Ein paar einfache q-Analoga des binomischen Lehrsatzes

Johann Cigler

Soweit mir bekannt ist, gibt es keine allgemeinen Untersuchungen darüber, wie sich das Rekurrenzverhalten von $q-$Binomialsummen ändert, wenn man die $q-$Binomialkoeffizienten $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ durch $q^{i\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ersetzt. Um einen ersten Eindruck davon zu bekommen, möchte ich im Folgenden das Rekurrenzverhalten der Polynome $s(n,i,x)=\sum_{k=0}^{n} q^{i\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k$ in Abhängigkeit von $i\in\mathbb{Z}$ untersuchen. Es zeigt sich, dass das Rekurrenzverhalten der Polynome $s(n,i,x)$ symmetrisch um $i=1$ ist. Der Grad der minimalen Rekurrenz ist $|i-1|+1.$

1. Die einfachsten q-Analoga des binomischen Lehrsatzes $(x+a)^n=\sum\binom{n}{k}x^k a^{n-k}$ sind die Rogers-Szegö-Polynome

$$(x\dot{+}a)^n:=\sum\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k a^{n-k} \tag{1}$$

und die Polynome

$$(x\div a)^n=(x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a)=\sum_k(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}q^{\binom{n-k}{2}}a^{n-k}x^k. \tag{2}$$

(Man vergleiche z.B. [1],wo $(x\dot{+}a)^n=r_n(x,a)$ und $(x\div a)^n=p_n(x,a)$ geschrieben wurde. Die hier gewählte Notation ist jedoch suggestiver).

Durch Koeffizientenvergleich sieht man, dass die erzeugenden Funktionen dieser Polynome durch

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\dot{+}a)^n}{[n]!}z^n=e(xz)e(az) \tag{3}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\div a)^n}{[n]!}z^n=\frac{e(xz)}{e(az)}. \tag{4}$$

gegeben sind. Hier bedeutet $e(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{[n]!}$ die $q-$Exponentialfunktion.

Aus $\frac{e(xz)}{e(az)}\frac{e(az)}{e(yz)}=\frac{e(xz)}{e(yz)}$ ergibt sich durch Koeffizientenvergleich die nützliche Formel

$$\left((x\div a)\dot{+}(a\div y)\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(x\div a)^k(a\div y)^{n-k}=(x\div y)^n. \tag{5}$$

Nun erinnern wir an den abstrakten $q-$binomischen Lehrsatz in der folgenden Form: Wenn zwei lineare Operatoren A_0, A_1 die $q-$Vertauschungsrelation $A_1A_0 = qA_0A_1$ erfüllen, dann gilt die Formel $(A_0 + A_1)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A_0^k A_1^{n-k} = \left(A_0 \dot{+} A_1\right)^n$.

Wir wollen nun die Polynome

$$s(n,i,x) = \sum_{k=0}^{n} q^{i\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \tag{6}$$

für $i \in \mathbb{Z}$ genauer studieren.
Es gilt

$$s(n,i,x) = (\varepsilon + x\varepsilon^i)s(n-1,i,x) = (x\varepsilon^i + \varepsilon)^n 1. \tag{7}$$

Dieses Resultat folgt sofort aus dem abstrakten $q-$binomischen Lehrsatz, weil $\varepsilon(x\varepsilon^i) = q(x\varepsilon^i)\varepsilon$ erfüllt ist.

Es gilt $s(n,0,x) = (x+\varepsilon)^n = (1 \dot{+} x)^n$ und
$s(n,1,x) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = ((x+1)\varepsilon)^n = (1 \underset{\cdot}{+} x)^n$,
wenn wir $(a \underset{\cdot}{+} x)^n = (a \div (-x))^n$ setzen. (Man beachte, dass diese „Addition“ nicht kommutativ ist).

Im Fall $q = 1$ erfüllt $f(n) = (1+x)^n$ als Funktion von n die Gleichung

$$\Delta(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n = x(1+x)^n. \tag{8}$$

Durch Koeffizientenvergleich sieht man, dass das mit den Polynomidentitäten
$\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$
für alle k äquivalent ist. Das soll im Folgenden verallgemeinert werden.

