Mathematische Randbemerkungen 6: q-Pascal-Matrizen und die q-Binomialtransformation

Diese Bemerkungen enthalten einige Übungsbeispiele über $q-$Binomialkoeffizienten, die ich aus verschiedenen Gründen interessant finde. Sie sind einfache Folgerungen des $q-$binomischen Lehrsatzes und liefern daher nichts „Neues“. Ich habe mir auch nicht die Mühe gemacht, die Literatur daraufhin zu untersuchen, wer diese Identitäten ursprünglich gefunden hat. Für die verwendeten elementaren Identitäten verweise ich der Einfachheit halber auf mein Skriptum „Elementare $q-$Identitäten“. (E (i.j) bedeutet dabei Formel (i.j) in Elementare $q-$Identitäten).

1.0. Pascal-Matrizen

Im Fall $q=1$ gilt für die Matrix

$$P(x)=\left(x^{i-j}\binom{i}{j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$$

der Binomialkoeffizienten

$$P(x)P(y)=P(x+y).$$

Da $P(0)=I$, die Identität ist, muss $P(x)=e^{xH}$ für eine geeignete Matrix H sein. Diese ergibt sich zu $H=\frac{d}{dx}P(x)\big|_{x=0}=\left(\left((i-j)x^{i-j-1}\binom{i}{j}\right)_{i,j=0}^{\infty}\right)_{x=0}=\left((i-j)[i=j+1]\right)_{i,j=0}^{\infty}$.

Um das exakter zu fassen, kann man auch die $n\times n-$Matrizen

$$P_n(x)=\left(x^{i-j}\binom{i}{j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

zu Hilfe nehmen.

Diese erfüllen analog $P_n(x)P_n(y)=P_n(x+y)$ mit $P_n(0)=I_n$.

Daher ist $P_n{}'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{P_n(x+h)-P_n(x)}{h}=P_n(x)\lim\limits_{h\to 0}\frac{P_n(h)-I_n}{h}=P_n(x)H_n$ mit

$$H_n=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\\0&0&\cdots&n-1&0\end{pmatrix}.$$

Durch diese Gleichung und $P_n(0) = I_n$ ist die Matrixfunktion $P_n(x)$ eindeutig festgelegt. Andererseits erfüllt auch

$$e^{xH_n} := \sum_{k\geq 0} \frac{H_n^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{H_n^k}{k!} x^k$$

diese Bedingungen und stimmt daher mit $P_n(x)$ überein. Die Matrizen H_n und $P_n(x)$ stimmen für alle n mit den entsprechenden Teilmatrizen von H und $P(x)$ überein. Daher gilt alles auch im Limes.

Speziell gilt also für die Pascalmatrix

$$P(1) = \left(\binom{i}{j} \right)_{i,j=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}$$

dass

$$P(1) = e^{H} \tag{1.1}$$

ist.

1.1. Die q-Pascal-Matrix

Es erhebt sich natürlich sofort die Frage nach einem geeigneten $q-$Analogon dieser Tatsache.
Sei also

$$P_n[x] = \left(x^{i-j} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right)_{i,j=0}^{n-1} \tag{1.2}$$

und

$$P[x] = \left(x^{i-j} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right)_{i,j=0}^{\infty}. \tag{1.3}$$

Dann gilt

$$P[x] = \sum_{k\geq 0} \frac{K^k}{[k]!} x^k \tag{1.4}$$

mit

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ [1] & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & [2] & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & [3] & 0 & \\ \cdots & & & & \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Das folgt sehr einfach, wenn man beachtet, dass

$$\frac{K^k}{[k]!}=\left(\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}[i-j=k]\right)_{i,j} \tag{1.6}$$

ist.

Daher ist

$$\sum_{k\geq 0} a(k)\frac{K^k}{[k]!}=\left(\sum_{k=0}^{i} a(k)\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}[i-j=k]\right)_{i,j}=\left(a(i-j)\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right)_{i,j} \tag{1.7}$$

Jeder formalen Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} a(k)\frac{x^k}{[k]!}$ entspricht also umkehrbar eindeutig eine Matrix der obigen Gestalt.

Insbesondere entspricht der q-Exponentialfunktion $e(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{[k]!}$ (vgl. E (2.8)) die $q-$Pascalmatrix

$$P=\sum_{k\geq 0}\frac{K^k}{[k]!}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1+q & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1+q+q^2 & 1+q+q^2 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Aus $\frac{1}{e(x)}=\sum_{k}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\frac{x^k}{[k]!}$ (E (2.11)) folgt, dass die Inverse der $q-$Pascalmatrix durch

$$P^{-1}=\left((-1)^{i-j} q^{\binom{i-j}{2}}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right) \tag{1.9}$$

gegeben ist.

