\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} \prod_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \left(\sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=0}^{k} \alpha^{(n-i)(k-\pi(i))} \beta^{(n-i)\pi(i)} \right) d$$

mit $d = \det\left(\left(\alpha^{k-j} \beta^j \right)^i \right)$.

Nun ist

$$d=\det\left(\left(\alpha^{k-j}\beta^{j}\right)^{i}\right)=(-1)^{\binom{k+1}{2}}\left(\alpha^{k}-\alpha^{k-1}\beta\right)\left(\alpha^{k}-\alpha^{k-2}\beta^{2}\right)\cdots\left(\alpha^{k}-\beta^{k}\right)\left(\alpha^{k-1}\beta-\alpha^{k-2}\beta^{2}\right)$$
$$\cdots\left(\alpha^{k-1}\beta-\beta^{k}\right)\cdots\left(\alpha\beta^{k-1}-\beta^{k}\right)$$
$$=(-1)^{\binom{k+1}{2}}(\alpha\beta)^{\binom{k}{2}+\binom{k-1}{2}+\cdots+\binom{k}{2}}(\alpha-\beta)\left(\alpha^{2}-\beta^{2}\right)\cdots\left(\alpha^{k}-\beta^{k}\right)(\alpha-\beta)\cdots\left(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}\right)\cdots(\alpha-\beta)$$
$$=(-1)^{\binom{k+1}{2}}(-s)^{\binom{k+1}{3}}(\alpha-\beta)^{\binom{k+1}{2}}\prod_{j=0}^{k-1}Fib(k-j,s).$$

Die Summe kann ebenfalls als Determinante $\det(c_{i,j})$ mit $c_{i,j}=\left(\alpha^{k-j}\beta^{j}\right)^{n-i}$ gedeutet werden. Es ist dann wie oben

$$\det(c_{i,j})=d\prod_{j=0}^{k}\left(\alpha^{k-j}\beta^{j}\right)^{n-k}.$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$\det\left(F_{n+i-j}(x,s)^{k}\right)_{i,j=0}^{k}=\left(\frac{1}{(\alpha-\beta)^{k(k+1)}}\right)(-1)^{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor+\binom{k+1}{2}}\prod_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}d^{2}\prod_{j=0}^{k}\left(\alpha^{k-j}\beta^{j}\right)^{n-k}$$
$$=\left(\frac{1}{(\alpha-\beta)^{k(k+1)}}\right)\prod_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}d^{2}(-s)^{\binom{k+1}{2}(n-k)}d^{2}$$
$$=\left(\frac{1}{(\alpha-\beta)^{k(k+1)}}\right)(-1)^{\binom{k+1}{2}(n-k)}\prod_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}s^{\binom{k+1}{2}(n-k)+2\binom{k+1}{3}}(\alpha-\beta)^{2\binom{k+1}{2}}\prod_{j=0}^{k-1}Fib(k-j,s)^{2},$$

also

$$\det\left(F_{n+i-j}(x,s)^{k}\right)_{i,j=0}^{k}=(-1)^{\binom{k+1}{2}(n-k)}\prod_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}s^{\binom{k+1}{2}(n-k)+2\binom{k+1}{3}}\prod_{j=0}^{k-1}Fib(k-j,s)^{2}. \qquad (3.13)$$

Derselbe Beweis liefert für $\alpha=1,\beta=q$ wegen $\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}=\frac{1-q^{n}}{1-q}=[n]$ die Formel

$$\det\left([n+i-j]^{k}\right)_{i,j=0}^{k}=q^{\binom{k+1}{2}(n-k)+2\binom{k+1}{3}}\prod_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\prod_{j=0}^{k-1}\left([k-j]!\right)^{2}. \qquad (3.14)$$

Diese Vermutung kann noch ein wenig verallgemeinert werden.

Vermutung 3

Für $n\in\mathbb{Z}$ und $\ell,k\geq 1$ gilt

$$\det\left(f(\ell(n+i-j),x,q^{\ell j}s)^k \right)_{i,j=0}^{k} = (-1)^{\ell\binom{k+1}{2}(n-k)} \left(\prod_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\right)\left(q^{\frac{\ell(n+k)-1}{2}} s\right)^{\ell\left(\binom{k+1}{2}(n-k)+2\binom{k+1}{3}\right)}$$
$$\prod_{j=0}^{k-1} fac(k-j,q^{\ell j}s,\ell)\prod_{j=0}^{k-1} fac(k-j,q^{\ell(n+j)}s,\ell). \tag{3.15}$$