2. Wir benötigen nun den Begriff des q-Polynoms. Darunter verstehen wir eine Funktion der Gestalt $n \to \pi(n) = \sum a_k(q)q^{kn}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller $q-$Polynome ist eine Algebra, die wir mit $\Pi = \mathbb{C}(q)[q^n]$ bezeichnen. Die $q-$Binomialkoeffizienten $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ sind spezielle $q-$Polynome. Insbesondere gilt $q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^n \div 1)^k}{(q-1)^k [k]!}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Mit E bezeichnen wir den Translationsoperator auf den $q-$Polynomen, der durch $E\pi(n) = \pi(n+1)$ definiert ist. Speziell ist $E\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}$.

Weiters sei Z der Operator, der durch

$$Z\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \tag{9}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert ist.
Die Algebra der $q-$Polynome ist isomorph zur Algebra $\mathbb{C}(q)[t]$. Ein Algebra-Isomorphismus wird durch die lineare Abbildung Φ, definiert durch $\Phi(q^{kn}) = t^k$, gegeben. Durch diesen Isomorphismus werden einige Formeln besser durchschaubar.
Das $q-$Polynom $[n] = \dfrac{q^n - 1}{q-1}$ geht unter Φ in $\dfrac{t-1}{q-1}$ und

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \dfrac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\cdots(q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1)\cdots(q-1)}$ in

$$\frac{(t-1)(\frac{t}{q} - 1)\cdots(\frac{t}{q^{k-1}} - 1)}{(q^k - 1)\cdots(q-1)} = q^{-\binom{k}{2}} \frac{(t-1)(t-q)\cdots(t-q^{k-1})}{(q^k-1)\cdots(q-1)}$$

über.

Somit ergibt sich $\Phi\left(q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right) = \dfrac{(t \,\dot{-}\, 1)^k}{(q-1)^k [k]!}$.

Sei D der $q-$Differentiationsoperator, definiert durch $Df(t) = \dfrac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t}$.

Dann ist $(q-1)D\dfrac{(t \,\dot{-}\, 1)^k}{(q-1)^k [k]!} = \dfrac{(t \,\dot{-}\, 1)^{k-1}}{(q-1)^{k-1}[k-1]!}$. Daher erfüllt der Operator $\Delta = \Phi^{-1}(q-1)D\Phi$ die Gleichung

$$\Delta q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{\binom{k-1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

und ist daher das „richtige“ $q-$Analogon des Differenzenoperators.
Für den Verschiebungsoperator E gilt
$\Phi E \Phi^{-1} t^k = \Phi E q^{nk} = \Phi q^{k(n+1)} = q^k \Phi q^{nk} = q^k t^k = \varepsilon t^k$.
Es gilt also $\Phi E \Phi^{-1} = \varepsilon$, wenn man den Operator ε durch $\varepsilon t^k = q^k t^k$ für alle k definiert.
Aus $\Phi \Delta \Phi^{-1} = (q-1)D$ ergibt sich

$$\Delta q^{nk} = \Phi^{-1}\big((q-1)D\big)\Phi q^{nk} = \Phi^{-1}\big((q-1)D\big)t^k = (q^k - 1)\Phi^{-1} t^{k-1} =$$

$$= (q^k - 1) q^{(k-1)n} = \frac{q^{k(n+1)} - q^{kn}}{q^n} = q^{-n}(E-1)q^{kn}.$$

Der $q-$Differenzenoperator kann daher auch durch

$$\Delta p(n) = \frac{p(n+1) - p(n)}{q^n} \tag{11}$$

für alle $q-$Polynome definiert werden.

Setzt man $\Phi Z \Phi^{-1} = \zeta$, so ist $\zeta(x \dot{-} 1)^k = q^k (x \dot{-} 1)^k$.
Mit Hilfe dieser Operatoren sind die Rekurrenzrelationen für die $q-$Binomialkoeffizienten

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

äquivalent mit den Operatoridentitäten

$$\varepsilon = 1 + (q-1)tD \tag{12}$$

und

$$\varepsilon = \zeta(1 + (q-1)D). \tag{13}$$

Daraus ergibt sich speziell

$$\zeta^{-1} = (1 + (q-1)D)\varepsilon^{-1} = (1 + \frac{1}{t}(\varepsilon - 1))\varepsilon^{-1} = \frac{1}{t}(1 + (t-1)\varepsilon^{-1}).$$

Beispielsweise ist $\zeta^{-1} t^k = \dfrac{1}{q^k}(t^k + (q^k - 1)t^{k-1})$.