Natürlich kann (1.8) auch noch auf verschiedene andere Arten abgeleitet werden.
Beachtet man, dass (E (2.7))

$$e(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{[k]!}=\frac{1}{(1-(1-q)x)(1-(1-q)qx)\cdots}$$

gilt, dann ist also

$$T(s)=e(sK)=\sum_{k\geq 0}\frac{s^k}{[k]!}K^k=\frac{1}{(1-(1-q)sK)(1-(1-q)qsK)\cdots},$$

d.h.
$(1-(1-q)sK)T(s)=T(qs).$

Dadurch ist $T(s)$ eindeutig festgelegt. Nun verifiziert man sofort, dass diese Identität für $T(s)=\left(s^{i-j}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right)$ erfüllt ist. Denn sie bedeutet

$$s^{i-j}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}-(1-q)s[i]s^{i-j-1}\begin{bmatrix} i-1 \\ j \end{bmatrix}=(qs)^{i-j}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$

oder gleichbedeutend

$$\frac{1-q^{i-j}}{1-q^i}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i-1 \\ j \end{bmatrix}.$$

Damit ist die obige Formel noch einmal bewiesen.

1.2. Verschiedene q-Analoga der Inversionsformel

Aus (1.1) ergibt sich sofort die Inversionsformel

$$\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\binom{j}{k}=[i=k].$$

Im allgemeinen Fall gibt es eine Reihe verschiedener $q-$Analoga dieser Formel. Z.B. ist Formel (1.9) äquivalent mit den Inversionsformeln

$$\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}q^{\binom{i-j}{2}}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}=[i=k] \tag{1.10}$$

und

$$\sum_{j=0}^{i}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}(-1)^{j-k}q^{\binom{j-k}{2}}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}=[i=k]. \tag{1.11}$$

Beachtet man, dass $\binom{j}{2}+\binom{k}{2}-(j-1)k=\binom{j-k}{2}$ ist, so sieht man, dass diese Formeln auch äquivalent mit

$$\left(q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right)^{-1}=\left((-1)^{i-j}q^{\binom{j+1}{2}-ij}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right)=\left((-1)^{i-j}q^{-\binom{j}{2}}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}}\right) \tag{1.12}$$

sind. Dabei ergibt sich die rechte Seite aus

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}}=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}q^{-nk+k^2}. \tag{1.13}$$

Ich möchte noch einige weitere Folgerungen aus (1.7) erwähnen:

Aus (E (2.9))

$$e(ax)e(bx) = \sum_n r_n(a,b) \frac{x^n}{[n]!}$$

ergibt sich

$$\left(a^{i-j}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right)_{i,j} \left(b^{j-k}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}\right)_{j,k} = \left(r_{i-k}(a,b)\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}\right)_{i,k}. \tag{1.14}$$

Das ist äquivalent mit

$$\sum_{j=0}^{i} a^{i-j} b^{j-k} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} = r_{i-k}(a,b)\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}.$$

Für $a = 1, b = -1$ reduziert sich das auf die Inversionsformel

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^{j-k} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} = r_{i-k}(1,-1)\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}, \tag{1.15}$$

wobei bekanntlich nach Gauß (E Satz 1.9)
$r_{2n+1}(1,-1) = 0$ und $r_{2n}(1,-1) = (1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1})$
gilt, also $r_n(1,-1)$ ein schönes $q-$Analogon von $[n = 0]$ ist.

Aus (E (2.17))

$$\frac{e(ax)}{e(bx)} = \sum_n (a-b)(a-qb)\cdots(a-q^{n-1}b)\frac{x^n}{[n]!}$$

folgt

$$\sum_{j=0}^{i} a^{i-j} b^{j-k} (-1)^{j-k} q^{\binom{j-k}{2}} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} = (a-b)(a-qb)\cdots(a-q^{i-k-1}b)\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = (a \div b)^{i-k}\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix},$$

wenn man der Einfachheit halber $(a-b)(a-qb)\cdots(a-q^{n-1}b) = (a \div b)^n$ schreibt.

Setzt man also

$$M(a,b) = \left((a \div b)^{i-j}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right), \tag{1.16}$$

dann ist

$$M(a,b)M(b,c) = M(a,c). \tag{1.17}$$

Für $a = c = 1, b = 0,$ reduziert sich das wieder auf (1.9).