Und das ist wieder ein Spezialfall von

Vermutung 4

$$\det\left(f(n+mi-\ell j,x,q^{\ell j}s)^k \right)_{i,j=0}^{k} = (-1)^{\binom{k+1}{2}(n+mk-m+\ell)} \left(\prod_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\right)$$
$$s^{\binom{k+1}{3}(\ell+m)+\binom{k+1}{2}(n-k\ell)} q^{\binom{k+1}{2}\binom{n}{2}+\binom{k+1}{3}mn+\binom{k+1}{3}\frac{m(km-2)}{4}-\binom{k+1}{2}^2\binom{\ell}{2}-\binom{k+1}{3}\frac{\ell(3k+2)}{4}}$$
$$\prod_{j=0}^{k-1} fac(k-j,x,q^{mj+n}s,m)\prod_{j=0}^{k-1} fac(k-j,x,q^{\ell j}s,\ell).$$

Ähnliche Fibonomialkoeffizienten treten auch in anderen Formeln auf.
Setzt man

$$\left\langle {m \atop j} \right\rangle(\ell,x,s,q) = \frac{\prod_{i=1}^{m} f(\ell i,x,s)}{\prod_{i=1}^{j} f(\ell i,x,q^{\ell(j-i)}s)\prod_{i=1}^{m-j} f(\ell i,x,q^{\ell j}s)},$$

so kann man (2.6) in der Gestalt

$$f(\ell n,x,s)^2 - \left\langle {3 \atop 1} \right\rangle(\ell,x,s,q) f(\ell n-\ell,x,q^{\ell}s)^2 + (-1)^{\ell} s^{\ell} \left\langle {3 \atop 2} \right\rangle(\ell,x,s,q) f(\ell n-2\ell,x,q^{2\ell}s)^2$$
$$+(-1)^{\ell-1} s^{3\ell} q^{2\ell^2+\frac{3\ell(3\ell-1)}{2}} \left\langle {3 \atop 3} \right\rangle(\ell,x,s,q) f(\ell n-3\ell,x,q^{3\ell}s)^2 = 0 \tag{3.16}$$

schreiben.
Weitere derartige Formeln sind

$$f(2n,x,s)^3 - \left\langle {4 \atop 1} \right\rangle(2,x,s,q) f(2n-2,x,q^2s)^3 + q^5s^2 \left\langle {4 \atop 2} \right\rangle(2,x,s,q) f(2n-4,x,q^4s)^3$$
$$-q^{23}s^6 \left\langle {4 \atop 3} \right\rangle(2,x,s,q) f(2n-6,x,q^6s)^3 + q^{62}s^{12} \left\langle {4 \atop 4} \right\rangle(2,x,s,q) f(2n-8,x,q^8s)^3 = 0, \tag{3.17}$$

$$f(3n,x,s)^3 - \left\langle {4 \atop 1} \right\rangle(3,x,s,q) f(3n-3,x,q^3s)^3 - q^{12}s^3 \left\langle {4 \atop 2} \right\rangle(3,x,s,q) f(3n-6,x,q^6s)^3$$
$$+q^{54}s^9 \left\langle {4 \atop 3} \right\rangle(3,x,s,q) f(3n-9,x,q^9s)^3 + q^{144}s^{18} \left\langle {4 \atop 4} \right\rangle(3,x,s,q) f(3n-12,x,q^{12}s)^3 = 0, \tag{3.18}$$

$$f(4n,x,s)^3 - \left\langle {4 \atop 1} \right\rangle (4,x,s,q)\, f(4n-4,x,q^4s)^3 + q^{22}s^4 \left\langle {4 \atop 2} \right\rangle (4,x,s,q)\, f(4n-8,x,q^8s)^3$$
$$-q^{98}s^{12} \left\langle {4 \atop 3} \right\rangle (4,x,s,q)\, f(4n-12,x,q^{12}s)^3 + q^{260}s^{24} \left\langle {4 \atop 4} \right\rangle (4,x,s,q)\, f(4n-16,x,q^{16}s)^3 = 0. \tag{3.19}$$

Diese Resultate legen die folgende Vermutung nahe:

Vermutung 5
Für alle $k \geq 1$ *und* $\ell \geq 1$ *gilt die Rekurrenz*

$$\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{j+\ell\binom{j}{2}} \left(q^{\frac{(4j+1)\ell-3}{6}} s \right)^{\ell\binom{j}{2}} \left\langle {k+1 \atop j} \right\rangle (\ell,x,s,q)\, f(\ell(n-j),x,q^{\ell j}s)^k = 0. \tag{3.20}$$

Literatur

[1] G. Andrews, A. Knopfmacher, P. Paule, An infinite family of Engel expansions of Rogers-Ramanujan type, Adv. Appl. Math. 25 (2000), 2-11

[2] L. Carlitz, The characteristic polynomial of a certain matrix of binomial coefficients, Fibonacci Quarterly 3 (1965), 81-89

[3] J. Cigler, q-Fibonacci polynomials, Fibonacci Quarterly 41 (2003), 31-40

[4] H. Prodinger, The eigenvectors of the right-justified Pascal triangle: a shorter proof with generating functions, arXiv CO/0011174, 2000