Wir können daher ζ^{-1} als Funktion des Multiplikationsoperators t und des Operators ε darstellen. Es ist klar, dass ζ^{-1} den Teilraum $\mathbb{C}(q)[t]$ des Vektorraums $\mathbb{C}(q)[t, \frac{1}{t}]$ in sich abbildet, während die Operatoren $\dfrac{1}{t}$ und $\dfrac{t-1}{t}\varepsilon^{-1}$ nur auf dem größeren Vektorraum $\mathbb{C}(q)[t, \frac{1}{t}]$ sinnvoll sind.

Dort gilt

$$\left(\frac{t-1}{t}\varepsilon^{-1}\right)\frac{1}{t} = q\frac{1}{t}\left(\frac{t-1}{t}\varepsilon^{-1}\right).$$

Daher ist nach dem abstrakten $q-$binomischen Lehrsatz für $i > 0$

$$\zeta^{-i} = \sum_{j=0}^{i} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \left(\frac{1}{t}\right)^{i-j} \left(\frac{t-1}{t}\varepsilon^{-1}\right)^{j} = \frac{1}{t^i} \sum_{j=0}^{i} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} (t \dot{-} 1)^j \varepsilon^{-j}. \tag{14}$$

Weiters folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon^i \zeta^{-i}(q-1)D &= \varepsilon^i \frac{1}{t^i} \sum_{j=0}^{i} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} (t \dot{-} 1)^j \varepsilon^{-j} \frac{1}{t}(\varepsilon - 1) = \varepsilon^i \frac{1}{t^{i+1}} \sum_{j=0}^{i} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} (qt \dot{-} q)^j \varepsilon^{-j}(\varepsilon - 1) = \\ &= q^{-i(i+1)} \frac{1}{t^{i+1}} \sum_{j=0}^{i} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} (q^{i+1}t \dot{-} q)^j \varepsilon^{i-j}(\varepsilon - 1). \end{aligned} \tag{15}$$

Betrachten wir $\sum_{j=0}^{i}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}(q^{i+1}t \div q)^j\varepsilon^{i-j}(\varepsilon-1)$ **als Polynom in** ε. **Dann ist der Koeffizient von** ε^{i+1} **gleich** 1 **und der von** ε^{i+1-k} **für** $k \geq 1$

$$\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}(q^{i+1}t \div q)^k - \begin{bmatrix} i \\ k-1 \end{bmatrix}(q^{i+1}t \div q)^{k-1} = \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}(q^{i+1}t \div q)^{k-1}q^{i+1}t - q^k\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}(q^{i+1}t \div q)^{k-1} - \\ -\begin{bmatrix} i \\ k-1 \end{bmatrix}(q^{i+1}t \div q)^{k-1} = \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}(q^{i+1}t \div q)^{k-1}q^{i+1}t - \begin{bmatrix} i+1 \\ k \end{bmatrix}(q^{i+1}t \div q)^{k-1}. \tag{16}$$

3. **Mit Hilfe des** $\Delta -$**Operators lässt sich die Rekurrenz der Folge** $s(n,1,x)$ **als direktes** $q-$**Analogon der Gleichung (8) interpretieren:**

$$\Delta s(n,1,x) = xs(n,1,x). \tag{17}$$

Denn es ist $\Delta\sum q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k = \sum q^{\binom{k-1}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}x^k = x\sum q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k.$

Die Gleichung (17) ist gleichbedeutend mit $s(n+1,1,x) - s(n,1,x) = q^n xs(n,1,x).$

Damit der allgemeine Fall genau so behandelt werden kann, benötigen wir einen Differenzenoperator Δ_i, **der unabhängig von** k **ist und**

$\Delta_i q^{i\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{i\binom{k-1}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$ **oder gleichbedeutend** $\Delta_i\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{-i(k-1)}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$ **für alle** $k \in \mathbb{N}$

erfüllt.