Wenn wir im $\mathbb{R}^n$ die Vektorfunktion $f_n(x) = \left(1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\right)^t$
betrachten, dann entspricht der $q-$Differentiation der Operator K_n, der durch die Matrix $K_n = \left([i][i-j=1]\right)_{i,j=0}^{n-1}$ gegeben ist.
Denn $\left(K_n f_n(x)\right)_k = [k]\, x^{k-1}$.

Eine weitere interessante Inversionsformel ist

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q^k - 1) \cdots (q^{n-1} - 1). \tag{1.18}$$

Denn die linke Seite ist

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ j-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j+k} q^{\binom{j+k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j+k} q^{\binom{j}{2}} \left(q^k\right)^j \begin{bmatrix} n-k \\ j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} (-1)^{n-k} (1-q^k)(1-q^{k+1}) \cdots (1-q^{n-1}) = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q^k - 1) \cdots (q^{n-1} - 1).$$

In Matrixform bedeutet das folgendes:

$$\left((-1)^j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right)_{i,j=0}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right)_{i,j=0}^{\infty} = \left((-1)^j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} (q^j - 1) \cdots (q^{i-1} - 1) \right)_{i,j=0}^{\infty}. \tag{1.19}$$

Für die $q-$Stirlingzahlen der ersten Art $s[n,k]$ (vgl. E (3.10)) folgt aus (E (3.66))
$(q-1)^{n-i} s[n,i] = \sum_k (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{i}$,
die Matrixidentität

$$\left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\binom{i}{j} \right) = \left((q-1)^{i-j} s[i,j] \right). \tag{1.20}$$

Analog folgt für die $q-$Stirlingzahlen der zweiten Art $S[n,k]$ (vgl. E (3.5)) aus der Identität (E (3.65)) $\sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} = (q-1)^{n-i} S[n,i]$
die Matrixidentität

$$\left(\binom{i}{j} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right) = \left((q-1)^{i-j} S[i,j] \right). \tag{1.21}$$

1.3. Die Exponentialdarstellung

Ein weiteres q – Analogon von (1.1) ist die Darstellung der q – Pascalmatrix in der Gestalt $e^{H(q)}$.

Dazu berechnen wir $\log(P)$.
Es ergibt sich
$H(q)=\log(P)=\left(a(i,j)\right)$ mit

$$a(i,j)=\frac{(1-q)^{i-j-1}[i]!}{(i-j)[i-j][j]!}=\frac{(1-q)^{i-j-1}[i-j-1]!}{i-j}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}.$$

Für $q=1$ reduziert sich $H(q)$ auf $H(1)=H$.

Denn

$$e(x)=\frac{1}{(1-(1-q)x)(1-(1-q)qx)(1-(1-q)q^2x)\cdots}.$$

Daher ist

$$\log(e(x))=\sum_{k\ge 0}\log\frac{1}{1-(1-q)q^k x}=\sum_{k\ge 0}\sum_{j\ge 1}\frac{(1-q)^j q^{kj}x^j}{j}=\sum_{j\ge 1}\frac{(1-q)^j x^j}{j}\frac{1}{1-q^j}=\sum_{j\ge 1}\frac{(1-q)^{j-1}x^j}{j[j]}$$

$$=\sum_{j\ge 1}\frac{(1-q)^{j-1}[j-1]!}{j}\frac{x^j}{[j]!}.$$

Einen anderen Beweis dieser Formel findet man in der Arbeit „Special functions and q-commuting variables“ von Tom Koornwinder (arXiv: q-alg/9608008 v2), wo auch auf eine Arbeit von A.N. Kirillov verwiesen wird.

1.4. Andere q-Binomialmatrizen

Wir wollen nun eine LU-Zerlegung der Matrix $P^{(m)}=\left(\begin{bmatrix} i+m \\ j \end{bmatrix}\right)_{i,j\ge 0}$ suchen.

Aus der Rekursionsformel

$$\begin{bmatrix} i+1+m \\ j \end{bmatrix}=q^j\begin{bmatrix} i+m \\ j \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} i+m \\ j-1 \end{bmatrix}$$

ergibt sich sofort
$P^{(m+1)}=P^{(m)}(D+R)$.
Dabei ist

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & q & & & \\ & & q^2 & & \\ & & & q^3 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$ die Diagonalmatrix $D=\left(q^j\,[i=j]\right)_{i,j}$ und

$$R=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & \ddots\end{pmatrix}$$ die Matrix $R=\left(\left[j-i=1\right]\right)_{i,j}$.

Übrigens ist $RD=qDR$. Daher ist nach dem allgemeinen $q-$binomischen Lehrsatz E (1.25)

$$(D+R)^s=\begin{bmatrix}s\\0\end{bmatrix}D^s+\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}D^{s-1}R+\begin{bmatrix}s\\2\end{bmatrix}D^{s-2}R^2+\cdots=\left(\begin{bmatrix}s\\j-i\end{bmatrix}q^{i(s-j+i)}\right).$$

Es ist also

$$P^{(m)}=P(D+R)^m$$

eine Zerlegung von $P^{(m)}$ in ein Produkt einer unteren und oberen Dreiecksmatrix.

Das gilt auch für alle $n\times n-$Matrizen dieser Gestalt.

In der anderen Richtung gilt für die $n\times n-$Matrizen

$$P_n^{(m+1)}=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & & & c_{n-1,n-1}\end{pmatrix}P_n^{(m)}$$

Dabei steht in der letzten Zeile

$$c_{n-1,j}=(-1)^{n-j-1}q^{\binom{n-j}{2}}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\text{ für } j=0,\cdots,n-1.$$

Denn $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j-1}q^{\binom{n-j}{2}}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$.

Das ergibt sich folgendermaßen

Aus $\displaystyle\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}q^{\binom{i-j}{2}}\begin{bmatrix}i\\j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j\\k\end{bmatrix}=\left[i=k\right]$ ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}q^{\binom{n-j}{2}}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j\\k\end{bmatrix}=0$$

und daher

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j-1}q^{\binom{n-j}{2}}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Inversen folgt die Behauptung.

Aus der $q-$Vandermonde'schen Formel

$$\sum_{s=0}^{\ell} q^{s^2} \begin{bmatrix} k \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+\ell \\ k \end{bmatrix}$$

ergibt sich die LU-Zerlegung

$$\left(\begin{bmatrix} i+j \\ j \end{bmatrix} \right) = \left(q^{j^2} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} \right).$$

Wenn wir in der Definition von $e(x)$ die Unbestimmte q durch $q^m, m \geq 1,$ ersetzen erhalten wir

$$\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(1-q^m)(1-q^{2m})\cdots(1-q^{km})} = \frac{1}{(1-x)(1-q^m x)(1-q^{2m}x)\cdots}.$$

Die entsprechende Exponentialfunktion nennen wir $e_m(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{[k]_{q^m}!}.$

Es ist dann klar, dass

$$e_m(\frac{x}{[m]}) e_m(\frac{qx}{[m]}) \cdots e_m(\frac{q^{m-1}x}{[m]}) = e(x)$$

gilt.

Speziell ist $e_2\left(\frac{x}{1+q}\right) e_2\left(\frac{qx}{1+q}\right) = e(x).$

Das liefert

$$\left(\frac{1}{(1+q)\cdots(1+q^{i-j})} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right) \left(\frac{q^{i-j}}{(1+q)\cdots(1+q^{i-j})} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right).$$

Einige Identitäten lassen sich auch mit Hilfe des allgemeinen $q-$binomischen Lehrsatzes am besten verstehen.

Sei etwa $A = \big([i = j+1] a(i)\big)$ und $B = \big([i = j+1] q^j a(i)\big),$ dann gilt $BA = qAB$ und daher ist $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{n-k}$ und $e(A)e(B) = e(A+B).$

Setzt man etwa $a(i) = [i]$, dann ist $e(xA) = \left(x^{i-j} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right)$ und $e(yB) = \left(q^{\binom{i}{2}-\binom{j}{2}} y^{i-j} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right).$

Weiters ist $xA + yB = \big([i](x + q^{i-1}y)[i = j+1]\big)$ und $e(xA+yB) = e(xA)e(yB)$ bedeutet, dass

$$\left(x^{i-j} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right) \left(q^{\binom{i}{2}-\binom{j}{2}} y^{i-j} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} (x+q^j y)(x+q^{j+1}y)\cdots(x+q^{i-1}y) \right)$$

gilt.

2. Die q-Binomialtransformation

Die lineare Abbildung, die auf den Basiselementen durch

$$t^k \to \frac{t^k}{(1-t)(1-qt)\cdots(1-q^k t)} = \sum_n \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} t^{n+k} = \sum_i \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} t^i \tag{2.1}$$

definiert ist, kann als ein $q-$Analogon der Binomialtransformation $f(t) \to \frac{1}{1-t} f\left(\frac{t}{1-t}\right)$ interpretiert werden.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} &\sum_k c(k) \frac{t^k}{(1-t)\cdots(1-q^k t)} = \sum_k c(k) t^k \sum_j \begin{bmatrix} k+j \\ j \end{bmatrix} t^j \\ &= \sum_j \sum_k t^{k+j} c(k) \begin{bmatrix} k+j \\ j \end{bmatrix} = \sum_n t^n \sum_k c(k) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Man erhält also für jedes „schöne“ $q-$Analogon des binomischen Lehrsatzes eine „schöne“ Identität für $\sum_k c(k) \frac{t^k}{(1-t)\cdots(1-q^k t)}$.