Aus dem obigen ergibt sich Δ_i **als** $\Delta_i = Z^{-(i-1)}\Delta$

und wir erhalten das

Lemma

Die Polynome $s(n,i,x)$ *erfüllen die Gleichung*

$$Z^{-(i-1)}\Delta s(n,i,x) = xs(n,i,x). \tag{18}$$

Diese kann auch in der Form

$$s(n+1,i,x) - s(n,i,x) = q^n xs(n,i,q^{i-1}x) \tag{19}$$

geschrieben werden.

Wenn wir in den obigen Formeln i durch $i-1$ ersetzen und alles in die Sprache der q – Polynome übersetzen, ergibt sich, dass Formel (18) gleichbedeutend ist mit dem folgenden

Satz 1
Für $i \geq 1$ *gilt die Rekursionsformel*

$$s(n+i,i,x) - q^{in+i^2-i} x s(n+i-1,i,x) = \\ = \sum_{k=1}^{i} (q^{n+i} \dot{-} q)^{k-1} \left(\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} - q^{n+i} \begin{bmatrix} i-1 \\ k \end{bmatrix} \right) s(n+i-k,i,x) \tag{20}$$

der Ordnung i .*Sie kann auch in der Gestalt*

$$\left((q^{n+i} \dot{-} q) \dot{+} E \right)^{i-1} (E-1) s(n,i,x) - q^{in+i^2-i} x s(n+i-1,i,x) = 0 \tag{21}$$

geschrieben werden.

Z.B. ergibt sich für $i = 2$ die Rekurrenz

$$s(n+2,2,x) = (q^{2n+2}x + 1 - q(q^{n+1}-1)) s(n+1,2,x) + q(q^{n+1}-1) s(n,2,x).$$

Wenn der Parameter i nicht positiv ist, schreiben wir Formel (18) in der Gestalt $\Delta s(n,i,x) = Z^{i-1} x s(n,i,x)$. Um das Vorzeichen von i deutlich zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir $-i$ mit $i \geq 0$. Es ist dann also
$\Delta s(n,-i,x) = Z^{-i-1} x s(n,-i,x)$. Wir erhalten dann sofort den

Satz 2
Für $i \geq 0$ *erfüllt* $s(n,-i,x)$ *die Rekursion*

$$s(n+i+2,-i,x) - s(n+i+1,-i,x) = \\ = q^{-i(n+i+1)} x \sum_{j=0}^{i+1} \begin{bmatrix} i+1 \\ j \end{bmatrix} (q^{n+i+1} \dot{-} 1)^j s(n+i-j+1,-i,x) = \\ = q^{-i(n+i+1)} x \left(q^{n+i+1} \dot{+} (E \dot{-} 1) \right)^{i+1} s(n,-i,x) \tag{22}$$

der Ordnung $i+2$.

Für $i = 0$ erhalten wir daraus die bekannte Rekursionsformel
$(1 \dot{+} x)^{n+1} = (1+x)(1 \dot{+} x)^n + (q^n - 1) x (1 \dot{+} x)^{n-1}$
für die Rogers-Szegö-Polynome.

Insgesamt hat sich gezeigt, dass der Fall $i = 1$ eine Sonderrolle einnimmt.
Das Rekurrenzverhalten der Polynome $s(n,i,x)$ ist symmetrisch um $i = 1$. Der Grad der minimalen Rekurrenz ist $|i-1| + 1$.

4. **Wir wollen nun noch etwas allgemeiner $q-$ Analoga der Teilsummen $\sum_k \binom{n}{mk+r} x^{mk+r}$ betrachten. Diese genügen der Rekurrenz** $\Delta^m \sum_k \binom{n}{mk+r} x^{mk+r} = x^m \sum_k \binom{n}{mk+r} x^{mk+r}$.

Sei also $s(n,i,m,x,r) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ mk+r \end{bmatrix} q^{i\binom{mk+r}{2}} x^{mk+r}$.

Man rechnet leicht nach, dass

$$\Delta^m q^{i\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{(i-1)\binom{m}{2}} Z^{(i-1)m} q^{i\binom{k-m}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-m \end{bmatrix}$$

gilt.