Wählt man

$c(k) = \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (-1)^{k-j} q^{\binom{k-j}{2}}$, so ergibt sich

$$\sum_k \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (-1)^{k-j} q^{\binom{k-j}{2}} \frac{t^k}{(1-t)\cdots(1-q^k t)} = t^j. \tag{2.3}$$

Aus

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x \dot{-} 1)^k = x^n$$

ergibt sich in (2.2)

$$\sum (x \dot{-} 1)^k \frac{t^k}{(1-t)\cdots(1-q^k t)} = \frac{1}{1-tx}$$

Wählt man $c(k) = x^k$, so erhält man

$$\sum_n r_n(x,1) t^n = \sum_k \frac{x^k t^k}{(1-t)\cdots(1-q^k t)}, \tag{2.4}$$

während für
$c(k)=q^{\binom{k}{2}}x^k$

$$\sum_n (1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)t^n = \sum_k q^{\binom{k}{2}} \frac{x^k t^k}{(1-t)\cdots(1-q^k t)} \tag{2.5}$$

folgt.

Wenn wir hier $x = qst$ setzen, ergibt sich

$$\begin{aligned} H(s,t) &= \sum_n (1+qst)(1+q^2st)\cdots(1+q^nst)t^n = \sum_k q^{\binom{k+1}{2}} \frac{s^k t^{2k}}{(1-t)\cdots(1-q^k t)} \\ &= \sum_k q^{\binom{k+1}{2}} s^k t^{2k} \sum_j \begin{bmatrix} k+j \\ k \end{bmatrix} t^j = \sum_n t^n \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} s^k = \sum_n F_{n+1}(s)t^n, \end{aligned} \tag{2.6}$$

wobei

$$F_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-1-k \\ k \end{bmatrix} s^k \tag{2.7}$$

ein $q-$Analogon der Fibonacci-Polynome ist. (Vgl. E (5.5))
Dieses erfüllt (E (5.6) und E (5.7))

$$F_n(s) = F_{n-1}(qs) + qsF_{n-2}(qs) \tag{2.8}$$

und

$$F_n(s) = F_{n-1}(s) + q^{n-2}sF_{n-2}\left(\frac{s}{q}\right) \tag{2.9}$$

für $n \geq 2$.

Denn aus den Rekurrenzen für die $q-$Binomialkoeffizienten (E (1.17), (1.18)) ergibt sich

$$\begin{aligned} F_n(s) - F_{n-1}(qs) &= \sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-2-k \\ k-1 \end{bmatrix} s^k = \sum_k q^{\binom{k+2}{2}} \begin{bmatrix} n-3-k \\ k \end{bmatrix} s^{k+1} \\ &= qs \sum_k q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-3-k \\ k \end{bmatrix} (qs)^k = qsF_{n-2}(qs). \end{aligned}$$

und

$$F_n(s)-F_{n-1}(s)=\sum_{k=0}^{n-1}q^{\binom{k+1}{2}}q^{n-2k-1}\begin{bmatrix}n-2-k\\k-1\end{bmatrix}s^k=\sum_k q^{\binom{k+2}{2}+n-2k-3}\begin{bmatrix}n-3-k\\k\end{bmatrix}s^{k+1}$$
$$=q^{n-2}s\sum_k q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-3-k\\k\end{bmatrix}\left(\frac{s}{q}\right)^k=q^{n-2}sF_{n-2}\left(\frac{s}{q}\right).$$

Aus (2.8) folgt

$$F_n(-\frac{1}{q})=F_{n-1}(-1)-F_{n-2}(-1)$$

und aus (2.9) ergibt sich

$$F_{n-1}(-1)-F_{n-2}(-1)=-q^{n-3}F_{n-3}\left(-\frac{1}{q}\right).$$

Insgesamt erhalten wir

$$F_n(-\frac{1}{q})=-q^{n-3}F_{n-3}\left(-\frac{1}{q}\right).$$

Aus $F_0\left(-\frac{1}{q}\right)=0, F_1\left(-\frac{1}{q}\right)=F_2\left(-\frac{1}{q}\right)=1$
folgt daraus sofort

$$F_n\left(-\frac{1}{q}\right)=s_n(q) \tag{2.10}$$

mit

$$s_{3n}(q)=0, s_{3n+1}(q)=(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}, s_{3n+2}(q)=(-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}}. \tag{2.11}$$

Wenn wir in (2.6) $s=-\frac{1}{q}$ setzen, ergibt sich somit

$$\begin{gathered}\sum_n(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x)x^n=\sum_k(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\frac{x^{2k}}{(1-x)\cdots(1-q^k x)}\\=\sum_k(-1)^k\left(q^{\frac{k(3k-1)}{2}}x^{3k}+q^{\frac{k(3k+1)}{2}}x^{3k+1}\right)=1+x-qx^3-q^2x^4+q^5x^6+q^7x^7--++\cdots.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Diese Überlegungen hängen eng mit dem Euler'schen Beweis des Pentagonalzahlensatzes

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}}=1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}\cdots \tag{2.13}$$

zusammen.

Euler betrachtete die Reihe

$$f(x,q)=1-\sum_{n=1}^{\infty}(1-qx)(1-q^2x)\cdots(1-q^{n-1}x)q^n x^{n+1} \tag{2.14}$$

und bemerkte, dass

$$f(1,q)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \tag{2.15}$$

ist, weil

$$1-\sum_{n=1}^{N}(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-1})q^n=\prod_{n=1}^{N}(1-q^n)$$

gilt.

Andererseits ist

$$1-f(x,q)=\sum_{j\ge1}\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} j-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+j+1}q^j=\sum_{n\ge1}x^n\sum_{k=0}^{n-2-k}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-2-k \\ k \end{bmatrix} q^{n-1-k}$$

$$=\sum_{n\ge1}q^{n-1}x^n F_{n-1}\left(-\frac{1}{q}\right)$$

und somit

$$f(1,q)=1-\sum_{n\ge1}q^{n-1}F_{n-1}\left(-\frac{1}{q}\right)=1+\sum_{n\ge1}F_{n+2}\left(-\frac{1}{q}\right)=1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots. \tag{2.16}$$

Eine moderne Darstellung des ursprünglichen Beweises von Euler, der auf einer Rekursion für $f(x,q)$ beruht, findet man in der Arbeit „Euler's Pentagonal Number Theorem" von George Andrews in Math. Mag. 56(1983), 279-284.

Dieses Resultat spiegelt sich auch in den Matrizen

$$A_n=\left((-1)^{n-1-j}q^{\binom{n-1-j}{2}}\begin{bmatrix} i \\ n-1-j \end{bmatrix}\right)_{i,j=0}^{n-1}.$$

Z.B ist

$$A_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & q & -1-q & 1 \\ -q^3 & q(1+q+q^2) & -1-q-q^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier ergibt sich

$$A_n^2 = \left((-1)^{n-1-j} q^{\binom{n-1-j}{2}+ij} \begin{bmatrix} n-1-i \\ j \end{bmatrix} \right)_{i,j=0}^{n-1}. \tag{2.17}$$

Denn

$$\sum_k (-1)^{n-1-k} q^{\binom{n-1-k}{2}} \begin{bmatrix} i \\ n-1-k \end{bmatrix} (-1)^{n-1-j} q^{\binom{n-1-j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ n-1-j \end{bmatrix} = (-1)^{n-1+j} q^{\binom{n-1-j}{2}} \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1-k \\ n-1-j \end{bmatrix}$$

Nun verwenden wir die Formel

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{nk-\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} k-n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Dann ist mittels der $q-$Vandermonde'schen Formel

$$\sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1-k \\ j-k \end{bmatrix} = (-1)^j q^{-\binom{j+1}{2}+jn} \sum_k q^{k(k-n)} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j-n \\ j-k \end{bmatrix} = (-1)^j q^{-\binom{j+1}{2}+jn} \begin{bmatrix} i+j-n \\ j \end{bmatrix}$$

$$= q^{-\binom{j+1}{2}+jn} q^{ij+j^2-nj-\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n-i-1 \\ j \end{bmatrix}.$$

Damit ist (2.17) bewiesen.

Überraschenderweise stellt sich heraus, dass

$$A_n^3 = (-1)^{n-1} q^{\binom{n-1}{2}} I_n \tag{2.18}$$

gilt.