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich daraus

$$Z^{-(i-1)m} \Delta^m s(n,i,m,x,r) = q^{(i-1)\binom{m}{2}} x^m s(n,i,m,x,r). \tag{23}$$

Das bedeutet

$$\frac{1}{q^{(i-1)mn}} \sum_{j=0}^{i} \begin{bmatrix} (i-1)m \\ j \end{bmatrix} (q^n \dotplus 1)^j E^{-j} \Delta^m s(n,i,m,x,r) = q^{(i-1)\binom{m}{2}} x^m s(n,i,m,x,r).$$

Nun gilt ja

$$q^{\binom{k}{2}} (q-1)^k t^k D^k = (\varepsilon \dotplus 1)^k.$$

Denn wendet man beide Seiten auf t^r **an, so ergibt sich jeweils**

$(q^r - 1)(q^r - q)\cdots(q^r - q^{k-1}) t^r = (q^r \dotplus 1)^k t^r$.

Unter Φ^{-1} **geht das über in**

$$q^{\binom{k}{2}} q^{kn} \Delta^k = (E \dotplus 1)^k \tag{24}$$

Daher ist der Operator links identisch mit

$$\frac{1}{q^{(i-1)mn}} \sum_{j=0}^{i} \begin{bmatrix} (i-1)m \\ j \end{bmatrix} (q^n \dotplus 1)^j E^{-j} q^{-\binom{m}{2}} q^{-mn} (E \dotplus 1)^m = \sum_{j=0}^{i} \begin{bmatrix} (i-1)m \\ j \end{bmatrix} (q^n \dotplus 1)^j q^{mj} q^{-\binom{m}{2}} q^{-imn} E^{-j} (E \dotplus 1)^m.$$

Es ergibt sich daher

$$\sum_{j=0}^{i} \begin{bmatrix} (i-1)m \\ j \end{bmatrix} (q^{n+m} \dotplus q^m)^j E^{-j} (E \dotplus 1)^m s(n,i,m,x,r) = q^{i\binom{m}{2}+imn} x^m s(n,i,m,x,r).$$

Wenn man auf beiden Seiten $E^{(i-1)m}$ **anwendet, ergibt sich schließlich**

$$\sum_{j=0}^{mi-m}\begin{bmatrix}m(i-1)\\ j\end{bmatrix}(q^{n+im}\dotminus q^{m})^{j}E^{(i-1)m-j}(E\dotminus 1)^{m}s(n,i,m,x,r)=$$

$$=q^{-i\binom{m+1}{2}+imn+i^2m^2}x^{m}s(n+(i-1)m,i,m,x,r).$$

Nun ist

$$\sum_{j=0}^{mi-m}\begin{bmatrix}m(i-1)\\ j\end{bmatrix}(q^{n+im}\dotminus q^{m})^{j}E^{(i-1)m-j}(E\dotminus 1)^{m}=\sum_{j=0}^{mi-m}\begin{bmatrix}m(i-1)\\ j\end{bmatrix}(q^{n+im}\dotminus q^{m})^{j}E^{(i-1)m-j}\sum_{\ell}(-1)^{\ell}q^{\binom{\ell}{2}}\begin{bmatrix}m\\ \ell\end{bmatrix}E^{m-\ell}.$$

Der Koeffizient von E^{im-k} **ist also**

$$c(i,m,k)=\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^{\ell}q^{\binom{\ell}{2}}\begin{bmatrix}m\\ \ell\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m(i-1)\\ k-\ell\end{bmatrix}\left(q^{n+im}\dotminus q^{m}\right)^{k-\ell}. \tag{25}$$

Satz 3

Die Folge $s(n,i,m,x,r)=\sum_{k}\begin{bmatrix}n\\ mk+r\end{bmatrix}q^{i\binom{mk+r}{2}}x^{mk+r}$ ***genügt für*** $i>0$ ***der Rekurrenz***

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{mi}c(i,m,k)s(n+mi-k,i,m,x,r)=\\&=q^{-i\binom{m+1}{2}+imn+i^2m^2}x^{m}s(n+(i-1)m,i,m,x,r)\end{aligned} \tag{26}$$

der Ordnung mi.

Bemerkung

Für $k\geq m$ **gilt auch** $c(i,m,k)=\left(q^{n+im}\dotminus q^{m}\right)^{k-m}\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^{\ell}q^{\binom{\ell}{2}}\begin{bmatrix}m\\ \ell\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m(i-1)+\ell\\ k\end{bmatrix}q^{(n+im)(m-\ell)}.$

Beweis: Es gilt $(Z\Delta)Z=qZ(Z\Delta)$ und wegen $E=Z+(Z\Delta)$ gilt also
$e(Ez)=e(Zz)e((Z\Delta)z)$.
Daher ist

$$\frac{e(xz)}{e(Ez)}=\frac{1}{e((Z\Delta)z)}\frac{e(xz)}{e(Zz)}$$

und somit durch Koeffizientenvergleich

$$\sum_{j=0}^{i}(-1)^{j}q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}i\\ j\end{bmatrix}E^{j}x^{i-j}=\sum_{j=0}^{i}(-1)^{j}q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}i\\ j\end{bmatrix}(Z\Delta)^{j}(x\dotminus Z)^{i-j}.$$

Wenn wir diese Identität auf $\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}$ anwenden, ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{i}(-1)^j q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n+j \\ k \end{bmatrix}x^{i-j} = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}(x \dotminus q^k)^{i-j}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}.$$

Setzen wir $n := m(i-1), i := m, x := q^{n+im}$**, so ergibt sich für** $k \geq m$

$$\left(q^{n+im} \dotminus q^m\right)^{k-m}\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^\ell q^{\binom{\ell}{2}}\begin{bmatrix} m \\ \ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m(i-1) \\ k-\ell \end{bmatrix}\left(q^{n+im} \dotminus q^k\right)^{m-\ell} =$$

$$= \left(q^{n+im} \dotminus q^m\right)^{k-m}\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^\ell q^{\binom{\ell}{2}}\begin{bmatrix} m \\ \ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m(i-1)+\ell \\ k \end{bmatrix}q^{(n+im)(m-\ell)}.$$

Schließlich wollen wir noch $s(n,-i,m,x,r)$ **für** $i \geq 0$ **untersuchen.**
Die Identität (23) wird nun zu

$$\Delta^m s(n,-i,m,x,r) = Z^{-(i+1)m}q^{-(i+1)\binom{m}{2}}x^m s(n,-i,m,x,r).$$

Daher ergibt sich

$$\left((E \dotminus 1)^m - q^{i\binom{m+1}{2}-imn-im^2}x^m\sum_j\begin{bmatrix} m(i+1) \\ j \end{bmatrix}(q^n \dotminus 1)^j E^{-j}\right)s(n,-i,m,x,r) = 0.$$

Wir erhalten daher

Satz 4
Sei $i \geq 0$. *Dann genügt die Folge* $s(n,-i,m,x,r)$ *der Rekursion*

$$(E \dotminus 1)^m s(n+(i+1)m,-i,m,x,r) =$$
$$= q^{i\binom{m+1}{2}-im(n+(2+i)m)}x^m\sum_j\begin{bmatrix} m(i+1) \\ j \end{bmatrix}\left(q^{n+(i+1)m} \dotminus 1\right)^j s(n+(i+1)m-j,-i,m,x,r) \tag{27}$$

der Ordnung $(i+2)m$.
Das lässt sich auch in der Form

$$(\Delta^m - x^m q^{-(i+1)\binom{m}{2}}Z^{-(i+1)m})s(n,-i,m,x,r) = 0$$

schreiben.

Schönere Formeln ergeben sich für

$$\sigma(n,m) = \sum_{k=0}^{n} q^{m^2\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ mk \end{bmatrix}z^k. \tag{28}$$

Hier gilt

Satz 5

$$(E \dot{-} 1)^m \sigma(n,m) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \sigma(n+m-k,m) = q^{nm}\sigma(n,m)z. \tag{29}$$

Denn aus (24) und (10) ergibt sich sofort

$$q^{\binom{m}{2}} q^{nm} \Delta^m q^{m^2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ mk \end{bmatrix} = q^{\binom{m}{2}+nm-(mk)m+\binom{m+1}{2}+m^2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ mk-m \end{bmatrix} = q^{nm} q^{m^2\binom{k-1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ m(k-1) \end{bmatrix}.$$

Literatur

[1] J. Cigler, *Elementare q-Identitäten*, Sem. Lotharingien Comb., Publ. IRMA **182**/S-04, 1982, 261-267 (http://www.mat.univie.ac.at/~slc/).