Das folgt aus

$$\sum_k (-1)^{n-1-k} q^{\binom{n-1-k}{2}} \begin{bmatrix} i \\ n-1-k \end{bmatrix} (-1)^{n-1-j} q^{\binom{n-1-j}{2}+kj} \begin{bmatrix} n-1-k \\ j \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} q^{\binom{n-1}{2}} \sum_\ell (-1)^{\ell-j} q^{\binom{\ell-j}{2}} \begin{bmatrix} i \\ \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \\ j \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} q^{\binom{n-1}{2}}.$$

Man kann also alle Potenzen von A_n explizit angeben. Speziell ergibt sich unter Verwendung von (1.13)

$$A_n^{-1} = \left((-1)^j q^{\binom{j+1}{2}-j(n-i-1)} \begin{bmatrix} n-i-1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)_{i,j=0}^{n-1} = \left((-1)^j q^{-\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n-i-1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}} \right)_{i,j=0}^{n-1}.$$

Z.B. ist

$$A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}\right) & \frac{1}{q}\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}\right) & -\frac{1}{q^3} \\ 1 & -\left(1+\frac{1}{q}\right) & \frac{1}{q} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Spur gilt

$$Tr(A_n) = \sum_i (-1)^{n-1-i} q^{\binom{n-1-i}{2}} \begin{bmatrix} i \\ n-1-i \end{bmatrix} = \sum_\ell (-1)^\ell q^{\binom{\ell}{2}} \begin{bmatrix} n-1-\ell \\ \ell \end{bmatrix} = F_n\left(-\frac{1}{q}\right) = s_n(q).$$

Beachtet man, dass

$$s_n\left(\frac{1}{q}\right) = \sum_j (-1)^j q^{3\binom{j+1}{2}-jn} \begin{bmatrix} n-1-j \\ j \end{bmatrix}$$

ist, so folgt

$$Tr(A_n^{-1}) = s_n\left(\frac{1}{q}\right).$$

Die $q-$Binomialtransformation (2.1) ist invertierbar. Die Inverse ist gegeben durch

$$t^k \to \sum_{j\geq 0} (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} j+k \\ k \end{bmatrix} t^{j+k} = \sum_{j\geq k} (-1)^{j-k} q^{\binom{j-k}{2}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} t^j.$$

Das folgt sofort aus (1.11).

Wenn man in (2.2) q durch q^2 ersetzt, folgt aus $\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_2 q^k = (1+q)\cdots(1+q^n)$ (vgl. E (2.16))

$$\sum_n (1+q)\cdots(1+q^n)t^n = \sum_k \frac{(qt)^k}{(1-t)(1-q^2t)\cdots(1-q^{2k}t)}. \tag{2.19}$$

Aus der Identität von Cauchy (vgl. E (7.36))

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)\cdots(1-q^\ell x)} &= \sum_{k\geq 0} \begin{bmatrix} k+\ell \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k\geq 0} x^k \sum_{s=0}^{\ell} q^{s^2} \begin{bmatrix} k \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \\ s \end{bmatrix} = \sum_s q^{s^2} \begin{bmatrix} \ell \\ s \end{bmatrix} t^s \sum_k \begin{bmatrix} k \\ s \end{bmatrix} x^k \\ &= \sum_s q^{s^2} \begin{bmatrix} \ell \\ s \end{bmatrix} x^s \frac{1}{(1-x)\cdots(1-q^s x)} = \sum_s q^{s^2} \begin{bmatrix} \ell \\ s \end{bmatrix} \frac{x^s}{(1-x)\cdots(1-q^s x)} \end{aligned} \tag{2.20}$$

ergibt sich

$$\sum_n \frac{t^n}{(1-x)\cdots(1-q^n x)} = \sum_k q^{k^2} \frac{(xt)^k}{(1-x)\cdots(1-q^k x)(1-t)\cdots(1-q^k t)}. \qquad (2.21)$$

Für $x=-t$ erhalten wir unter Beachtung von (2.4)

$$\sum_k (-1)^k q^{k^2} \frac{t^{2k}}{(1-t^2)(1-q^2t^2)\cdots(1-q^{2k}t^2)} = \sum_n \frac{t^n}{(1+t)\cdots(1+q^n t)} = \sum_{k\geq 0}(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2k-1})t^{2k}.$$

Daraus folgt

$$\sum_k (-1)^k q^{k^2} \frac{t^k}{(1-t)(1-q^2t)\cdots(1-q^{2k}t)} = \sum_{k\geq 0}(1-q)\cdots(1-q^{2k-1})t^k. \qquad (2.22)$$

Ersetzt man hier $q \to -q$ so ergibt sich als Gegenstück zu (2.19)

$$\sum_k q^{k^2} \frac{t^k}{(1-t)(1-q^2t)\cdots(1-q^{2k}t)} = \sum_{k\geq 0}(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2k-1})t^k. \qquad (2.23)$$

Die $q-$Stirlingzahlen $s[n,k]$ der ersten Art folgt aus (1.20)

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q-1)^{k-i} s[k,i] = \binom{n}{i}.$$

Daher ergibt sich aus (2.2)

$$\sum_k (q-1)^{k-i} s[k,i] \frac{t^k}{(1-t)(1-qt)\cdots(1-q^k t)} = \frac{t^i}{(1-t)^{i+1}}.$$

Die Formel von Cauchy (2.20) kann noch etwas verallgemeinert werden:
Sei

$$f(k,\ell,t) = \sum_{s=0}^{\ell} q^{s^2} \begin{bmatrix} k \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \\ s \end{bmatrix} t^s$$

für $k,\ell \in \mathbb{N}$.
Dann gilt für die erzeugende Funktion

$$F(\ell,t,x) = \sum_{k\geq 0} f(k,\ell,t)x^k = \frac{\sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i q^{\binom{i+1}{2}} \begin{bmatrix} \ell \\ i \end{bmatrix} x^i \prod_{j=0}^{i-1}(1-q^j t)}{\prod_{j=0}^{\ell}(1-q^j x)}. \qquad (2.24)$$

Die Polynome $p_n(t)=\prod_{j=0}^{n-1}(1-q^j t)$ erfüllen

$$\frac{D_q^i}{[i]!}p_n(t)=(-1)^i\begin{bmatrix} n\\ i\end{bmatrix}q^{\binom{i}{2}}p_{n-i}(q^i t).$$

Speziell ist also

$\left.\frac{D_q^i}{[i]!}p_n(t)\right|_{t=\frac{1}{q^i}}=(-1)^i[n=i].$ Um (2.24) zu beweisen, entwickeln wir die linke Seite nach den Polynomen $p_n(t)$.

Sei $\sum_{k\geq 0} f(k,\ell,t)x^k=\sum_{i\geq 0} c_i(k,\ell,x)p_i(t).$

Dann ist

$$[i]!q^{\binom{i}{2}}(-1)^i c_i(k,\ell,x)=\sum_{k\geq 0}x^k\sum_{s=i}^{\ell}q^{s^2}\begin{bmatrix} k\\ s\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ell\\ s\end{bmatrix}[s][s-1]\cdots[s-i+1]\left.t^{s-i}\right|_{t=\frac{1}{q^i}}$$

$$=\sum_{k\geq i}x^k\sum_{s=i}^{\ell}q^{s^2}\begin{bmatrix} k\\ s\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ell-i\\ s-i\end{bmatrix}[\ell]\cdots[\ell-i+1]q^{i^2-is}$$

$$=[\ell]\cdots[\ell-i+1]x^i\sum_{k\geq 0}x^k\sum_{s=0}^{\ell-i}q^{s^2+is+i^2}\begin{bmatrix} k+i\\ s+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ell-i\\ s\end{bmatrix}$$

$$=[i]!\begin{bmatrix} \ell\\ i\end{bmatrix}x^i q^{i^2}\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} k+\ell\\ k\end{bmatrix}x^k.$$

Damit ist (2.24) bewiesen.

Insgesamt ergibt sich aus

$$\sum_{k\geq 0}x^k\sum_{s=0}^{\ell}q^{s^2}\begin{bmatrix} k\\ s\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ell\\ s\end{bmatrix}t^s=\sum_s q^{s^2}\begin{bmatrix} \ell\\ s\end{bmatrix}t^s\sum_k\begin{bmatrix} k\\ s\end{bmatrix}x^k$$

$$=\sum_s q^{s^2}\begin{bmatrix} \ell\\ s\end{bmatrix}t^s x^s\frac{1}{(1-x)\cdots(1-q^s x)}=\sum_s q^{s^2}\begin{bmatrix} \ell\\ s\end{bmatrix}t^s x^s\frac{1}{(1-x)\cdots(1-q^s x)}$$

die Formel

$$\sum_s q^{s^2}\begin{bmatrix} \ell\\ s\end{bmatrix}t^s x^s\frac{1}{(1-x)\cdots(1-q^s x)}=\frac{\sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i q^{\binom{i+1}{2}}\begin{bmatrix} \ell\\ i\end{bmatrix}x^i\prod_{j=0}^{i-1}(1-q^j t)}{\prod_{j=0}^{\ell}(1-q^j x)}. \tag{2.25}$$